АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

2672—3540

*

№ 4 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, В. И. Дикушин, А. П. Лебедев, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии) В. В. Покришевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 2
Основания математики и математическая логика 5
Теория чисел 8
Алгебра 16
Многочлены и линейная алгебра 17
Группы 19
Поля, кольца и структуры 23
Топология 26
Теория функций действительного переменного 32
Теория множеств 35
Приближение функций полиномами и их обобщениями 37
Теория функций комплексного переменного. 41
Дифференциальные уравнения 54
Обыкновенные дифференциальные уравнения 54
Уравнения в частных производных . . . 64
Приложения к физике, технике и естественным наукам 69
Интегральные уравнения 73
Приложения интегральных уравнений . . 75
Вариационное исчисление 76
Анализ (другие вопросы) 77
Числовые ряды 81
Специальные функции 83
Интегральные преобразования и операционное исчисление 86
Приложения общих методов математического анализа 87
Функциональный анализ 89
Теория вероятностей 95
Математическая статистика 100
Теория игр 101
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . 101
Геометрия 105
Приложения геометрии 107
Проективная и начертательная геометрия 107
Алгебраическая геометрия 109
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 112
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 116
Метрические методы в геометрии 120
Геометрия выпуклых многообразий . . . 122
Численные и графические методы 123
Таблицы 130
Математическая теория электрических цепей 131
Вычислительные машины и математические приборы 132
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 149
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42, Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, С. П. Фиников*

Рефераты 2672—3540 **№ 4** **Апрель 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

2672. **Совещание работников математических кафедр педагогических вузов УзССР.** Кельберт С. Л., Изв. АН УзССР, 1955, № 7, 104—108

Приводится краткое содержание основных докладов, прочитанных на совещании.

2673. **Научное заседание общества прикладной математики и механики в Берлине.** Виллерс (Wissenschaftliche Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Berlin. Willers), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 9—10, 325—326 (нем.)

2674. **Два года деятельности кафедры математики и физики Механического института в Либерцах.** Гавличек (Dva roky práce liberecké katedry matematiky a fysiky. Havlíček Karel), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 506—507 (чеш.)

2675. **Сообщение о деятельности Комиссии по истории математики и физики.** Сейдлерова (Zpráva o činnosti pracovní skupiny pro dějiny matematiky a fysiky. Seidlerová Irena), Českosl. časop. fys., 1955, 5, № 6, 717—718 (чеш.)

В начале 1955 г. начала работать группа по истории математики и физики, как часть комиссии по истории естественных наук и техники при Институте истории Чехословацкой академии наук.

2676. **Проблемы математической культуры Португалии.** Монтейро (Problemas da cultura matematica portuguesa. Monteiro Aniceto), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 71—75 (порт.)

Дается перечень математических организаций страны, к которым относятся: Институт высшей культуры, центры математических исследований в Лиссабоне и Порто, Объединение для математических исследований. Указываются журналы: «Portugaliae Mathemática», «Gazeta de Matemática», «Publicações de Junta de Investiqação Matemática». И. Я. Депман

2677. **О подготовке учащихся школ второй ступени и об объединении математики и физики.** Асколи (Sulla preparazione degli insegnanti dellescuole secondarie e sull'abbinamento della Matematica e della Fisica. Ascoli Guido), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 1, 75—77 (итал.)

Замечание в связи с обращением профессоров физики Падуанского университета по поводу совместного преподавания математики и физики в средней школе (РЖМат, 1956, 28). Приводится краткая история этого вопроса в Италии. В. И. Левин

2678. **Отчет объединенной комиссии Американского общества технического образования и Американской математической ассоциации о математике для инженеров** (Report of the joint Committee of the American Society for Engineering Education and the Mathematical Association of America on engineering mathematics), J. Engng Educ., 1955, 45, № 8, 583 — 588 (англ.)

Формулируются и обосновываются ответы на следующие вопросы: чему из математики следует учить будущих инженеров, кто должен их учить и как их следует учить. В. И. Левин

2679. **Приемы в математике?** Дрегер (Kunstgriffe in der Mathematik? DraegerMax), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, 2, № 3, 355—360 (нем.)

Разоблачаются антинаучные взгляды Шопенгауэра и некоторых современных идеалистов, сводящих математическое творчество и математические доказательства к собранию своего рода уловок, приемов и ставящих развитие математики в зависимость от ловкости в разыскании и употреблении таких приемов. Автор подчеркивает коренное отличие научного метода, имеющего объективный характер, от субъективного и случайного приема, играющего подчиненную роль и оправдываемого только соображениями пользы или целесообразности. В. Ф. Рогаченко

2680. **История науки и психология открытия.** Адамар (History of science and psychology of invention. Hadamard J.), Mathematika, 1954, 1, part 1, № 1, 1—3 (англ.)

См. также РЖМат, 1956, 68.

2681. **Математическая терминология.** Смолец (Matematička terminologija. Smolec Ignacije), Настава мат. и физ. средньој школи, 1953, 2, № 2, 103—113 (серб.)

2682 К. **Избранные труды.** Чебышев П. Л. Отв. ред. Виноградов И. М., М., Изд-во АН СССР, 1955, 927 стр. с илл., 37 р. 70 к.

В книге имеется четыре раздела, в которые вошли следующие статьи:

Теория чисел. «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины»; «О простых числах»; «Об одном арифметическом вопросе»; «Доказательство одной теоремы Чебышева»(составлена А. А. Марковым по бумагам, оставшимся после смерти Чебышева)

Теория вероятностей. «Опыт элементарного анализа теории вероятностей»; «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей»; «О средних величинах»; «О двух теоремах относительно вероятностей».

Анализ. «Об интегрировании иррациональных дифференциалов»; «О непрерывных дробях»; «Об интерполи-

ровании по способу наименьших квадратов»; «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями»; «Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей»; «О разложении функций в ряды при помощи непрерывных дробей»; «Об интерполировании»; «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций»; «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля».

Теория механизмов. «Теория механизмов, известных под названием параллелограмов»; «О некотором видоизменении коленчатого параллелограма Уатта»; «Об одном механизме»; «О параллелограмах»; «О центробежном уравнителе»; «О зубчатых колесах»; «О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов»; «О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси».

В конце книги помещены приложения, в которые вошли статья Н. И. Ахиезера «П. Л. Чебышев и его научное наследие» и статья И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского «Модели механизмов П. Л. Чебышева», а также комментарии к статьям по теории механизмов.

2683 К. **Список работ по истории науки и техники, выполненных люксембуржцами с 1839 по 1953 г. Глодан** (Liste des travaux d'histoire des sciences et de la technique dus à des luxembourgeois de 1839 à 1953. Gloden A. Ministère de l'Education Nationale du Grand-Duché de Luxembourg, 1953, 11 pp.), Math. Revs, 1954, 15, № 4, 275 (франц.)

2684 К. **Учебное пособие по специальным главам курса высшей математики. Файнберг М. М.** 2-е перераб. изд., М., Связьиздат, 1955, 120 стр. с черт., беспл.

2685 К. **Справочник по элементарной математике. Таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики. Выгодский М. Я.,** Изд. 8-е, М., Гостехиздат, 1955, 412, стр. с черт., 8 р. 5 к.

2686 К. **Сборник задач по высшей математике** (Для втузов). **Минорский В. П.,** Изд. 3-е, М., Гостехиздат, 1955, 360 стр. с черт., 6 р. 10 к.

2687 К. **Руководство для практических занятий по высшей математике. Ч. I. Хахубия Г. П.** (უმაღლესი მათემატიკის პრაქტიკუმის სახელმძღვანელო. ნაწილი I. ხახუბია გ.), თბილისი, ტექნიკა და შრომა. (Тбилиси, Техника да шрома), 1955, 312 стр., 6 р. 40 к. (груз.)

2688 К. **Опыты математического исследования в общепонятной форме. Хассе** (Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung. Hasse Helmut. Frankfurt a. M., Pinneberg, Salle, 1955, VIII, 101 S., 6. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 38, 2154 (нем.)

2689 К. **Математический словарь. Составитель: Японское математическое общество** (岩波數學辭典. 日本數學會編集), 東京, 岩波書店, (Токио, Иванами Сётен), 1954, XX + 591 + 98 + 89 стр., илл., 1200 иен (япон.)

Словарь издан многочисленным коллективом японских математиков под общим руководством Масаёси Янага. В начале словаря даны перечень математических символов и понятий, список сокращений названий журналов и предметный указатель к словарю.

Бо́льшая часть словаря (591 стр.) посвящена математическим понятиям, японские названия которых даны в латинизированном написании и расположены в порядке латинского алфавита, тут же эти термины даны на английском, французском и немецком языках и затем следует объяснение этих терминов на японском языке. Ценность представляют приводимые в объяснениях ссылки на литературу и источники для дальнейшего изучения вопросов, связанных с соответствующими терминами.

В конце словаря даны 2 приложения. В первом из них дается большой справочный материал из различных отделов математики, преимущественно из анализа. В конце первого приложения приводятся библиографические сведения об отдельных математических журналах. Во втором приложении дан указатель в японской иероглифике к японским терминам, вошедшим в словарь, и указатель к терминам английским, французским или немецким. Заканчивается это приложение алфавитным указателем фамилий математиков, о работах которых упоминается в словаре. В словарь включены также биографии 29 математиков. Л. А. Стебакова

2690 К. **Кибернетика и начала информации. Рюйер** (La Cybernétique et l'origine de l'information. Ruyer Raymond, Paris, Flammarion, 1954, 237 p., ill., 500 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 6, 128 (франц.)

2691 Д. **Идея функциональной зависимости в курсе алгебры русской средней школы. Бычков Б. П.** Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2692. **Замечания к портативным таблицам Птолемея. Ван-дер-Варден** (Bemerkungen zu den Handlichen Tafeln des Ptolemaios. Van der Waerden Bartel L.), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953, 261—272 (нем.)

2693. **Средневековые латинские переводы с арабского «Начал» Евклида, в особенности переводы Аделарда из Бата. Кладжетт** (The medieval Latin translations from the arabic of the Elements of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath. Clagett Marshall), Isis, 1955, 44, 16—42 (англ.)

2694. **Развитие математики в Средней Азии в IX—XV вв. Малыгин К. А.,** Матем. в школе, 1955, № 3, 20—23

Популярная статья. В изложении имеются неточности (например, неверно, что Насирэддин Туси впервые ввел понятие отвлеченного отношения двух однородных величин). При цитировании источники названы не полностью (стр. 23). А. П. Юшкевич

2695. **Жизнь и деятельность математика Региомонтана. Бляшке** (Vita ed opere del matematico Regiomontano. Blaschke W.), Matematiche, 1953, № 8, 50—58 (итал.)

Краткий обзор жизни, деятельности и основных трудов Региомонтана, основанный прежде всего на книге Циннера (Zinner E., Leben und Werken des Johannes Müller von Königsberg, genannt Regiomontano, Bamberg, 1938) и книге Клуга (Klug R., Johannes v. Gemunden, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa, 1943, 222). J. E. Hofmann

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, № 6/10, 242.

2696. **Значение рассуждений Галилея относительно центробежной силы. Галли** (Il valore delle speculazioni galileiane relative alla forza centrifuga. Galli Mario), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 1, 77—96 (итал.)

В «Диалогах о двух системах мира» Галилей, оспаривая возражение Птолемея против вращения Земли, заключающееся в том, что находящиеся на ее поверхности тела должны быть при вращении сброшены, разлагает движение тела, лежащего на земной поверхности, на два движения. Одно из них, совершающееся по касательной к поверхности Земли, происходит вследствие

охранения брошенным телом своего «impeto», другое, совершающееся по радиусу к центру Земли под влиянием собственного веса, возвращает его на емную поверхность. При помощи этого разложения можно было бы получить данную Гюйгенсом точную формулу для центробежной силы, но Галилей применил го лишь в двух частных случаях. В указанном месте Диалогов» он, не производя до конца вычислений, показывает, что при одинаковых окружных скоростях движение к центру, а следовательно, и производящая его сила будет больше у окружности с меньшим радиусом вращения. В другом тексте, имеющемся у Вивиани и опубликованном R. Caverni, Storia del metodo sperimentale in Italia (Firenze, 1895, 5, p. 541), Галилей показывает, что при одинаковых угловых скоростях центростремительная сила возрастает прямо пропорционально радиусу. Автор приводит несколько соображений относительно того, почему Галилей, находясь на пороге открытия, не довел его до конца. И. Н. Веселовский

2697. **Математический мир Саба-Сулхана Орбелиани. Ломджария** (საბა სულხან ორბელიანის მათემატიკური სამყარო. ლომჯარია ნ. ო.), საქ. პოლიტექნიის ინსტიტუტის შრომები, (Тр. Груз. политехн. ин-та), 1955, № 2, 39—56 (груз., рез. русс.)

Учитывая обилие памятников высокой материальной культуры древней Грузии, а также тесную культурную связь Грузии с другими народами, автор ставит вопрос о возможности самостоятельной линии развития математики в древней Грузии. В качестве объекта исследования берется «Лексикон» известного грузинского деятеля Саба-Сулхана Орбелиани (1658—1725) и рассматриваются даваемые в этом лексиконе определения математических понятий. Несмотря на общий невысокий уровень математической части лексикона, в ней усматриваются определенные черты (грузинская алфавитная нумерация, метрологические данные, названия дробей и т. д.), свидетельствующие о наличии традиции, имевшей своим источником более древнюю математическую культуру Грузии.

В статье затрагивается ряд вопросов истории математики в Грузии, в частности вопрос относительно наиболее ранних отражение в поэме Руставели «Витязь в тигровой шкуре» математических сведений.

Л. П. Гокиели

2698. **Старое и новое в определении площади декартова листа. Гофман** (Altes und neues von der Quadratur des Descartesschen Blattes. Hofmann J. E.), Centaurus, 1954, **3**, № 4, 279—295 (нем.)

Приводятся различные способы определения площади декартова листа, данные Ферма, Лопиталем, Гюйгенсом. Библ. 23 назв. С. И. Зетель

2699. **Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. (Очерк). Ряго Г.,** Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, № 37, 74—105 (рез. эст.)

В обзоре, написанном к 150-летию Тартуского университета (1952), даются сведения о деятельности в Тарту Мартина Бартельса (1769—1836; профессор в Тарту 1821—1836), Фердинанда Миндинга (1806—1885; в Тарту 1843—1885), Федора Эдуардовича Молина (1861—1941; доцент в Тарту 1885—1900; с 1900 г. профессор в Томске) и Гурия Васильевича Колосова (1867—1936; профессор в Тарту 1902—1913; с 1913 г. профессор в Петрограде). Кроме названных лиц, в обзоре охарактеризована деятельность выдающегося питомца Тартуского университета — Карла Михайловича Петерсона (ученика Миндинга). При составлении статьи использованы архивные дела и известные печатные источники, перечисленные в конце статьи. И. Я. Депман

2700. **Воспоминания о первой Международной комиссии по преподаванию математики. Лицман** (Erinnerungen an die erste Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Lietzmann W.), Elem. Math., 1955, **10**, № 1, 15—18 (нем.)

2701. **Объединение швейцарских актуариев (1905—1955). Цвинги** (Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker (1905—1955). Zwinggi E.), Mitt. Verein schweiz. Versicherungsmath., 1955, **55**, № 2, 139—168 (нем.)

Обзор истории возникновения, организации и деятельности названного общества. Общество издает журнал Mitteilungen etc, в котором печатаются исследования по вопросам теории страхования и по математической статистике и теории вероятностей.

И. Я. Депман

2702. **Первый американский математик. Джонс** (America's first mathematician. Jones Phillip S.), Math. Teacher, 1955, **48**, № 5, 333—338 (англ.)

Первый американский математик Н. Боудич (Nath. Bowditch) (1773—1838) — самоучка-моряк—в 1799 г. издал исправленный им «Новый американский практический навигатор», который до сих пор является руководством моряков. Боудич исправил 8000 ошибок прежнего издания. В 1815 г. он напечатал мемуар «О движении маятника, подвешенного в двух точках», в котором содержатся кривые, получившие название кривых Лиссажу (публикация Лиссажу относится к 1850 г.). К этим кривым Боудич пришел, решая вопрос о движении Земли, каким оно должно показаться наблюдателю с Луны. Главная известность Боудича заключается в переводе и комментировании «Небесной механики» Лапласа. При жизни Боудича вышло 3 тома (1829—1834), в 1839 г. — четвертый.

И. Я. Депман

2703. **Столетие со дня опубликования работы Ламе по теории упругости. Малкин** (The hundredth anniversary of the publication of Lamé's work on elasticity. Malkin I.), Scripta math., 1955, **21**, № 1, 44—45 (англ.)

2704. **Карл Вильгельм Фейербах, математик. Гуггенбул** (Karl Wilhelm Feuerbach, mathematician. Guggenbuhl Laura), Scient. Monthly, 1955, **81**, № 2, 71—76 (англ.)

Карл Фейербах (1800—1834), брат философа Людвига Фейербаха, в 1822 г. в книге «Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks...» доказал теорему: Окружность, проведенная через основания высот треугольника, проходит через середины сторон его и касается вписанных и вневписанных окружностей этого же треугольника («окружность Фейербаха» или «окружность 9 точек»; Понселе и Брианшон уже в 1821 г. показали, что эта окружность проходит через середины отрезков высот треугольника, заключенных между ортоцентром и вершинами). В 1827 г. Фейербах одновременно с Мебиусом опубликовал основные идеи барицентрического исчисления. Библ. 14 назв. и портрет Фейербаха.

И. Я. Депман

2705. **Неопубликованное письмо К. Ф. Гаусса,** Вестн. АН СССР, 1955, № 4, 109—111

Письмо К. Гаусса от 11 сентября 1835 г. изобретателю электрического телеграфа П. Л. Шиллингу об опытах Гаусса по электромагнитному телеграфу и определению проводимости металлов. Письмо адресовано в Бонн, где на съезде немецких естествоиспытателей П. Л. Шиллинг демонстрировал впервые перед европейскими учеными свой телеграфный аппарат (первая публичная демонстрация его состоялась в октябре 1832 г. в Петербурге). Во введении характеризуется

отношение Гаусса к Росси и интерес его к русскому языку и литературе. И. Я. Депман

2706. Заседание, посвященное столетию со дня рождения Анри Пуанкаре. Отрадных Ф. П., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 224

2707. К первой столетней годовщине рождения Анри Пуанкаре. Натуччи (Nel primo centenario della nascita di Enrico Poincaré. Natucci Alpino-lo), Giorn. mat. Battaglini, 1955, **83**, № 1, 115—130 (итал.)

Краткая биография А. Пуанкаре и содержание полного собрания его сочинений, выпущенного в 8 томах (1916—1953). И. Н. Веселовский

2708. К 90-летию со дня рождения Владимира Андреевича Стеклова. Ахиезер Н. И., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, **5**, 3—14

Приводятся краткие биографические сведения о В. А. Стеклове. Дается краткий обзор работ В. А. Стеклова по математической физике (краевые задачи теории теплопроводности, теории потенциала и пр.), приведших его к вопросам общей теории ортогональных систем. Рассматриваются работы Стеклова по теории механических квадратур. Ф. В. Широков

2709. Дикштейн и историки. К XV годовщине смерти Самуила Дикштейна. Роковская (Dickstein i historycy. W XV rocznicę śmierci Samuela Dicksteina. Rokowska Barbara), Matematyka, 1955, 8, № 1—2, 5—7 (польск.)

Умерший 18 января 1940 г. в возрасте 88 лет крупный деятель математического образования и организатор научных обществ и журналов в Польше Самуил Дикштейн в 1890 г. сделал попытку возбудить интерес к истории наук среди своих соотечественников, но съезд польских историков не принял его доклада, отговариваясь тем, что в Польше нет компетентных лиц для суждения по этому вопросу. Дальнейшие попытки сотрудничества Дикштейна в журнале «Kwartalnik Historyczny» также не дали существенных результатов.

Примечание референта. Данные о деятельности Дикштейна см. в статье Knaster B. (Prace Matematyczne, 1955, 1, 1). И. Я. Депман

2710. Два документа к биографии Н. Н. Лузина. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 8, М., Гостехтеориздат, 1955, 55—76

Впервые публикуются находящиеся в архиве Московского университета: а) отчет Н. Н. Лузина о заграничной научной командировке 1913—1914; б) доклад факультетской комиссии от 16 сентября 1916 г. в составе профессоров Н. Е. Жуковского, Л. К. Лахтина и Д. Ф. Егорова по делу о рекомендации Н. Н. Лузина на должность профессора Московского университета. К. А. Рыбников

2711. Генрих Вильгельм Эвальд Юнг. Келлер, Энгель (Heinrich Wilhelm Ewald Jung. Keller Ott-Heinrich, Engel Wolfgang), Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, **4**, № 3, 417—421 (нем.)

Обзор научной деятельности профессора университета в Галле Юнга (1876—1953), бывшего кратковременно в 1918 г. профессором в Тарту. Ученик Шоттки и Гензеля Юнг развил идеи своих учителей, создав арифметическую теорию алгебраических функций двух аргументов. Кроме того, он внес вклад в теорию интегралов и тета-функций алгебраических функциональных полей одного аргумента и точечных систем на плоскости и в пространстве. В статье дается детальный обзор главных достижений Юнга, список 61 работы его и 18 докторских диссертаций, выполненных его учениками, по вопросам, относящимся к кругу интересов их учителя. И. Я. Депман

2712 К. Очерки по истории теории аналитических функций. Маркушевич (Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen. Markuschewitsch A. I. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 139 S.) (нем.)

Перевод с русского с некоторыми незначительными изменениями и добавлениями. Показано в общих чертах развитие теории аналитических функций. Выясняется роль русских и советских ученых в развитии теории аналитических функций. Из-за изобилия новых тем и идей в советскую эпоху автор вынужден был отказаться от подробного рассмотрения всех открытий и ограничиться лишь характеристикой отдельных исправлений в этой области математики.

Содержание книги по главам:

I. Обобщение основных рузультатов XVIII столетия, II. Систематическое построение теории аналитических функций. III. Значение геометрии Лобачевского для теории аналитических функций. IV. Идеи П. Л. Чебышева об аппроксимации функций и дальнейшее развитие их в теории аналитических функций. V. Работы советских математиков по теории аналитических функций, связанных с проблемами механики, теории функций одной действительной переменной и теории чисел.

2713 К. История математики. Первая часть. От возникновения до выступления Ферма и Декарта. Гофман (Geschichte der Mathematik. Erster Teil. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Hofmann Joseph Ehrenfried. Sammlung Göschen Bd. 226, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1953, 200 p., 2.40 DM) (нем.)

Эта весьма компактная история математики от возникновения ее в доисторическое время и до великой перестройки ее в XVII в. имеет многие интересные особенности. Она сравнительно кратка в разделе, касающемся догреческой и греческой математики, и уделяет главное внимание периодам европейского Средневековья и Возрождения. Оправдывается такое отношение автора тем, что уже существуют хорошие обзоры истории античной математики, среди которых — недавно вышедшая книга О. Беккера и автора настоящей рецензии (Geschichte der Mathematik, Athenäum, Bonn, 1951), но для других периодов истории математики не существует книг, которые можно было бы сравнить с указанными. Особенное внимание уделено математике схоластического и досхоластического периодов, начиная с Оригена и кончая Орезмом и Брадвардином. Столь же заботливо отношение автора к периодам гуманистическому и «раннему бароко». А так как автор заглядывал буквально почти во все упоминаемые им первоисточники (часто его знакомство с ними гораздо большее) и так как он изучил все лучшие вторичные источники, то он оказался в состоянии давать свежий, часто новый подход к трудам математиков прошлого. Книжка изобилует маленькими оригинальными штрихами и стремится избегать классических ляпсусов историков, беззаботно повторяющих ошибки своих предшественников. Автор крайне деликатен в своих ссылках на первоисточники и вторичные материалы — указатель имен, составляющий 43 страницы, является маленькой энциклопедией — и с успехом осуществил свое стремление быть точным в деталях. Выдающейся чертой изложения является и то, что материал трактуется не изолированно, а как неотъемлемая часть общей культуры рассматриваемого периода.

По причине множества имен и фактов, которые в силу размера книги естественно затрагиваются кратко, эта книга является особенно полезной для лиц, уже владеющих некоторыми подготовительными знаниями, или для тех, кто ищет быстрой и заслуживающей доверия информации даже о самых малоизвестных ав-

торах. Для начинающего количество деталей покажется несколько подавляющим. Впрочем, первое впечатление о том, что автор грозит потопить читателя в море общей эрудиции, не подтверждается при дальнейшем изучении книги; определенные главные лица стоят прочно на своем месте и получают острые характеристики по своим заслугам. Примерами могут служить Региомонтан, Стевин, Виет. Заслуживает быть отмеченной среди прочих прекрасных детальных очерков история математики иезуитов. D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 24, 275.

2714 К. Сэр Исаак Ньютон. Андраде (Sir Isaac Newton. Andrade E. N. da C. London, Collins, 1954, 140 pp. (1 plate) 1.05 doll.), Math. Revs, 1954, 15, № 11, 923 (англ.)

2715 К. Нильс Генрик Абель. Гений и его время. Оре (Niels Henrik Abel. Et geni og hans samtid. Ore Øystein. Oslo, Gyldendal Norsk Forlag, 1954, 317 pp. (16 plates)), Math. Revs, 1955, 16, № 1, 1 (норв.)

См. также: 3242 К.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

2716. Теория алгорифмов. Марков А. А., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1954, 42, 3—376

Дается систематическое и детальное изложение разработанной автором теории нормальных алгорифмов и некоторых приложений этой теории к алгебре. Во введении указывается на работы Клини, Чёрча, Тюринга и Поста, в которых разработаны теории, позволяющие сформулировать точное определение понятия алгорифма. Отмечаются недостатки этих теорий и указывается, что цель монографии — разработка нового уточнения понятия алгорифма и общей теории алгорифмов на основе этого уточнения.

В гл. 1 («Буквы, алфавиты, слова») разъясняются термины «буква», «алфавит», «слово» и две основные абстракции, которые, по мнению автора, необходимы для математики: абстракция отождествления и абстракция потенциальной осуществимости. Здесь же вводится и изучается ряд технических понятий, относящихся к словам.

В гл. II («Понятие алгорифма») вводится понятие нормального алгорифма в заданном алфавите. Всякий нормальный алгорифм в алфавите A (предполагается, что знаки $\to$ и $\cdot$ не входят в A) определяется схемой, которая представляет собой список формул подстановок. Каждая формула подстановок является или простой или заключительной. Простая формула подстановок имеет вид $P \to Q$, где P и Q — слова в алфавите A, а заключительная формула имеет вид $P \to \cdot Q$. Применение к какому-либо слову S формулы $P \to Q$ или $P \to \cdot Q$ состоит в следующем: вместо первого вхождения слова P в слово S подставляется слово Q. Процесс применения нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ к заданному слову S (здесь S — любое слово в алфавите алгорифма $\mathfrak{A}$) развертывается следующим образом: просматривается схема алгорифма и ищется первая из тех формул подстановок, у которых левая часть (т. е. слово, стоящее слева от стрелки) входит в S. Если такой формулы нет, то процесс работы алгорифма на этом кончается и его результатом является слово S. Если такая формула есть, то она применяется к слову S. При этом, если примененная формула заключительная, то процесс работы алгорифма на этом кончается и полученное слово S_1 является его результатом. Если же примененная формула простая, то с полученным словом S_1 поступают точно так же, как с S, и т. д. Если этот процесс в конце концов закончится, то считается, что алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к исходному слову S и результат применения обозначается через $\mathfrak{A}(S)$.

Автор выдвигает следующий принцип нормализации: всякий алгорифм в алфавите A вполне эквивалентен относительно A некоторому нормальному алгорифму над алфавитом A. (Об алгорифмах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ говорят, что они вполне эквивалентны относительно алфавита A, если 1) всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ перерабатывает какое-нибудь слово P в A в слово Q, алгорифм $\mathfrak{B}$ также перерабатывает P в Q и 2) то же с переменой ролей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ есть алгорифм над алфавитом A, если $\mathfrak{A}$ — алгорифм в некотором расширении алфавита A). Отмечается, что принцип нормализации не является математической теоремой, ввиду недостаточной отчетливости общего понятия алгорифма. Но он имеет определенное содержание, разъясняемое автором, и поэтому приводится ряд доводов для его обоснования.

В гл. III («Построение нормальных алгорифмов») указывается ряд конструкций, позволяющих строить новые нормальные алгорифмы, исходя из данных.

В гл. IV («Универсальный алгорифм») каждому нормальному алгорифму $\mathfrak{A}$ в фиксированном алфавите A ставится в соответствие, посредством определенного конструктивного метода, некоторое слово в трехбуквенном расширении алфавита A, позволяющее однозначно восстановить схему алгорифма $\mathfrak{A}$. Это слово в алфавите $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ обозначается через $\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}$ и называется *изображением* алгорифма $\mathfrak{A}$. Доказывается теорема об универсальном алгорифме: может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{U}$ над алфавитом $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — буквы, не входящие в A), что $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P)$ для любого слова P в A и любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в A. Знак $\simeq$ означает, что выражения, стоящие слева и справа от $\simeq$, означают одно и то же слово, если хотя бы одно из них имеет смысл.

В гл. V («Основные теоремы невозможности алгорифмов») разъясняется понятие массовой проблемы. Любая массовая проблема состоит в разыскании алгорифма для нахождения правильного решения каждой единичной проблемы заданного типа. В гл. V доказывается неразрешимость некоторых массовых проблем, естественно возникающих в самой теории нормальных алгорифмов.

Гл. VI («Неразрешимость некоторых массовых проблем») посвящена доказательству неразрешимости ряда массовых проблем алгебры. Основное внимание уделено теории ассоциативных исчислений (т. е. конструктивной теории ассоциативных систем). Ассоциативные исчисления связываются с нормальными алгорифмами следующей теоремой: Каков бы ни был нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите A, можно построить такое ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ над алфавитом $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ (здесь α, β, γ — буквы, не входящие в A), что равенство $\mathfrak{A}(P) = Q$ будет иметь место для слов P и Q в алфавите A тогда и только тогда, когда $\beta\alpha P\beta$ эквивалентно $\beta\gamma Q\beta$ в исчислении $\mathfrak{B}$. С помощью этой теоремы и теорем гл. V устанавливается неразрешимость некоторых массовых проблем теории ассоциативных исчислений. Например, доказывается, что можно построить ассоциативное исчисление $\mathfrak{D}$, удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над

алфавитом исчисления $\mathfrak{D}$, перерабатывающий в пустое слово те и только те слова в этом алфавите, которые не эквивалентны в $\mathfrak{D}$ пустому слову. Значительное внимание уделяется построению такого ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности слов, которое имеет небольшой алфавит и небольшой список определяющих соотношений. Строится ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}_2$ в алфавите из 13 букв, определяемое 37 соотношениями, и доказывается, что в $\mathfrak{C}_2$ неразрешима проблема эквивалентности некоторому четырехбуквенному слову.

В монографии доказывается одна весьма общая теорема, из которой следует невозможность алгорифмов, распознающих наличие у ассоциативных исчислений в алфавитах с достаточно большим количеством букв некоторых важных свойств, например «единичности», «конечности», «полугрупповости», «групповости» и др. Доказана также неразрешимость проблемы изоморфии ассоциативных исчислений.

Пусть $U_1, \ldots, U_q$ — квадратные целочисленные матрицы порядка n. О матрице U порядка n говорят, что она представима через $U_1, \ldots, U_q$, если существуют целые положительные числа $t, r_1, \ldots, r_t$ $(1 \leqslant r_i \leqslant q$ для $i = 1, \ldots, t)$ такие, что $U = U_{r_1} \times \ldots \times U_{r_t}$. Доказывается, что при всяком $n \geqslant 6$ можно построить 91 матрицу $U_1, \ldots, U_{91}$ порядка n таким образом, что не будет возможен нормальный алгорифм, распознающий матрицы, представимые через $U_1, \ldots, U_{91}$, среди всевозможных целочисленных матриц порядка n. Основой этого результата служит усиление теоремы Поста, относящейся к одной комбинаторной проблеме из общей теории слов.

В «Заключении» автор характеризует теоретико-познавательное значение теорем о неразрешимости некоторых массовых проблем. Имеется много досадных опечаток и лишь часть их отражена в приложенном списке опечаток. Н. А. Шанин

2717. Три результата в теории рекурсивных функций. Майхилл (Three contributions to recursive function theory. Myhill J. R.), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, p. 50—59. Amsterdam, North-Holland Publishing Co. Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с теоремой Гёделя, с десятой проблемой Гильберта о диофантовых уравнениях и с одной проблемой Поста о неразрешимых множествах. Пользуясь идеями Поста и Розенблума, автор предлагает значительно упрощенную версию гёделевской теоремы неполноты, полностью избегая арифметизации. Подобно Посту, он рассматривает системы строчек символов, с одной аксиомой и с правилами преобразования простого вида, называемого нормальным. Вместо гёделевского пересчета он пользуется понятием представления одной системы в другой.

Десятая проблема Гильберта, пока еще не решенная, заключается в нахождении алгоритма решения для уравнения, которое получается приравниванием двух полиномов от нескольких целочисленных аргументов. М. Дэвис и Л. Кальмар доказали неразрешимость более сложных проблем. Кальмар показал неразрешимость проблемы о тождественном обращении в нуль данной элементарной функции. Автор устанавливает неразрешимость проблемы о тождественном обращении в нуль функции $f(v)$ — минимума для $x_1, \ldots, x_n < v$ полинома $\varphi(x_1, \ldots, x_n, v)$. Эта проблема больше походит на гильбертову, чем проблемы Дэвиса и Кальмара, поскольку она касается полиномов.

В связи с проблемой Поста о построении неразрешимых рекурсивно перечислимых множеств, не имеющих наивысшей степени неразрешимости, автор обсуждает неразрешимые множества, называемые Постом «простыми» и «креативными», а также те, которые Деккер называет «псевдопростыми». Он вводит понятие «псевдокреативного» множества, а также множества, креативного относительно эффективного оператора. Остается нерешенным вопрос о том, дает ли какое-либо из этих множеств ответ на проблему Поста. O. Frink

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 667.

2718. Об индуктивных системах. Попадич (O induktivnim sistemima. Popadić Milan S.), Годишен зб. филоз. фак. ун-т Скопје, Прир.-матем. оддел, 1954, **7**, № 1, 1—65 (серб.; рез. англ.)

Среди индуктивных заключений, употребительных в математике, особым распространением пользуются три: 1) принцип полной математической индукции, 2) принцип трансфинитной индукции и 3) принцип континуальной индукции, который автор называет «свойством Лебега — Хинчина» (здесь речь идет о свойстве не самого принципа, а порядкового типа множеств, к которым этот принцип применяется). Целью статьи является установление такой общей схемы индуктивного заключения, по отношению к которой три упомянутых принципа (а также и многие другие) играли бы роль частных случаев. Вместе с тем автор дает и полную характеризацию порядковых типов тех множеств («индуктивных систем»), к которым может быть применена эта общая схема. Формулировка как самой схемы, так и условий ее применимости требует нескольких десятков предварительных определений, лемм и теорем. А. Я. Хинчин

2719. О рекурсивных определениях в эмпирических науках. Бар-Хиллел (On recursive definitions in empirical sciences. Bar-Hillel Yehoshua), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. V, pp. 160—165, Amsterdam, North — Holland Publishing Co., Edition E. Nauwelaerts, Louvain 1953 (англ.)

Автор отмечает, что рекурсивные определения не являются определениями в обычном смысле.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 668.

2720. Осмысленные интерпретации в формальной логике. Фрейденталь (Meaningful interpretations in formal logic. Freudenthal Hans), Nederl. Akad. wetensch. Verslagen, Afd. natuurkunde, 1953, **62**, 94—96 (нем.)

Автор предлагает решить проблему парадоксов материальной импликации, вводя «полную импликацию» как отношение между двумя предложениями, для которых возможны три комбинации значений истинности 00, 01, 11 (0 = ложь, 1 = истина). Парадоксы возникают в случаях, когда одна или две из этих комбинаций исключаются a priori, так что импликация не является полной импликацией. A. Heyting

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 494

2721. О теореме Вота. Хенкин (On a theorem of Vaught. Henkin L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 326—328; Indagationes Math., 1955, **17**, № 3, 326—328 (англ.)

Доказана теорема: Пусть T — теория со стандартной формализацией (т. е. дедуктивно замкнутое множество формул узкого исчисления предикатов). Если 1) T категорична в некоторой бесконечной мощности (РЖМат, 1955, 3020), 2) T конечно аксиоматизируема (т. е. состоит из следствий конечного множества формул), то T разрешима. Эта теорема является модификацией теоремы Вота (см. там же) и доказывается сведением к ней. Из этой теоремы следует, например, что

разрешима теория абелевых групп, в которых каждый элемент порядка p (p — фиксированное простое число), что не вытекает из теоремы Вота.

Автор сообщает, что построен пример теории со стандартной формализацией, категоричной в некоторой бесконечной мощности и аксиоматизируемой (при помощи уже не конечного, но рекурсивно перечислимого множества аксиом), но не разрешимой.

Ю. А. Шиханович

2722. Дистрибутивные нормальные формы в исчислении предикатов. Хинтикка, Яакко (Distributive normal forms in the calculus of predicates. Hintikka K., Jaakko J.), Acta philos. Fennica, 1953, 6, 1—72 (англ.)

Развивается теория «дистрибутивных» нормальных форм для (элементарного) исчисления предикатов. Эти нормальные формы, аналогично нормальным формам, употребляемым для разрешающей процедуры одноместного исчисления, отличаются тем, что кванторы в формуле стоят как можно глубже. Эти формулы являются противоположностью предваренных формул. В исчислении высказываний мы располагаем дизъюнктивными нормальными формами. Каждая формула A логики предикатов может быть составлена с точки зрения логики высказываний из формул $V_{x_\lambda} b_\lambda$ и примитивных формул C_ν. Если для B_λ уже определена дистрибутивная нормальная форма $B_{\lambda_1} \vee B_{\lambda_2} \vee \ldots$, то нормальной формой $V_{x_\lambda} B_\lambda$ будет $V_{x_\lambda} B_{\lambda_1} \vee V_{x_\lambda} B_{\lambda_2} \vee \ldots$. Дистрибутивная нормальная форма формулы A тогда получается как дизъюнктивная нормальная форма $V_{x_\lambda} B_{\lambda_\mu}$ и C_ν. Нормальная форма, которую дает эта рекурсия, не определена однозначно. Нормальные формы в многоместных исчислениях могут содержать дизъюнктивные члены, которые опровержимы. Автор дает достаточные условия для этой опровержимости и упоминает, что отсюда можно получить разрешающие процедуры для формул, содержащих, самое большое, двукратные суперпозиции кванторов. Вкратце приводятся некоторые результаты для частного случая, когда одним из примитивных предикатов является тождество. Следует подчеркнуть, что вся работа написана на основе такой формализации логики предикатов, при которой формула считается доказуемой тогда и только тогда, когда она общезначима для всех областей индивидуумов, включая пустую область. Этим местами достигается больше симметрии. P. Lorenzen

Перевод из Zbl. Math., 1954, **50**, № 6/10, 246.

2723. Чисто пропозициональный подход к модальностям строгой логики. Шмидт (Ein rein aussagenlogischer Zugang zu den Modalitäten der strikten Logik. Schmidt Arnold), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 407—408 (нем.)

Автор берет исчисление предложений с аксиомами:

1. $a \wedge b \prec b \wedge a$
2. $(a \wedge b) \wedge c \prec a \wedge (b \wedge c)$
3. $a \wedge b \prec a$
4. $a \prec a \wedge a$
5. $a \wedge (a \prec b) \prec b$
6. $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \prec (a \prec c)$
7. $(a \prec b) \prec (\neg b \prec \neg a)$
8. $(a \wedge b \prec c) \prec (a \wedge \neg c \prec \neg b)$
9. $a \prec \neg \neg a$ 9′. $\neg \neg a \prec a$
10. $(a \prec b \wedge c) \prec (a \prec b)$

с правилами подстановки, перестановки и правилами вывода: «если A и $A \prec B$, то B», «если A и B, то $A \wedge B$». Аксиомы 1—6 и 9 являются аксиомами B1—B7 в системе строгой импликации Льюиса.

Кроме модальности возможности $\Diamond\ a =: \neg (a \prec \neg a)$, рассматриваемой в системе строгой импликации, предлагается рассматривать еще три модальности: $Na =: \neg a \prec a$ — необходимость, $Oa =: \Diamond\ a \wedge \neg Na$ — правдоподобность, $Za =: a \wedge \neg Na$ — случайность.

Автор утверждает, что при добавлении определения $\Diamond$ к вышеприведенному исчислению предложений состав доказуемых формул совпадает с доказуемыми формулами системы S2 ($\wedge$ и =в обоих случаях одинаково определены).

Добавление аксиомы $N \prec NN$ достаточно для получения системы S4, а аксиомы $\Diamond \prec N \Diamond$ — системы S5 (некоторые из приведенных аксиом становятся при этом излишними). Как известно, система Льюиса S4 получается добавлением к аксиомам B1—B7 аксиомы C10, а S5 — добавлением аксиомы C11. По существу аксиомы $N \prec NN$ и $\Diamond \prec N \Diamond$ являются иной записью аксиом C10 и C11.

Для каждой из модальностей можно рассматривать отрицание.

В заключение даются получаемые правила сведения модальностей. Через X обозначим любую из модальностей $\Diamond$, N, O, $\neg \Diamond$, $\neg O$, $\neg N$.

(1) $\Diamond X = NX = X$,
(2) $\neg \Diamond OX$, значит $OX = a \wedge \neg a$,
(3) $ZZ = Z$,
(4) $Z \neg Z = Z \neg$,
(5) $\neg \Diamond ZX$, значит $ZX = a \wedge \neg a$,
(6) $\Diamond Z = OZ = O \neg Z = O$,
(7) $N \neg Z = \neg O$,
(8) $\neg \Diamond NZ$, значит $NZ = a \wedge \neg a$,
(9) $N \Diamond \neg Z$, значит $\Diamond \neg Z = a \vee \neg a$.

Доказательства не приводятся. Т. Л. Майстрова

2724. Нестандартное определение истины. Мак-Нотон (A non-standard truth definition. Mc-Naughton Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 505—509 (англ.)

Работа примыкает к исследованиям Хао Вана (Hao Wang, Math., Ann, 1952, **125**, 56—66; Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 243—275) о конечной неаксиоматизуемости теоретико-множественных систем с непредикативными определениями и о связи определимости понятия истинности для некоторой формальной системы с доказуемостью непротиворечивости этой последней.

Пусть Z_C — теоретико-множественный формализм, содержащий непредикативные системы существования множеств (т. е. такие, что множество, существование которого постулируется, входит в область изменения переменной того выражения, которое представляет постулируемый объект); при этом имеется в виду система типа Цермело или Цермело—Френкеля, не содержащая так называемых собственных классов (не могущих быть элементами). Пусть Z'_C — любая система, содержащая только конечное число аксиом Z_C. В первой из упомянутых работ Хао Ваном построена (в предположении непротиворечивости Z_C) счетная модель D' для Z'_C; $e(0), e(1), e(2) \ldots$ — перечисление элементов D' в системе Z_C.

Понятия выполнимости (по Тарскому) и истинности вводятся следующим образом: g_i означает показатель $(i+1)$-го простого числа в разложении числа g на простые множители ($g > 0$); $0_i = 1_i = 0$; число g сопоставляет значение $e(g_i)$ переменной «x_i». $F(m)$ означает формулу с гёделевым номером m, «$M(m, n, k)$» — предикат «$F(m)$ есть $x_n \in x_k$», «$T(m, n, k)$» — предикат «$F(m)$ есть $\ulcorner F(n) \mid F(k) \urcorner$» ($\mid$ — штрих Шеффера), «$Q(m, n, k)$» — «$F(m)$ есть $\ulcorner (x_n)\, F(k) \urcorner$». R_m — число логических операторов (т. е. штрихов Шеффера или кванторов общности) в $F(m)$. Для описанного выше распределения значений g $t(g, i, m)$ означает такое распределение значений, что $(t(g, i, m))_i = m$ и $(t(g, i, m))_j = g_j$ для $j \neq i$. «$G_i(y)$» вводится как сокращение для

$\langle g, m\rangle \in y. \equiv .R_m \leqslant i. (\exists n)(\exists k)(M(m, n, k).e(g_n) \in e(g_k) \vee .T(m, n, k). \langle g, n\rangle \in y \mid \langle g, k\rangle \in y. \vee .Q(m, n, k). .(j)(\langle t(g, n, j), k\rangle \in g))$

(словами: y есть множество всех упорядоченных пар $\langle g, m\rangle$ таких, что $R_m \leqslant i$ и g выполняет (satisfies) $F(m)$ в D'; термин: y есть множество i-выполнения (i-satisfaction)). Далее «gSm» (g выполняет $F(m)$) вводится как $(\exists y)(G_{R_m}(y), \langle g, m\rangle \in y)$, и «$Tr(m)$» ($F(m)$ истинна) — как $(g)\, gSm$.

В отличие от соответствующего понятия Хао Вана, описанное понятие не требует переменных высших типов. Это связано с тем, что модель D' является нестандартной в смысле Россера и Хао Вана (Rosser B., Hao Wang, J. Symbolic Logic, 1950, 15, 113—129); в этой же связи и рассматриваемое понятие истинности рассматривается как нестандартное.

Рассматривается перевод предложений системы Z'_C в предложения системы Z_C в модели D'. Пусть в определенных обозначениях «m_1», «m_2» и т. д. служат переменными для натуральных чисел. Тогда $F(\mathrm{trans}(m))$ получается из $F(m)$ в этих обозначениях заменой всюду, кроме кванторов, «x_i» на «$e(m_i)$», а в кванторах «x_i» заменяются на «m_i». «$\mathrm{trans}(m)$» рекурсивна и потому определима в Z_C. Доказывается, что если «$\overline{m}$» — такая цифра, что $F(\overline{m})$ — замкнутая ф-ла, то в Z_C доказуема эквивалентность $\ulcorner Tr(\overline{m}) \equiv F(\mathrm{trans}(\overline{m}))\urcorner$.

Далее показывается, что истинность всех теорем Z'_C доказуема в Z_C и таким образом в Z_C доказуема непротиворечивость Z'_C.

Опечатка: на стр. 507, строка 14 сверху, вставить «(» перед $M(m, n, k)$; на стр. 508, строка 15 снизу, убрать одну «)» перед «$\equiv$» А. С. Есенин-Вольпин

2725. Логика и существование. Леевский (Logic and existence. Lejewski Czesław), Brit. J. Philos. Sci., 1954, 5, № 18, 104—119 (англ.)

Анализируется применимость правил

$$(x)(Fx) \supset Fy, \quad Fy \supset (Ex)(Fx).$$

Соответственно этим правилам получаются ложные выводы при подстановке вместо «y» понятия с пустым объемом. Рассматривается две интерпретации кванторов.

I. Ограниченная интерпретация (для простоты берем универсум, состоящий из двух предметов a и b). Кванторы $(Ex)(Fx)$ и $(x)(Fx)$ соответственно представляются в виде $Fa \vee Fb$ и $Fa \cdot Fb$. Применимость правил ограничена рамками универсума.

II. Неограниченная интерпретация. Универсум тот же a, b. Кванторы интерпретируются так: $(Ex)(Fx)$ соответствует $Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd$, $(x)(Fx) — Fa.Fb\ Fc.Fd$, где «c» — элемент с пустым объемом и «d» — любой элемент. В этом случае правила применяются без ограничения.

Обе интерпретации распространяются на бесконечный универсум: квантор существования включается любой компонентой бесконечного раскрытия. Квантор всеобщности включает любую компоненту его бесконечного раскрытия.

Приводится система аксиом, определяющая значение «существует». Будем понимать $a \subset b$ как «все a суть b».

21. $(a)(\mathrm{ex}(a) \equiv (Eb)(\sim(a \subset b)))$.

22. $(a)(\mathrm{sol}(a) \equiv (b, c, d)(\sim(c \subset d).(b \subset a).(c \subset a) \supset \supset (b \supset c)))$.

23. $(a)(\mathrm{ob}(a) \equiv ex(a).\ \mathrm{sol}(a))$.

«ex a», «существует a» наиболее близко к употреблению понятия в обычном языке; «ob a» — «существует только одно a» — соответствует пониманию «существования» в ограниченной интерпретации.

Т. Л. Майстрова

2726. Символические методы в описании логических сетей без задержки и циклов. Паттерсон (Symbolic methods in the design of delay-and cycle-free logical nets. Patterson George W.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 4, 58—64 (англ.)

Популярная статья о применении исчисления высказываний в анализе и синтезе схем, реализующих логические функции. Никаких новых результатов или идей в статье не содержится. Б. А. Трахтенброт

См. также: 3383.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

2727. Обратные задачи аддитивной теории чисел. Фрейман Г. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 4, 275—284

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots \qquad (1)$$

— монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, $q(N)$ — число решений неравенства

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots \leqslant N, \qquad (2)$$

где n_i — любые целые неотрицательные числа. Доказывается, что если

$$\log q(u) = Au^{\alpha} + O(u^{\alpha_1}), \qquad (3)$$

то

$$n(u) = Bu^{\beta} + O(u^{\beta}/\log u), \qquad (4)$$

где $n(u)$ — число членов последовательности (1), не превосходящих u, $0 < \alpha_1 < \alpha < 1$, A и B — некоторые постоянные > 0. Строится пример, показывающий, что оценку (4) усилить нельзя. В этом примере в качестве последовательности (1) берется $\{r^s\}$, $r = 1, 2, \ldots$ Высказывается гипотеза, что эту оценку нельзя усилить и в том случае, когда $q(u)$ будет задана асимптотической формулой с остаточным членом порядка $1/u^k$ относительно главного, где k — любое число > 0.

Г. В. Емельянов

2728. Общие разбиения. Гупта (Partitions in general. Gupta Hansraj), Res. Bull. Panjab Univ., 1955, № 67, 31—38) (англ.)

Рассматривается задача о числе представлений данного целого числа n линейной формой $n = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$ с заданными целыми коэффициентами $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_m$.

Метод работы основан на изучении коэффициентов ряда для функции $f_m(x) = \{(1-x)(1-x^{a_1})\cdots \cdots(1-x^{a_m})\}^{-1}$; $|x| < 1$.

А. И. Виноградов

2729. Заметка о теореме Рота. Варнавидес (Note on a theorem of Roth. Varnavides P.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 3, 325—326 (англ.)

Рот (РЖМат, 1953, 52) доказал, что всякая последовательность целых чисел, в которой нет ни одной

тройки чисел, образующих арифметическую прогрессию, имеет нулевую плотность в смысле Шнирельмана. Более того, Рот показал, что число членов такой последовательности, находящихся в интервале $(1, x)$, не превосходит $cx/\log\log x$. Доказывается теорема: Если натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не превосходят x и $x \geqslant x_0(\delta)$, $m \geqslant \delta x$, то из этих чисел можно образовать не меньше $cx\log x$ троек чисел, образующих прогрессию. Иными словами, число решений уравнения $a_i + a_j = 2a_k$ при указанных условиях будет не меньше, чем $cx\log x$, где $c = c(\delta)$ — положительная константа. Автор сводит теорему о существовании не менее $cx\log x$ решений уравнения $a_i + a_j = 2a_k$ к вытекающему из теоремы Рота факту существования по крайней мере одного решения у подобных уравнений при аналогичных неравенствах. Н. П. Романов

2730. Оценка плотностей суммарных множеств. Каш (Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Kasch Friedrich), Math. Z., 1955, 62, № 4, 368—387 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество неотрицательных целых чисел, $\mathfrak{A}(n)$ — множество всех чисел $a \in \mathfrak{A}(n)$, $a \leqslant n$, $A(n)$ — число элементов множества $\mathfrak{A}(n)$. Как известно, числа

$$\alpha = \inf_{n=1,2,3,\ldots} A(n)/n, \qquad \alpha^* = \underline{\lim}_{n\to\infty} A(n)/n$$

называются соответственно конечной и асимптотической плотностями множества $\mathfrak{A}$.

Множество $\mathfrak{B}$ неотрицательных целых чисел называется существенной компонентой, если для всякого множества $\mathfrak{A}$ положительной плотности $\alpha < 1$ плотность суммарного множества $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ больше α. Из работ Л. Г. Шнирельмана известно, что всякое множество положительной плотности является существенной компонентой.

В 1933 г. А. Я. Хинчин показал, что существуют существенные компоненты нулевой плотности. В 1936 г. П. Эрдёш доказал, что всякий базис натурального ряда конечного порядка является существенной компонентой. В дальнейшем многими авторами были развиты и усилены эти результаты. Работа посвящена улучшению соответствующих оценок, которое достигается единым методом.

Пусть α, β, γ обозначают плотности, соответственно множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, а $l(m)$ — минимальное число, при котором $m = b_1 + b_2 + \cdots + b_l$, $b_i \in \mathfrak{B}$; далее

$$h = \sup_{m=1,2,\ldots} l(m),$$

$$\lambda = \sup_{n=1,2,\ldots} (1/n) \sum_{m=1}^{n} l(m).$$

Основные результаты

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

и аналогичные оценки для асимптотических плотностей.

Эти оценки являются улучшением прежних оценок подобного рода, в частности неравенства А. Брауера (Brauer A., Math. Z., 1939, 44, 212—232)

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Наконец, автор переносит свой метод на аналогичные вопросы для разностных множеств $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. П. Г. Когония

2731. О суммах систем. Корпут (On sums of systems. Corput J. G. van der), Math. Centrum Amsterdam Scriptum, 1954, № 7, 31 pp. (англ.)

Главный результат автора — теорема: Если $n \geqslant 2$ и каждая из систем $A_1, \ldots, A_n$ содержит число нуль и A_n содержит по крайней мере одно положительное число, тогда можно построить $n-1$ систем $B_1, \ldots, B_{n-1}$ со следующим свойством: A_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ является подмножеством B_j, но $B_1 + \cdots + B_{n-1}$ — подмножеством $A_1 + \cdots + A_n$. Каждая симметрическая функция $f(m; A_1, \ldots, A_n)$ для любого положительного m удовлетворяет неравенству $f(m; B_1, \ldots, B_{n-1}, 0) \leqslant f(m; A_1, \ldots, A_n)$. Если k положительное и если медленно изменяющаяся функция $\varphi(m)$ для любого положительного $m \leqslant k$ удовлетворяет неравенству

$$A_1(m) + \cdots + A_n(m) \geqslant \varphi(m) + 1 - n,$$

тогда неравенство

$$B_1(m) + \cdots + B_{n-1}(m) \geqslant \varphi(m) + 1 - n$$

имеет место для каждого положительного $m \leqslant k$. Здесь системой является непустое множество неотрицательных чисел и $A(m)$ обозначает число натуральных чисел $< m$ в системе A. Медленно изменяющаяся функция $\varphi(m)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(m+m') \leqslant \varphi(m) + \varphi(m');$$

элементарно симметрическая функция является суммой, симметричной относительно индексов членов вида $(W + A_{i_1} + \cdots + A_{i_l})m$, где W — любая система, а симметрическая функция есть линейная функция с неотрицательными коэффициентами от элементарно симметрических функций

Теорему референта (Ann. Math., 1942 (2), 43, 523—527) и теорему Дайсона (Dyson, J. London Math. Soc., 1945, 20, 8—14) можно получить из результата автора как частные случаи. Методы автора очень похожи на методы Дайсона. Доказываются также несколько других теорем, сложность которых не позволяет их здесь цитировать. Терминология автора несколько неточна — теорема об $(\alpha + \beta)$ названа теоремой Хинчина, хотя доказал ее не Хинчин и теорема Дайсона в ее общем виде не цитируется. Н. В. Манн

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 934.

2732. Метод Корпута и теория экспоненциальных пар. Ранкин (Van der Corput's method and the theory of exponent pairs. Rankin R. A.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 22, 147—153 (англ.)

Статья обзорного характера, посвящена разбору метода оценки тригонометрических сумм, который дал Корпут, и дальнейших улучшений этого метода, данных Филлипсом и Титчмаршем. Метод Корпута заключается в применении двух процессов A и B к тригонометрической сумме

$$S_1 = \sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}.$$

Каждый из этих процессов сводит оценку S_1 к оценке другой суммы S_2, причем процесс A использует неравенство Шварца, процесс B — формулу суммирования Пуассона. Дальнейшее улучшение этого метода шло по пути увеличения кратности применения

процесса A и комбинации процессов A и B (Филлипс) и по пути применения двойных тригонометрических сумм (Титчмарш). В последнем параграфе автор сравнивает результаты, связанные с оценками остаточных членов в некоторых асимптотических формулах, полученных методом Филлипса и Титчмарша, откуда видно, что метод Титчмарша является более сильным. Кроме того, в 1945 г. автор показал, как он утверждает, что для любой конечной комбинации процессов A и B, применяемых к сумме S_1, можно подобрать другую конечную комбинацию, оценочные результаты которой будут лучше соответствующих результатов первой комбинации, и в то же время для результатов, полученных этим методом, существует предел, лучше которого нельзя получить оценок.

Доказательства этих предложений не приводятся ввиду того, что они очень громоздки.

А. И. Виноградов

2733. Некоторые быстро сходящиеся ряды для ξ-функции Римана. Гайнанд (Some rapidly convergent series for the Riemann ξ-function. Guinand A. P.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 22, 156—160 (англ.)

Доказывается, что ξ-функция Римана, т. е. $\xi(s) = (s(s-1)/2)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, разлагается в быстро сходящийся ряд по бесселевым функциям

$$\xi(s) = 4\pi(1-s)\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-s/2}\sigma_s(n)K_{1+s/2}(2n\pi) + 16\pi^3 s^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{3-s/2}\sigma_s(n)\{(s-7)K_{1+s/2}(2n\pi) + (s+7)K_{1-s/2}(2n\pi)\}$$

для $s \neq 0$; $\sigma_s = \Sigma_{d/n} d^s$.

Н. Г. Чудаков

2734. Приближенное функциональное уравнение для L-рядов Дирихле. Татузава (The approximate functional equation for Dirichlet's L-series. Tatuzawa Tikao), Japan. J. Math., 1952, 22, 19—25, журнал вышел из печати в 1953 г. (англ.)

Главный результат — теорема 2: Если $0 < \sigma < 1$, $x \geqslant \sqrt{k}$, $y \geqslant \sqrt{k}$, $2\pi xy = kt$ $(s = \sigma + it)$ и $\chi(n)$ — характер Дирихле mod k, то

$$L(s,\chi) = \sum_{n\leqslant x}\chi(n)n^{-s} + 2(2\pi)^{s-1}k^{-s}\Gamma(1-s)\sum_{n\leqslant y}\left(C(n)\sin\frac{\pi s}{2} + S(n)\cos\frac{\pi s}{2}\right)n^{s-1} + O(kx^{-\sigma}) + O(ky^{\sigma-1}(kt)^{1/2-\sigma}),$$

где $C(n) = \sum_{l=1}^{k}\chi(l)\cos\frac{2\pi ln}{k}$, $S(n) = \sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sin\frac{2\pi ln}{k}$,

и O включает абсолютное постоянное и неравенство имеет место для всех значений переменных. Важно отметить равномерность по k. Чудаков (Tchudakoff, Ann. Math., 1947 (2), 48, 515—545) уже получил результат такого вида для первообразного χ, где вторая сумма имеет более простую форму, содержащую частичную сумму ряда Дирихле для $L(1-s, \bar{\chi})$. Ход рассуждений такой же, как в доказательстве Харди и Литлвуда приближенного функционального уравнения для $\zeta(s)$ методом вещественного переменного (Hardy, Littlewood, Proc. London Math. Soc., 1929, (2), 29, 81—97). Далее утверждается, что для первообразного χ первый сомножитель в остаточном члене посредством «легко производимой оценки» можно свести на $k^{1/2}\log(k+1)$. Встречаются несколько ошибок и неясных для понимания мест. Так лемма 4 цитируется из работы Харди и Литлвуда в расширенном виде без замечания о распространении ее, в частности от $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 3/2$ на $0 < \sigma < 2$. Теорема 1 содержит бесконечный ряд но в формулировке нет указания на сходимость или область применимости. Теорема сперва доказывается для $-1 < \sigma < 0$ (читатель сам может найти обоснование почленного перехода к пределу) и посредством аналитического продолжения непосредственно может быть распространена на $\sigma < 0$ (полуплоскость абсолютной сходимости). Единственным указанием на то, что автор, может быть, подразумевает больше этого, является скрытое предложение: «Посредством несложного преобразования можем вывести это функциональное уравнение для произвольной полуплоскости». Однако теорема 1 впоследствии не применяется; она служит только для подготовки читателя к форме второй суммы в теореме 2.

A. E. Ingham

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 16.

2735. Асимптотическая оценка суммы делителей некоторых чисел. Бојанић Ранко), Билтен друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, 5, 5—15 (серб.; рез. франц.)

Пусть $\sigma(m)$ обозначает сумму всех делителей целого числа m. Показано, что для некоторых чисел специального вида отношение $\sigma(a_n)/a_n$ стремится к 1 при n, растущем неограниченно. Таковы, например, случаи: $a_n = 2^{2^n}+1$ (числа Ферма), $a_n = p_1p_2p_3\ldots p_n+1$, $a_n = 2^{p_n}-1$ (p_k — простые числа). Если p и q — числа простые, то отношение $\sigma(2^{pq}+1)/(2^{pq}+1)$ при q, неограниченно растущем, стремится к $\sigma(2^p+1)/(2^p+1)$.

А. И. Попов

2736. О степенях. Мыцельский Ян, Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 3, 131—134

О степенях. Мыцельский (On powers. Mycielski Jan), Bull. Acad. polon. sci. Cl. 3, 1955, **3**, № 3, 129—132 (англ.)

Пусть n — натуральное число > 1, $a(n)$ — наименьшее из натуральных чисел k, $b(n)$ — наибольшее из натуральных чисел l, для которых $n = k^l$. P — натуральное число, для которого $a(P) = P$, $b(P) = 1$. $\{P\}$ — последовательность всех таких чисел. $P(x)$ — число членов этой последовательности, не превосходящих x.

Приводится серия асимптотических формул и тождеств для функции $P(x)$ и других, связанных с ней.

Так, например,

1) $P(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\mu(m)\left[\sqrt[m]{x}-1\right]$,

где [ ] — «антье», μ — функция Мёбиуса;

2) $P(x) = \sum_{m=2}^{\infty}(\log x)^m/m!\,\zeta(m) + O(\log x)$;

3) $\sum_{P\leqslant x}(\log P)^a = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\log x)^{m+a+1}}{m!\,(m+a+1)\zeta(m+1)} + O\left((\log x)^{a+1} + \frac{(\log x)^{a+1}-1}{a+1}\right)$

и другие. Доказательства всех формул элементарны, однако не приводятся.

Г. В. Емельянов

2737. О числе решений в простых числах одной системы уравнений. Прахар (Über die Lösungszahl eines Systems von Gleichungen in Primzahlen. Prachar K.), Monatsh. Math., 1955, 59, № 2, 98—103 (нем.)

Автор ранее доказал, что для бесконечного множества чисел n число решений уравнения $p_1+p_2=n$ в простых числах p_1 и p_2 будет больше, чем $cn\ln^{-2}n\ln\ln n$, и дал оценку для числа таких $n\leqslant x$ (РЖМат, 1955, 2084). Аналогичные вопросы рассматриваются для числа решений системы

$$p_1+p_2=n,\quad p_2+p_3=m, \tag{1}$$

где p_1, p_2, p_3 — простые числа. Число таких решений системы (1) обозначается через $F(n, m)$ и доказываются:

Теорема 1. При $n<m$, $F(n,m)<cn(\ln n)^{-3}G(n,m)$, где

$$G(n,m)=\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p\mid m,\ p<n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\times$$
$$\times\prod_{p\mid m-n,\ p\mid n,\ p<n}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Теорема 2. Существует бесчисленное множество пар n, m $(n<m)$ таких, что

$$F(n,m)>cm(\ln m)^{-3}(\ln\ln m)^2.$$

В теоремах 3 и 4 при $0<\varepsilon<1$ даются оценки для числа $A_\varepsilon=A_\varepsilon(x,c)$ пар n, m с условиями $n\leqslant x$, $m\leqslant x$, $m\neq n$ и

$$F(n,m)>c\varepsilon^2x(\ln x)^{-3}(\ln\ln x)^2.$$

Доказательство теоремы 1 не приводится, так как оно получается обычным применением решета методом Бруна. Доказательства остальных теорем основаны на применении оценки Бруна—Шнирельмана для числа пар простых чисел, не превосходящих x и имеющих заданную разность, и на оценке функции $\pi(x,k,l)$, выражающей число простых чисел $p\leqslant x$, $p\equiv l\pmod k$, $(k,l)=1$ при $k<\exp(c_1\ln x/\ln\ln x)$ и k, не делящемся на некоторое фиксированное k_0.

А. А. Бухштаб

2738. О целых точках в многомерных эллипсоидах. Семнадцатая работа. Вальфиш А. З., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, 21, 3—64

Пусть $A_k(x)=\sum_{j_1^2+\cdots+j_k^2\leqslant x}1$ — число целых точек в k-мерном шаре $y_1^2+\cdots+y_k^2\leqslant x$, $V_k(x)=\pi^{k/2}x^{k/2}/\Gamma(k/2+1)$ — объем этого шара и $P_k(x)=A_k(x)-V_k(x)$.

$$P_k=\lim_{n\to\infty}\sup 2\Gamma(k/2)P_k(n)\pi^{-k/2}n^{-(k/2-1)},$$
$$\rho_k=\lim_{n\to\infty}\inf 2\Gamma(k/2)P_k(n)\pi^{-k/2}n^{-(k/2-1)}.$$

Оценки для P_k и ρ_k при четных k были получены автором (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1947, 15, 297—322; 1948, 16, 169—212; РЖМат, 1955, 3034). Используя асимптотическую оценку для функции $P_k(x)$, полученную Петерссоном (Petersson H., Abhandl. Math. Seminar Hamburg. Univ., 1926, 5, 116—150), автор дает оценки для P_k и ρ_k при нечетных $k\geqslant 7$.

А. П. Лурсманашвили

2739. О граничной формуле Кронекера. Мейнардус (Über die Kroneckersche Grenzformel. Meinardus Günter), Math. Z., 1955, 62, № 4, 347—351 (нем.)

Известно несколько доказательств граничной формулы Кронекера

$$\lim_{s\to 1}\{Z(\tau,s)-\pi/y(s-1)\}=$$
$$=-(2\pi/y)\log\{\eta(\tau)\eta(-\bar\tau)\}-$$
$$-(2\pi/y)\log y+(2\pi/y)(\gamma-\log 2). \tag{1}$$

где $\tau=x+iy$, $\bar\tau=x-iy$, $y>0$, γ — постоянная Эйлера,

$$Z(\tau,s)=\sum_{\substack{n,m\\ n^2+m^2>0}}|n+m\tau|^{-2s}\quad(\mathrm{Re}(s)>1),$$
$$\eta(\tau)=\exp(\pi i\tau/12)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\exp(2\pi in\tau)).$$

Приводится еще одно новое доказательство формулы (1), основанное на теореме о вычетах.

Г. А. Ломадзе

2740. О формулах умножения эллиптических функций Якоби. Карлиц (Note on the multiplication formulas for the Jacobi elliptic functions. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 169—176 (англ.)

Для функции sn при нечетном t имеет место формула умножения

$$\mathrm{sn}\,tx=\mathrm{sn}\,xG_1^{(t)}(z)/G_0^{(t)}(z), \tag{1}$$

где $z=\mathrm{sn}^2x$,

$$G_0^{(t)}=1+a_{01}z+a_{02}z^2+\ldots+a_{0,(t^2-1)/2}z^{(t^2-1)/2},$$
$$G_1^{(t)}=t+a_{11}z+a_{12}z^2+\ldots+a_{1,(t^2-1)/2}z^{(t^2-1)/2}, \tag{2}$$

a_{ij} — целочисленные многочлены относительно k^2, k — модуль (Fricke R., Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, Berlin, 1922, 2, 197). Изучается функция $\beta_m(t)=\beta_m(t,k^2)$, определяемая с помощью разложения

$$\mathrm{sn}\,tx/t\,\mathrm{sn}\,x=\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{2m}(t)x^{2m}/(2m)!$$

и условия $\beta_{2m+1}(t)=0$.

Из формул (1) и (2) при нечетном t и целом $m\geqslant 0$ следует, что $t\beta_{2m}(t)$ есть целочисленный многочлен относительно k^2. Доказывается, что

$$\beta_{2m}(t)=H_m(t)-\Sigma_{p-1/2m}(1/p)A_p^{2m/(p-1)}(k^2), \tag{3}$$

где $H_m(t)=H_m(t,k^2)$ — целочисленный многочлен относительно k^2, p — нечетное простое число и $A_p(k^2)$ — целочисленный многочлен, определяемый разложением:

$$\mathrm{sn}\,x=\mathrm{sn}(x,k^2)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2m+1}(k^2)x^{2m+1}/(2m+1)!$$

Устанавливается сравнение

$$t\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\beta_{m+s(p-1)}(t)A_p^{r-s}(k^2)\equiv$$
$$\equiv 0\pmod{p^m,\ p^r}), \tag{4}$$

где $p\neq 2$ — простое число, а $r\geqslant 1$. Формулы (3) и (4), представляющие основной результат статьи, выводятся с помощью соотношений, полученных автором в одной из его прежних работ (РЖМат, 1953, 589).

На основе соотношения (3) раскрываются некоторые свойства функции $\beta_{2m}(t)$ (теоремы 2—6).

Теорема 5. Имеет место тождество:

$$\beta_{2m}(t)=L_{2m}+\Sigma_{p\mid t}\beta_{2m}(p), \tag{5}$$

где L_{2m} — целочисленный многочлен относительно k^2 и суммирование ведется по всем простым делителям t.

Рассматриваются свойства целочисленных полиномов C_{2m+1} относительно k^2, определяемых разложением

$$\mathrm{sn}\,tx=\sum_{m=0}^{\infty}C_{2m+1}\mathrm{sn}^{2m+1}x.$$

Теорема 7. При t нечетном все коэффициенты многочлена $(2m+1)C_{2m+1}$ делятся на t.

Теорема 8. Если p — простой делитель t, то $pC_p/t \equiv 1 \pmod p$ и, следовательно, $C_p \equiv t/p \pmod{p^e}$, если $p^e \mid t$, $p^{e+1} \nmid t$.

В заключение отмечается аналогия между соотношениями (5) и (3) с формулами Штаудта:

$$\Phi_m^{(t)} = G + \Sigma_{p \mid t} \Phi_m^{(t)}(p)$$

и

$$\Phi_{2m}(t) = G - \sum_{p \mid t}^{p-1 \mid 2m} 1/p$$

где числа $\Phi_m(t)$ при целом t определяются из разложения

$$(e^{tx} - 1)/t\,(e^x - 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(t)\, x^m/m!$$

и G — целое число. И. Г. Мельников

2741. Об иррациональности π. Шнейдер (Über die Irrationalität von π. Schneider Theodor), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1954 (1955), 99—101 (нем.)

Доказывается известный факт, что числа α и e^α не могут одновременно принадлежать гауссову полю, за исключением случая $\alpha = 0$, откуда при $\alpha = i\pi$ следует иррациональность π. При доказательстве используется интерполяционный ряд Ньютона в комплексной области и теорема Коши. Случай $\alpha = 0$ в статье не оговорен.

Примечание референта. Доказательство по идее повторяет доказательство А. О. Гельфонда (Исчисление конечных разностей, М., 1952, 242—246), который теми же средствами доказывает больше: числа α и e^α не могут быть одновременно алгебраическими, за исключением случая $\alpha = 0$. А. Б. Шидловский

2742. Рациональные приближения в комплексной плоскости. Чок (Rational approximations in the complex plane. Chalk J. H. H.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 327—343 (англ.)

Пусть $f(u, v) = C(u - \Omega v)(u - \Omega' v)$ — бинарная квадратичная форма дискриминанта $D = C^2(\Omega - \Omega')^2 \neq 0$, u, v — целые, C, Ω, Ω' — произвольные комплексные числа. $H(u, v) = au\bar{u} + bu\bar{v} + \bar{b}u\bar{v} + cv\bar{v}$ — неопределенная эрмитова форма, a, c — действительные и $\Delta = b\bar{b} - ac > 0$.

Вместе с положительно определенной эрмитовой формой $t\,|\alpha u + \beta v|^2 + t^{-1}\,|\gamma u + \delta v|^2$ рассматривается $G(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — специальным образом построенная последовательность дробей p_n/q_n. Используя свойства этой последовательности, автор доказывает теорему: Пусть $\omega = \Omega \notin K(i)$, Ω' — любые различные фиксированные решения уравнения $a\omega\bar{\omega} + b\omega + \bar{b}\bar{\omega} + c = 0$, где $\Delta = b\bar{b} - ac > 0$. Пусть

$$\ldots,\ p_{-2}/q_{-2},\ p_{-1}/q_{-1},\ p_0/q_0,\ p_1/q_1,\ p_2/q_2, \ldots$$

обозначает последовательность $G(1, -\Omega, 1, -\Omega')$. Тогда $|p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n| = 1$, $p_n/q_n \to \Omega$ при $n \to +\infty$, $p_n/q_n \to \Omega'$ при $n \to -\infty$. Для любого целого n $|f(p_n, q_n)| \leqslant \sqrt{|D|}/2$ и существует целое комплексное число μ_n, $|\mu_n| \leqslant \sqrt{5}$ такое, что

$$\min\{|f(p_n, q_n)|,\ |f(p_n\mu_n + p_{n+1},\ q_n\mu_n + q_{n+1})|\} \leqslant \sqrt{|D|}/3.$$

Для любого целого n существует целое комплексное число λ_n, $|\lambda_n| \leqslant \sqrt{10}$ такое, что

$$\min\{|H(p_n, q_n)|,\ |H(p_n\lambda_n + p_{n+1},\ q_n\lambda_n + q_{n+1})|\} \leqslant \sqrt{2\Delta}/3.$$

Следствие: Пусть Ω — любое фиксированное комплексное число, $\Omega \notin K(i)$, θ — любое действительное число. Тогда для любого $k > 1/\sqrt{6}$ существует бесконечно много целых чисел p, $q \in K(i)$ таких, что

$$|Re^{i\theta}(\Omega - p/q)| < k/|q|^2,\quad |\Omega - p/q| < 14/|q|^2.$$

Э. Е. Симакова

2743. Новое доказательство периодичности правильных и полуправильных непрерывных дробей квадратичных иррациональностей. Перрон (Neue Periodizitätsbeweise für die regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen. Perron Oskar), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1954 (1955), 321—333 (нем.)

Существует большое число доказательств известной теоремы Лагранжа о периодичности разложения квадратичных иррациональностей в правильную непрерывную дробь. Все ранние доказательства исходили из аппроксимативных свойств подходящих дробей; более поздние основывались только лишь на формальных свойствах алгоритма и проводились сравнительно просто. Одно из таких доказательств принадлежит Баллину (Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Auflage, Band 1, Stuttgart, 1954).

Пусть

$$\xi_0 = (\sqrt{D} + P_0)/Q_0$$

— данная квадратичная иррациональность, где D, P_0, Q_0, $(D - P_0^2)/Q_0$ — целые числа, причем D — не точный квадрат. Тогда для полных частных ξ_ν числа ξ_0 имеем

$$\xi_\nu = (\sqrt{D} + P_\nu)/Q_\nu,$$

где P_ν, Q_ν и $(D - P_\nu^2)/Q_\nu$ — тоже целые числа.

Если b_ν обозначает целую часть числа ξ_ν, то $\xi_\nu = b_\nu + 1/\xi_{\nu+1}$. Итак $(\sqrt{D} + P_\nu)/Q_\nu = b_\nu + Q_{\nu+1}/(\sqrt{D} + P_{\nu+1})$, имеют место равенства

$$P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu,\quad D - P_{\nu+1}^2 = Q_\nu Q_{\nu+1}.$$

В доказательства теоремы Лагранжа, принадлежащих Гонсальвесу, основными звеньями является установление следующих неравенств:

$$|Q_{\nu+1}| < \mathrm{Max}(2\sqrt{D},\ |Q_{\nu-1}|), \tag{1}$$

$$|P_{\nu+1}| < \mathrm{Max}(\sqrt{D},\ |P_\nu|). \tag{2}$$

1-й параграф статьи посвящен существенному упрощению доказательств неравенств (1) и (2). Во 2-м параграфе с помощью аналогичных рассуждений дается тоже упрощенное доказательство периодичности разложения квадратных иррациональностей в полуправильную непрерывную дробь. В 3-м параграфе даны наброски другого доказательства этой теоремы. Последний параграф посвящен доказательству (с помощью аналогичных соображений) периодичности разложения в непрерывную дробь в мнимых квадратичных полях $K(i\sqrt{\Delta})$ ($\Delta = 3, 4, 7, 8, 11$), квадратичных относительно этого поля иррациональностей. П. Г. Когония

2744. Однозначное разложение на множители в мультипликативных системах. Джеймс, Нивен (Unique factorization in multiplicative systems. James R. D., Niven Ivan), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 834—838 (англ.)

Рассматривается замкнутое относительно умножения множество натуральных чисел M такое, что если $x \in M$ $y \equiv x \pmod n$, $y > 0$, то $y \in M$. Предположим, что натуральное n с указанным свойством выбрано наимень-

шим. Доказывается, что в мультипликативной системе M теорема об однозначном разложении на неразложимые множители имеет место тогда и только тогда, если M состоит из всех натуральных чисел, взаимно простых с n. З. И. Боревич

2745. Определение идеальных чисел в локальной теории Золотарева. Моисил (O definiţie a numerelor ideale în cadrele teoriei locale a lui Zolotarev. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 2, 279—283 (рум.; рез. русс., франц.)

Обобщая идею Золотарева, автор определяет делимость элемента α области интегрирования $\mathfrak{O}$ элементом β по отношению к целому m, если существует целое c, взаимно простое с m, такое, что $c\alpha$ делится на β. Если α делится на β и β делится на α по отношению к m, то α и β называются ассоциированными по отношению к m, что записывается так: «$\alpha \sim \beta\,(m)$».

Зависимость $\sim(m)$ есть зависимость эквивалентности, и классы эквивалентности называются идеальными числами. Зависимость $\sim(m)$ совместима с умножением в $\mathfrak{O}$: если $\alpha \sim \beta\,(m)$ для любого целого m, то α ассоциировано с β в $\mathfrak{O}$. Таким образом определяется умножение идеальных чисел по отношению к тому же целому m. В. А. Голубев

2746. К вопросу определения индекса поля алгебраических чисел. Сукалло А. А., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 37—42

Пусть Θ — целое примитивное число поля алгебраических чисел K степени n над полем рациональных чисел. Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — фундаментальный базис K, то определитель $|C_{kj}|$ подстановки

$$\Theta^k = \sum_{j=1}^{n} C_{kj}\omega_j \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

называется индексом Θ. Индексом поля K называется наибольший общий делитель индексов всех целых чисел поля K. Вопрос о том, входит ли данное рациональное простое число p множителем в индекс поля, может быть решен с помощью критерия Дедекинда — Гензеля (Bachmann P. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper, Leipzig, 1905).

В реферируемой работе решается задача определения точной степени числа p, на которую делится индекс поля. Доказывается теорема: Если для рационального простого числа p в поле K степени n имеется разложение $p = P_1^{e_1}P_2^{e_2}\ldots P_l^{e_l}$, где $P_1, P_2, \ldots, P_l$ — различные простые идеалы первого порядка, $l > p$, $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots \geqslant e_l$, $\sum_{i=1}^{p} e_i = P$ и $n = PQ + R$, $0 \leqslant R < P$, то индекс поля K делится точно на P^N, где $N = PQ(Q-1)/2 + QR$.

В конце статьи теорема применяется к решению одного примера. Имеются опечатки. И. Г. Мельников

2747. О трехчленных уравнениях в конечном поле. Вандивер (On trinomial equations in a finite field. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 10, 1008—1010 (англ.)

Пусть p — простое нечетное число и $F[p^n]$ обозначает конечное поле порядка p^n. Рассматривается уравнение

$$g^{i+cs} + g^{j+mt} = 1, \qquad (1)$$

где g — мультипликативное основание элементов из $F[p^n]$, i, j — фиксированные целые, для которых $0 \leqslant i \leqslant c-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $p^n = cm+1$; $0 \leqslant s \leqslant m-1$; $0 \leqslant t \leqslant c-1$. Число решений s, t в уравнении (1) обозначается $(i, j)_{cm}$.

Показаны некоторые свойства функции $(i, j)_{cm}$.

Теорема 1. Если $b \not\equiv 0 \pmod c$, $d \not\equiv 0 \pmod c$, $c = c_1 m$, d принимает значения: d_1, $d_1 + m$, $d_1 + 2m, \ldots, d_1 + (c_1 - 1)m$, тогда

$$\sum_{i=0}^{m-1} (b, i)(b-a, i-d)_{cm} = \sum_{\substack{d \\ j=0,1,2,\ldots,c-1}} (d, j)_c (d-a, j-b)_c.$$

Соотношение выполняется также и при $b \not\equiv 0 \pmod c$, $d \equiv 0 \pmod c$, $a \not\equiv 0 \pmod c$.

Теорема 2 содержит равенства

$$(d, j)_c (d, j-b)_c = 0 \quad (d \not\equiv 0 \pmod m,\ c \not\equiv 0 \pmod c),$$

$$\sum_{j_{d_1}=0}^{c-1} (d_1, j)_c (d_1, j-b)_c = m^2 - m, \quad d_1 = m,$$

$$2m, \ldots, (c_1 - 1)m.$$

Уравнение (1) имеет связь с последней теоремой Ферма. П. Н. Реморов

2748. Число решений некоторых типов уравнений в конечном поле. Карлиц (The number of solutions of certain types of equations in a finite field. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 177—181 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y^m = f_1(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}) + \ldots + f_r(x_{r1}, \ldots, x_{rs_r}),$$

где f_i $(i = 1, \ldots, r)$ — однородный многочлен степени m_i от s_i переменных с коэффициентами из $GF(q)$, причем $(m, m_i, q-1) = 1$. Показывается, что число всех решений этого уравнения в поле $GF(q)$ равно $q^{s_1+\ldots+s_r}$. Указываются некоторые более общие уравнения, для числа решений которых имеют место аналогичные формулы.

Полученный результат применяется к уравнению $c_1x_1^{a_1} + \ldots + c_sx_s^{a_s} = 0$, рассматривавшемуся ранее Хуа и Вандивером (Hua L. K., Vandiver H. S., Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A., 1949, **35**, № 8, 481—487). З. И. Боревич

2749. Приводимые диофантовы уравнения и параметрическое представление их решений. Розенталл (Reducible diophantine equations and their parametric representations. Rosenthall E.), Canad J. Math., 1955, 7, № 3, 328—336 (англ.)

Дано дальнейшее развитие и обобщение прежних результатов автора (РЖМат, 1954, 2512), относящихся к решению в целых рациональных числах некоторых неопределенных уравнений «мультипликативного» вида:

$$\prod_{(k)} \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{p} [f_{ki}(x_{1ji}, \ldots, x_{kji})]^{a_{ijk}} = \prod_{(k)} \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{p} [h_{ki}(y_{1ji}, \ldots, y_{kji})]^{b_{ijk}},$$

где a_{ijk}, b_{ijk} — целые неотрицательные числа, а f_{ki}, h_{ki} — формы, разложимые в произведения k линейных сомножителей в том или ином поле. В качестве примера приложения алгоритма разобран случай уравнения, возникающего при решении в целых рациональных числах соотношения

$$N(a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3) = u^2 + v^2,$$

где $N(T)$ — норма алгебраического числа T, а θ — биквадратичная иррациональность. А. И. Попов

2750. О неопределенном уравнении $x^2 + l = y^3$. Лоран (Sur l'équation indéterminée $x^2 + l = y^3$. Lorent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 2—3, 72—76 (франц.)

«В Алгебре» Эйлера указан метод получения из одного рационального решения уравнения $a + bx + cx^2 + dx^3 = z^2$ другого. Сделана попытка этим методом получить все целые решения уравнения $x^2 + l = y^3$ по одному данному решению. Метод применен к случаю $l = 1, -1, 2, -3, 4$ и -15.

Примечание референта. Выводы автора ошибочны. В приведенных примерах пропущен ряд решений. Для $l=-1$, кроме решений (0, —1) и (1,0), есть еще (3,2). Для $l=-15$, кроме решения (4,1), есть еще (1138,109). Утверждение о независимости решений (2,2) и (11,5) уравнения $x^2+4=y^3$ ошибочно. Второе получается из первого по формулам удвоения.

В. Д Подсыпанин

2751. О неопределенном уравнении $x^2+l=y^3$ (второе сообщение). Лоран (Sur l'équation indéterminée $x^2+l=y^3$ (Seconde communication). Lorent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 5, 192—197 (франц.)

Описывается метод Эйлера получения новых рациональных решений уравнения по уже известному для случаев: $l=(n^2-1)/n^2$ и $l=(n^3-1)/n^3$. Имеется добавление, в котором утверждается, что при $l=25$ имеется только одно целое решение (10,5), а при $l=100$ только (30,10).

Примечание референта. Первое утверждение автора не обосновано, а второе — ошибочно, так как есть еще решения (5,5) и (198,34). В. Д. Подсыпанин

2752. Диофантово уравнение $\eta^2=\xi^3-D$. Заметка о методе Касселса. Сельмер (The diophantine equation $\eta^2=\xi^3-D$. A note on Cassels' method. Selmer Ernst S.), Math. scand., 1955, 3, № 1, 68—74 (англ.)

Исследуя решение в рациональных числах уравнения

$$\eta^2=\xi^3-D, \tag{1}$$

Касселс установил, что оно сводится к нахождению целых рациональных x и t и целого числа α из поля $R(\sqrt[3]{D})$, удовлетворяющих равенству

$$x-t^2\delta=\mu\alpha^2, \tag{2}$$

где $\delta=\sqrt[3]{D}$, а μ принимает несколько определенных значений из поля $R(\sqrt[3]{D})$ (Cassels J. W. S., Acta Math., 1950, 82, 243—273). Далее он получил некоторые сравнения, которым должно удовлетворять μ, чтобы (2) было бы разрешимым.

В работе разбирается случай $D=-2^4A^2$, так как в этом случае уравнение (1) эквивалентно уравнению $x^3+y^3=Az^3$, подробно исследованному автором в его диссертации (Acta Math., 1951, 85, 203—362) и решенному им для всех $A\leqslant 500$. Для этого случая упрощены необходимые условия разрешимости (2). Но доказательства этих упрощений автор обещает дать в другой работе. Далее, если обозначить через N число уравнений (2), удовлетворяющих необходимым условиям разрешимости, а через n — число фактически разрешимых, то $N=2^G$, а $n=2^g$. Очевидно, что $G\geqslant g$. Перечислены все случаи, когда $G>g$ при $A\leqslant 500$. Замечено, что в 12 случаях $G=2$, $g=0$ и в одном случае $G=3$, $g=1$. Кроме того, при $A=718$ также $G=3$ и $g=1$. На основе этих наблюдений выдвигается гипотеза: $G-g$ — четное число.

В. Д. Подсыпанин

2753. Об уравнении $x_1x_2\cdots x_n=t^k$. Шинцель А., Бюл. Польской АН, 1955, отд. 3, 3, № 1, 17—19

Об уравнении $x_1x_2\ldots x_n=t^k$. Шинцель (On the equation $x_1x_2\ldots x_n=t^k$. Schinzel A.), Bull. Acad. polon. sci., 1955, Cl. 3, 3, № 1, 17—19 (англ.)

Пусть n и k — заданные натуральные числа, и пусть

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{j,\,i}=k\quad(j=1,\,2,\ldots,\,3)$$

будут все разложения числа k в целые неотрицательные слагаемые (разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными; известно, что $s=\binom{n+k-1}{k}$. Тогда все решения в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ уравнения

$$x_1x_2\ldots x_n=t^k \tag{1}$$

имеют вид

$$x_i=a_1^{\beta_{1,\,i}}a_2^{\beta_{2,\,i}}\ldots a_s^{\beta_{s,\,i}}\ (i=1,\,2,\ldots,\,n),\ t=a_1a_2\ldots a_s,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_s$ являются любыми натуральными числами.

Упомянутая теорема является доказательством, а также обобщением формул, данных без доказательства Беллем (Bell E. T., Ann. Math., 1947, 48, 43) для частного случая $k=2$. Частный случай уравнения (1) для $n=2$ и $k=3$ решен другим путем В. Серпинским.

K. Zarankiewicz

2754. Проблема факторизации полиномов. Карлиц, Олсон (A problem in factorization of polynomials. Carlitz L., Olson F. R.), Math. scand., 1955, 3, № 1, 28—30 (англ.)

Пусть $f(x)$ — полином n-й степени с коэффициентами поля R рациональных чисел и неприводимый над R, $k\neq 0$ — рациональное число. Легко видеть, что

$$f(x+kf(x))=f(x)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — полином с рациональными коэффициентами. В случае $f(x)=x^3+px+q$ рассматриваются условия разложения $\varphi(x)$ на два кубических полинома. Именно, при $p=0$, $q=-4$ имеем при $k=-1/3$

$$-27f\left(x-\frac{1}{3}f(x)\right)=$$

$$=(x^3-4)(x^3+3x^2+3x-1)(x^3-3x^2-3x+11).$$

Если $f(x)=x^3-9/2$, то разложение возможно при бесконечно многих значениях k. При $q=-2$ нет разложения при любом k.

В. А. Голубев

2755. О числах Бернулли. Канеллос (On the Bernoulli's numbers. Kanellos S. G.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1954, 28, 101—106 (греч.; рез. англ.)

Способ автора для вычисления чисел Бернулли состоит в следующем: Пусть $\varphi_1(x)=1+(e^x-1)(x+2)/2x=(1/2)\sum_1^\infty nx^{n+1}/(n+2)!$ и пусть $\{\varphi_1(x)\}^k=\sum_1^\infty\alpha_{n,k}x^{2k+n-1}$. Расположим эти степенные ряды в виде треугольной таблицы так, чтобы $\{\varphi_1(x)\}^k$ образовало k-ю строку, и так, чтобы n-й столбец содержал $(n+1)$-е степени x. Получающаяся треугольная матрица коэффициентов может быть легко вычислена, так как k-я строка является просто k-й степенью (произведением Коши) первой строки. Пусть теперь k_{n+1} обозначает сумму элементов n-го столбца этой матрицы. Последовательность $\{k_n\}$ может быть тогда использована для вычисления чисел Бернулли при помощи рекуррентных формул: $k_2=-B_2/2!$, $k_{\rho-1/2}-k_\rho=B_\rho/\rho!$ $(\rho\geqslant 3)$.

T. M. Apostol

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 855.

2756. Числа Мерсенна и Ферма. Робинсон (Mersenne and Fermat numbers. Robinson Raphael M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 842—846 (англ.)

Обзор работ по изучению чисел Мерсенна (2^p-1, p — простое) и чисел Ферма ($2^{2^m}+1$). Содержатся указания на методику исследования чисел с помощью быстродействующих вычислительных машин СВАК. В настоящее время установлена простота чисел 2^p-1

для $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281$; и непростота чисел $2^{2^m}+1$ для $m = 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 73$. Библ. 13 назв. П. Н. Реморов

2757. О числах Мерсена и числах Пуле. Дюпарк (On Mersenne numbers and Poulet numbers. Duparc H. J. A.), Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953—001, 2 pp. (1953) (англ.)

Число Пуле (или псевдопростое число) определяется как составное число m, которое делит $2^m - 2$. В случае, когда каждый делитель d числа Пуле «N» делит $2^d - 2$, тогда «N» называется «сверхчислом» Пуле. Каждое составное число Мерсенна является «сверхчислом» Пуле. Последовательность m_n, определенная рекуррентным соотношением $m_{n+1} = 2^{m_n} - 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (где m_0 — простое) или полностью состоит из простых, или, может быть, для некоторого k, m_n является простым или числом Пуле соответственно, когда $n \leqslant k$ или когда $n > k$. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 933.

2758. Короткое доказательство свойства Уорда о рекуррентном ряде. Дюпарк (A short proof of a property of Ward on recurring series. Duparc H. J. A.), Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953—017, 2 pp. (1953) (англ.)

Теорема Уорда (Ward M., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1933, 19, 914—916) связана с последовательностями $\{u_n\}$ рациональных чисел, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению порядка N, с рациональными коэффициентами. Если особое решение таково, что $u_a = u_{a+b} = u_{a+2b} = \ldots = u_{a+Nb} \neq 0$, где a и b — фиксированные целые числа, и если характеристический полином $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел, то $f(x)$ является циклотомным полиномом, и каждое решение дифференциального уравнения — периодическое.

Автор обобщает теорему на случай, когда рациональное поле заменено круговым, удовлетворяющим некоторым условиям. W. Ledermann

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 17.

2759. Об элементарной теоретико-числовой функции. Луговский (Über eine elementare zahlentheoretische Funktion. Lugowski Herbert), Wiss. Z. Pädagog. Hochschule Potsdam Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, **1**, № 1, 73—74 (нем.)

Элементарно доказываются формулы

$$S(m) = m\varphi(m)/2 \; (m > 1), \; S_d(m) = ma_d(m)/2 \; (1 \leqslant d < m),$$

где $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, взаимно простых с m и не превышающих m, $S(m)$ — сумма этих чисел; $a_d(m)$ — число чисел x с условием $1 \leqslant x \leqslant m$, имеющих с m наибольший общий делитель d, $S_d(m)$ — сумма этих чисел. В. А. Голубев

2760. Распределение чисел, взаимно простых с n. Лемер (The distribution of totatives. Lehmer D. H.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 347—357 (англ.)

Рассматривается вопрос о распределении $\varphi(n)$ чисел $\tau \leqslant n$ и взаимно простых с n по интервалам вида

$$(nq/k, \; n(q+1)/k), \qquad (1)$$

где $q = 0, 1, \ldots, k-1$ и $n > k$; $\varphi(k, q, n)$ — число τ, принадлежащих q-му интервалу. Вводится функция

$$E(k, q, n) = \varphi(n) - k\varphi(k, q, n).$$

Равномерным распределением относительно k называется распределение чисел τ по интервалам (1) в случае, когда $E(k, q, n) = 0$ для всех значений q. Показывается, что равномерное распределение имеет место для любого $n > 2$ при $k = 2$; для $n = k^2 t$ и $n = pt$, где p — простое число формы $kx + 1$. В остальных «неисключительных» случаях дается оценка $E(k, q, n)$. При $k = 3, 4, 6$ выводятся явные формулы для $E(k, q, n)$.

Доказывается теорема: Если n является произведением различных простых чисел формы $kx - 1$ $(\varphi(k) > 2)$, то $E(k, 0, n) = E(k, k-1, n) = (1/2)(2-k)\mu(n)\theta(n)$ и $E(k, 1, n) = E(k, 2, n) = \ldots = E(k, k-2, n) = \mu(n)\theta(n)$, где $\mu(n)$ — функция Мебиуса, $\theta(n) = \sum_{d/n, \mu(d) \neq 0} 1$.

Отсюда следует, что для бесконечного множества k и n $E(k, 0, n) \neq 0$, при этом $E(k, 0, n) \neq o(\theta(n))$, когда $\theta(n) \to \infty$. Этим опровергается гипотеза Эрдеша.

Однако и для «неисключительных» случаев числа τ будут, в известном смысле, распределены равномерно по интервалам (1), что следует из теоремы:

$$|\varphi(k, q_1, n) - \varphi(k, q_2, n)| \leqslant \theta(n).$$

Теорема дает оценку $|E(k, q, n)| \leqslant (k-1)\theta(n)$. Предшествующие результаты находят себе применение для получения оценок снизу и сверху полинома деления круга

$$Q_n(x) = \Pi_\tau (x - \exp(2\pi i \tau / n))$$

при фиксированном x, а также при решении некоторых задач элементарной теории чисел. Б. М. Бредихин

2761. Применение периодических уравнений к разностным последовательностям. Лемер (Period equation applied to difference sets. Lehmer Emma), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 433—442 (англ.)

Рассматриваются последовательности чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \qquad (1)$$

состоящие из вычетов некоторого модуля v, где v — натуральное число. Последовательность (1) называется разностной последовательностью (модуля v) порядка k и кратности λ, если для некоторого $d \not\equiv 0 \pmod v$ сравнение $a_i - a_j \equiv d \pmod v$ имеет точно λ решений a_i, a_j $(a_i \neq a_j)$. Если для некоторого целого t существует целое число s такое, что числа последовательности $ta_1, ta_2, \ldots, ta_k$ сравнимы $(\mathrm{mod}\, v)$ с числами ряда $a_1 + s, a_2 + s, \ldots, a_k + s$, то t называется множителем разностной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Относительно разностной последовательности (1) порядка k и кратности λ известна теорема Холла и Райзера (Hall M., Ryser H. J., Canad. J. Math., 1951, 4, 495—502), согласно которой всякий простой делитель q числа $k - \lambda$ есть множитель последовательности (1), если только $q > \lambda$. Автор заметил, что для некоторых классов разностных последовательностей теорема верна для всех без исключения простых делителей числа $k - \lambda$. Именно рассматриваются разностные последовательности степенных вычетов (т. е. последовательности, составленные из вычетов n-й степени простого числа p). Автором доказано (Canad. J. Math., 1952, 5, 425—432), что совокупность всех множителей любой разностной последовательности степенных вычетов совпадает с самой этой последовательностью. Таким образом, для разностных последовательностей степенных вычетов доказательство того факта, что теорема Холла и Райзера верна для всех простых делителей $k - \lambda$, сводится к задаче: найти условия, при которых простые делители числа a являются вычетами степени n простого числа p. В этой связи доказываются теоремы:

1. Все делители числа вида $(p + z^2)/4$ являются квадратичными вычетами простого числа p вида $4m + 3$, если только z нечетно.

2. Если p — простое число вида $4A^2 + 27B^2$, то все делители $(p + B^2)/4$ являются кубическими вычетами p.

3. Если p — простое число вида x^2+4y^2, где y нечётно, то все делители $(3p+x^2)/16$ — квадратичные вычеты p.

4. Если p — простое число вида $9a^2+64y_1^2=a^2+2b^2\equiv 9 \pmod{16}$, то все делители $(7p+a^2)/64$ — вычеты 8-й степени p. Б. М. Уразбаев

2762. Об одном специальном определителе. Карлиц (A special determinant. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 270—272 (англ.)

Рассматривается определитель

$$\Delta_k=|R((r-s)^k)|,\ (r,s=0,1,\ldots,p-1;\ 1\leqslant k\leqslant p-1),$$

где p — простое число, а $R(r)$ — наименьший положительный вычет числа r по модулю p. Имеют место соотношения

$$p^{p-k}\mid\Delta_k,\ p^{p-k+1}\mid\Delta_k\quad(1\leqslant k<p-1),\qquad \Delta_{p-1}=p-1,$$

откуда видно, что $\Delta_k\neq 0$.

Примечание референта. В рассуждениях ошибка (стр. 271, 11 строка сверху). Результат правильный. Г. А. Фрейман

2763. О бесконечности множества простых чисел. Фёрстенберг (On the infinitude of primes. Furstenberg Harry), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 353 (англ.)

Дается доказательство теоремы Евклида о бесконечности количества простых чисел с помощью введения топологии в пространство целых чисел. В этой топологии арифметические прогрессии являются открытыми и одновременно замкнутыми множествами. Ю. В. Линник

2764. Обсуждение последней теоремы Ферма (Round table on Fermat's last theorem), Math. Mag., 1954, **28**, № 1, 49—50 (англ.)

Под таким заглавием появился отдел реферируемого журнала; целью отдела является широкое обсуждение проблемы Ферма. Публикуется письмо Гейманна и Элстона, в котором последняя теорема Ферма перефразируется в терминах теории вероятностей. П. Н. Реморов

2765. Относительно критериев делимости. I. Каса (Sobre los criterios de divisibilidad I. Casa Carlo Federici), Rev. mat. elementales, 1955, **3**, № 5, 75—80 (исп.)

Популярная статья, излагающая известные вопросы из теории сравнений. Э. Апарисио

2766. Основная теорема относительно числа N, записанного в системе счисления с основанием B. Ларссон (Un théorème fondamental concernant le nombre N écrit dans la base B. Larsson David F.), Mathesis, 1955, **64**, № 1—2, 20—22 (франц.)

Пусть $N=a_0B^n+a_1B^{n-1}+\ldots+a_n=(a_0a_1\ldots a_n)_B$ есть представление числа N в системе счисления с основанием B. Положим $\sigma_B^{(1)}(N)=a_0+a_1+\ldots+a_n$, $\sigma_B^{(k)}(N)=\sigma_B^{(1)}(\sigma_B^{(k-1)}(N))$ $(k=2,3,\ldots)$, так что, если, например, $B=10$ и $N=8359$, то $\sigma_{10}^{(1)}(N)=25$, $\sigma_{10}^{(2)}(N)=7$. Тогда если s — столь большое, что $0<\sigma_B^{(s)}(N)\leqslant B-1$, то $\sigma_B^{(s)}(N)$ является наименьшим положительным вычетом числа N по $\mod(B-1)$, если N не кратно $B-1$, и равно $B-1$, когда N делится на $B-1$. Э. Апарисио

2767. О записи чисел. Гунага (A propos de l'écriture des nombres. Goenaga M.), Mesures et contrôle industr., 1955, **20**, № 217, 432—434 (франц.)

Данлу-Дюмениль поставил вопрос о наиболее практичном и наглядном способе обозначения очень больших и очень малых чисел и предлагал для этого пользоваться характеристиками десятичных логарифмов. Автор предлагает ставить перед числами обозначения: k для 10^3, $M=10^6$, $G=10^9$, $T=10^{12}$, $m=10^{-3}$, $\mu=10^{-6}$, $n=10^{-9}$, $p=10^{-12}$. Например, 623500000 писать M 623,5 В. А. Голубев

2768 К. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Виноградов (The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Vinogradov I. M., Translated, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport. London and New York. Interscience Publishers, x + 180 pp., 5.00 doll.) (англ.)

Перевод монографии автора (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, **23**), с добавлениями, изменениями текста, с аннотациями.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 941.

2769 К. Основы теории чисел. Виноградов (Elements of number theory. Vinogradov I. M., Translated by S. Kravetz. New York, Dover Publications, Inc., 1954, VIII + 227 pp., cloth 3.00 doll.; paper 1.75 doll.) (англ.)

Перевод пятого издания книги автора «Основы теории чисел» (Гостехиздат, М., 1949).

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 933.

2770 К. Числа Фибоначчи. Воробьев (Die Fibonaccischen Zahlen. Worobjow N. N.), Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1954, 47 S. (нем.)

Перевод популярной брошюры автора «Числа Фибоначчи» (Гостехиздат, М., 1954).

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 933.

См. также: 2682 К, 3108, 3348

АЛГЕБРА

2771. Обобщение одного арифметического тождества Конфорто. Серре (Generalizzazione di un'identità aritmetica di Conforto. Segre Beniamino), Matematiche, 1954, **9**, № 2, 97—105 (итал.)

С помощью формулы Муавра выводятся формулы

$$\sum_1^r\left(2\cos\frac{2h\pi}{r}\right)^n=r\sum C_n^k,\ \sum_1^r\left(2\sin\frac{2h\pi}{r}\right)^n=$$
$$=r\sum(-1)^{k+[n/2]}C_n^k,$$

где суммирование проводится по значениям k, удовлетворяющим сравнению $2k\equiv n \pmod r$. Рассматриваются различные частные случаи. Так, при $r=8$, $n=2p+2$ из этих формул получается тождество Конфорто: $2^{p-1}(2^p-1)=C_{2p+2}^{p-1}+C_{2p+2}^{p-5}+\ldots$ (см. РЖМат, 1955, 3269) В. В. Морозов

2772. О методах построения ортогональных квадратных матриц некоторых порядков, составленных из целых чисел разной структуры (комплексных чисел, кватернионов, октанионов, седесимионов и др.). Богун-Чудинов (On methods of constructing orthogonal square matrices of every order composed of differing integers (also complex numbers, quaternions, octonions, sedecimions, etc.). Bohun-Chudyniv Volodymyr), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 8—9 (англ.)

Перечень работ и краткое описание результатов автора, посвященных проблеме Эйлера — построению ортогональных квадратных матриц порядка, большего 3. Даются общие методы построения матриц порядков 2^k, 2^k-1 и др., элементы которых представляют целые числа различной природы — комплексные числа, кватернионы, а также некоторые обобщенные символы, названные автором замкнутой системой ортогональных K-нионов (Bohun-Chudyniv, Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 6, 562). Б. М. Уразбаев

2773. Об общем методе построения вполне ортогональных $2^k \times 2^k$ квадратных матриц ($k \geqslant 1$) на базе использования замкнутых ортогональных систем K-нионов. Богун-Чудинов (On a general method for constructing completely orthogonal, $2^k \times 2^k$ squares ($k \geqslant 1$) by using closed orthogonal systems of K-nions. Bohun-Chudyniv Volodymyr), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 281—282 (англ.)

Перечень и краткое содержание работ автора, посвящённых известной проблеме Эйлера об ортогональных матрицах (см. предыдущий реферат). Б. М. Уразбаев

2774. Введение в алгебру. Кохендёрфер (Einführung in die Algebra. Kochendörffer Rudolf), Berlin. VEB Dtsgh. Verl. Wiss., 1955, XII, 316 S. (нем.)

Учебник современной алгебры (серия «Учебники по математике для высшей школы», издаваемая Треллем, Маруном и Риновым, № 18) для студентов высшей школы, впервые приступающих к изучению этой дисциплины. Основное внимание обращено на полное овладение изучающими основными алгебраическими понятиями, не обязательно в их полной общности. Подробное изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров и обязательных задач. Теория идеалов не затрагивается, так как ей будет посвящена специальная книга этой серии.

Оглавление: I. Основные понятия. 1) Множества, отображения, алгебраические строения. 2) Целые рациональные числа. 3) Группы. 4) Кольца. Области целостности. Поля 5) Многочлены.

II. Теория полей и алгебраических уравнений. 6) Расширения полей. 7) Конечные расширения полей. 8) Решение уравнений. 9) Нормы.

III. Модули. Алгебры. Представления. 10) Модули. 11) Алгебры. 12) Представления.

Теория уравнений (гл. 8) доведена до теоремы о решении уравнений в радикалах и о построениях циркулем и линейкой, теория норм (гл. 9) до теорем о распространении норм на конечные алгебраические расширения. В гл. 10 доказывается основная теорема об абелевых группах с конечным числом образующих и теорема о приведении матрицы к нормальной форме. Глава 11 в основном посвящена изучению полупростых алгебр. В последнем параграфе этой главы доказывается теорема Фробениуса. В гл. 12 помимо общей теории представлений полупростых алгебр подробно рассматриваются представления конечных групп.

В целом книга является прекрасным введением в современную алгебру, в котором вполне соблюдено необходимое равновесие между конкретным материалом и абстрактными понятиями. М. М. Постников

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2775. Еще раз о непрерывности действительных корней алгебраических уравнений. Исбелл (More on the continuity of the real roots of an algebraic equation. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 439 (англ.)

Теорема о кольцах непрерывных функций, доказанная Генриксеном и Исбеллом для нормальных топологических пространств (РЖМат, 1954, 4740), обобщается на вполне регулярные пространства. А. И. Узков

2776. Заметка об одной теореме Тодда. Швердтфегер (Note on a theorem by J. A. Todd. Schwerdtfeger H.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 83—84 (англ.)

Пусть R — числовое поле, $g(y)$ — многочлен над R, p — простое число, $f_m(x) = g(x^{p^m})$ $(m = 0,1,2,\ldots)$. Доказывается, что из неприводимости над R многочлена $f_{m_0}(x)$, где $m_0 \geqslant 3$ при $p = 2$ и $m_0 \geqslant 2$ при $p \neq 2$, следует неприводимость над R многочленов $f_m(x)$ для всех $m > m_0$. Для частного случая, когда R есть поле рациональных чисел, $p = 2$, $g(y) = y^2 + ay + 1$ и a — целое, этот факт был доказан Тоддом (Todd J. A., J. London Math. Soc., 1945, 20, 204—209). В. Б. Демьянов

2777. Формула для одного симметрического многочлена. Штёр (Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome. Stöhr Alfred), Acta scient. math., 1954, 15, № 3—4, 209—210 (нем.)

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — фиксированные целые неотрицательные числа, $D = |d_{ij}|$, $\Delta = |\delta_{ij}|$, $d_{ij} = x_i^{a_j}$, $\delta_{ij} = x_i^{j-1}$; $i, j = 1,2,\ldots,n$. Отношение D/Δ является симметрическим многочленом от $x_1, \ldots, x_n$. Находится его выражение через элементарные симметрические многочлены $\sigma_0 = 1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ от $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $m = \max\{1, a_n - n + 1\}$ и $b_1 < \ldots < b_m$ — целые неотрицательные числа, не превосходящие $n+m-1$ и не равные никакому из a_i. Тогда $D/\Delta = \Sigma' \operatorname{sgn}(c_1, \ldots, c_m)\, \sigma_{n+c_1-b_1} \cdots \sigma_{n+c_m-b_m}$, где Σ' означает суммирование по всем перестановкам $(c_1, \ldots, c_m)$ чисел $(0,1,\ldots m-1)$, удовлетворяющим условиям $0 \leqslant b_i - c_i \leqslant n$ $(i = 1, \ldots, m)$, а $\operatorname{sgn}(c_1, \ldots, c_m) = \pm 1$, в зависимости от того, является ли перестановка $(c_1, \ldots, c_m)$ четной или нечетной. В. Б. Демьянов

2778. Перестановочность матрицы со своей производной. Амато (Commutabilità del prodotto di una matrice per la sua derivata. Amato V.), Matematiche, 1954, 9, № 2, 176—179 (итал.)

На основе общего выражения для матрицы, перестановочной с данной, выписываются соотношения для элементов функциональной матрицы, перестановочной со своей производной. Новых результатов не содержится. Ф. Р. Гантмахер

2779. Заметки по теории матриц. IV (Неравенство Бергстрёма). Белман (Notes on matrix theory. IV (An inequality due to Bergström). Bellman Richard), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 172—173 (англ.)

Приводятся два доказательства следующего неравенства Бергстрёма:

$$\frac{|A+B|}{|A_{ii}+B_{ii}|} \geqslant \frac{|A|}{|A_{ii}|} + \frac{|B|}{|B_{ii}|},$$

где A и B — положительно определенные матрицы, а A_{ii} и B_{ii} получаются соответственно из A и B вычеркиванием i-х строк и столбцов. Ф. Р. Гантмахер

2780. Границы для отношений координат характеристических векторов матрицы. Брауэр (Bounds for the ratios of the coordinates of the characteristic vectors of a matrix. Brauer Alfred), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 3, 162—164 (англ.)

Пусть $A = (a_{\varkappa\lambda})$ произвольная $n \times n$-матрица и ω — ее характеристическое число, соответствующее соб-

ственному вектору $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть $|x_r|\geqslant \max|x_\nu|\,(\nu=1,\ldots,n;\ \nu\neq r)$ и $\sum_{\lambda=1(\lambda\neq\varkappa)}^{n}|a_{\varkappa\lambda}|=P_\varkappa$.

Теорема 1. Пусть R — круг $|z-a_{rr}|\leqslant P_r$ или замкнутая подобласть, содержащая число ω, и $d_\varkappa$ — наименьшее расстояние числа $a_{\varkappa\varkappa}$ от $R\,(\varkappa=1,\ldots,n)$. Полагаем $t_{r\varkappa}^{(\nu)}=1$, если $d_\varkappa=0\,(\nu=1,2\ldots)$ и $t_{r\varkappa}^{(1)}=\min(1,P_\varkappa/d_\varkappa)$, а

$$t_{r\varkappa}^{(\nu)}=\min\left\{1,\ \frac{1}{d_\varkappa}\left(|a_{\varkappa r}|+\sum_{\lambda=1(\lambda\neq\varkappa,r)}|a_{\varkappa\lambda}|\,t_{r\lambda}^{(\nu-1)}\right)\right\}$$

$(\nu=2,\ldots,n)$, если $d_\varkappa>0$. Тогда для каждого ν

$$|x_\varkappa|\leqslant t_{r\varkappa}^{(\nu)}|x_r|\quad(\varkappa=1,\ldots,n).$$

Теорема 2. Любое характеристическое число ω, для которого соответствующий собственный вектор имеет наибольшую по модулю r-ю координату, должно принадлежать пересечению области R с кругом $|\omega-a_{rr}|\leqslant\sum_{\lambda=1,\lambda\neq r}^{n}|a_{r\lambda}|\,t_{r\lambda}^{(\nu)}$. Если это пересечение пусто, то R не содержит такого характеристического числа. Утверждается, что теорема 2, исключая все большее и большее число областей, в некоторых случаях позволяет вычислить характеристические числа с любой требуемой точностью. Ф. Р. Гантмахер

2781. **Характеристические многочлены матриц AB и BA. Вильямсон** (The characteristic polynomials of AB and BA. Williamson J. H.), Edinburgh Math. Notes, 1954, № 39, 13 (англ.)

Простое доказательство совпадения характеристических многочленов матриц AB и BA (см. также РЖМат, 1953, 1072).

2782. **Об одном обобщении матричной теоремы А. Брауэра. Годдард** (An extension of a matrix theorem of A. Brauer. Goddard Laurence Stanley), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 22—23 (англ.)

Пусть столбцы $n\times r$-матрицы X, где $r\leqslant n$, являются собственными векторами $n\times n$-матрицы A при характеристических числах $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$. Тогда характеристические числа $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$, матрицы $\Lambda+K'X$, где K — произвольная $n\times r$-матрица, а $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, являются характеристическими числами и матрицы $\bar{A}=A+XK'$ при собственных векторах $X\sigma^{(1)},\ldots,X\sigma^{(r)}$, где столбцы $\sigma^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям $(A+K'X-\varepsilon_i I)\,\sigma^{(i)}=0\quad(i=1,\ldots,r)$.

Каждое характеристическое число матрицы A, отличное от $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, является характеристическим числом матрицы $\bar{A}$ и, наоборот, каждое характеристическое число матрицы $\bar{A}$, отличное от $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$, является характеристическим числом матрицы A. В этом предложении содержится как частный случай (при $r=1$) теорема Брауэра (Brauer A., Duke Math. J., 1952, 19, 75). Доказательства не приведены. Ф. Р. Гантмахер

2783. **О характеристических функциях произведения матриц. Годдард** (On the characteristic function of a matrix product. Goddard L. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 296—298 (англ.)

Дается простое доказательство теоремы Рота (РЖМат, 1955, 3070); кроме того, доказывается теорема: Пусть A_1, A_2 и A_3 — такие $n\times n$-матрицы, что $|xE-A_i|=a_{0i}(x^3)+xa_{1i}(x^3)+x^2a_{2i}(x^3)$; $i=1,2,3$; и ранг матрицы $x(A_1+A_2+A_3)-A_1A_2-A_1A_3-A_2A_3$ не больше 1. Тогда $|xE-A_1A_2A_3|=a_{01}a_{02}a_{03}+x[a_{11}(a_{02}a_{23}+a_{03}a_{22})+a_{12}(a_{01}a_{23}+a_{03}a_{21})+a_{13}(a_{01}a_{22}+a_{02}a_{21})]+x^2a_{21}a_{22}a_{23}$, где $a_{ij}=a_{ij}(x)$. А. И. Ширшов

2784. **Всякое линейное преобразование есть сумма неособенных. Зелинский** (Every linear transformation is a sum of nonsingular ones. Zelinsky Daniel), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 627—630 (англ.)

Доказывается утверждение: Пусть M и N — два векторных пространства одинаковой размерности (не обязательно конечной) над некоторым телом и пусть α — некоторое линейное отображение пространства M в N. Тогда α представимо в виде суммы $\beta+\gamma$, где β и γ — изоморфные отображения пространства M на N; исключение составляет случай, когда M и N имеют размерность 1 над $GF(2)$ и α — единственное ненулевое линейное отображение пространства M в N.

В. А. Андрунакиевич

2785. **Еще о бесконечных матрицах. Керубино** (Ancora sulle matrici infinite. Cherubino Salvatore), Ann. Scuola norm. super Pisa, 1954, 8, № 1—2, 77—80 (итал.)

Автор повторяет доказательство детерминантного равенства своей предыдущей работы (РЖМат, 1955, 2113), показывая, что вопреки утверждению рецензии в Math. Revs (1953, 14, № 11, 1095), для справедливости равенства нет необходимости в абсолютной сходимости рядов, являющихся элементами матрицы $AB=C$.

Л. М. Глускин

2786. **О монотонных системах линейных неравенств. Коллац** (Über monotone Systeme linearer Ungleichungen. Collatz L.), J. reine und angew. Math., 1955, 194, № 1—4, 193—194 (нем.)

Квадратная матрица A n-го порядка с действительными элементами a_{jk} называется монотонной, если из неравенства $Ax\geqslant 0$ следует, что $x\geqslant 0$ (x — n-мерный вектор с действительными компонентами; знак $\geqslant 0$ при векторах означает, что этому неравенству удовлетворяют все компоненты векторов). Система линейных уравнений или неравенств: $Ax\geqslant b$, с монотонной матрицей A также называется монотонной. Если матрица A монотонна, то из неравенств $Ay\leqslant Ax\leqslant Az$ следует, что $y\leqslant x\leqslant z$. С неравенствами такого рода приходится встречаться при оценках приближенных решений краевых задач дифференциальных уравнений. В статье дается элементарное доказательство достаточности для монотонности матрицы следующих условий: 1) $a_{jk}<0$, $j\neq k$; 2) матрица не является распадающейся; 3) уравнение $Ax=b$ имеет положительное решение. Распадающейся автор называет матрицу, индексы элементов которой можно разбить на две такие группы $\rho_1,\ldots,\rho_m$; $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-m}$ $(1\leqslant m\leqslant n-1)$, что $a_{\rho_\nu\sigma_m}=0\,(\nu=1\ldots,m;\ \mu=1,\ldots,n-m)$. Если в 3) потребовать существования решения при строго положительном векторе b, то условие 2) можно опустить.

А. Г. Школьник

2787. **О расположении точек матричного спектра. Котелянский Д. М.**, Укр. матем. ж., 1955, 7, № 2, 131—133

Доказывается теорема: Все характеристические числа матрицы $A=\|a_{ik}\|_1^n$ с элементами из поля комплексных чисел лежат в замкнутой области R, образованной n кругами с центрами в точках a_{ii} и радиусами, соответственно равными $\mu-|a_{ii}|$, где μ — максимальное характеристическое число матрицы A^+, элементами которой являются модули соответствующих элементов матрицы A. В качестве следствий теоремы приводятся следующие утверждения:

1. Если m кругов области R образуют связное множество H_m, а остальные круги лежат вне H_m, то области H_m принадлежат точно m характеристических корней матрицы A.

2. Если диагональные элементы матрицы A вещественны и отличны от нуля и если A имеет такое характеристическое число ω, что $|\omega| = \mu$, то $\omega = \pm\mu$.
Е. Г. Шульгейфер

2788. Унитарные кратные матрицы. Митчелл (Unitary multiples of a matrix. Mitchell B. E.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 9, 610—613 (англ.)

Даются простые доказательства ряда известных предложений, основанные на том, что для всякой комплексной матрицы A существует такая унитарная матрица U, что произведение $UA = T$ есть треугольная матрица некоторого специального вида. В. К. Иванов

2789. Составные матрицы. Молдон (Composite matrices. Mauldon J. G.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 80 (англ.)

Пусть R — коммутативное кольцо, S — коммутативное кольцо матриц порядка n над R, A — матрица порядка m над S. Матрице A естественно сопоставляется матрица a порядка mn над R. Положим: $|A| = \Delta \in S$, $|a| \in R$, $|\Delta| = \|A\| \in R$.

Существенно используя один результат Африата, автор доказывает, что $|a| = \|A\|$. Это равенство было ранее доказано Африатом для случая, когда R является алгебраически замкнутым полем. Д. А. Супруненко

2790. Заметка о теореме Рота. Паркер (A note on a theorem of Roth. Parker W. V.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 299—300 (англ.)

Доказывается следующее обобщение теоремы Рота (РЖМат, 1955, 3070):

Пусть A и B — $n \times n$-матрицы с элементами из поля F, с характеристическими многочленами $a_0(x^2) - xa_1(x^2)$ и $b_0(x^2) - xb_1(x^2)$, и пусть ранг матрицы $A - B$ не больше 1. Тогда характеристический многочлен матрицы $AB + k(A - B)$, $k \in F$ имеет вид $(-1)^n \{a_0(x)b_0(x) - xa_1(x)b_1(x) + k[a_0(x)b_1(x) - a_1(x) \times b_0(x)]\}$.
А. И. Ширшов

2791. О наилучше обусловленных матрицах. Форсайт, Страус (On best conditioned matrices. Forsythe George E., Straus Ernst G.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 102—103 (англ.)

Для положительно определенной эрмитовой $n \times n$-матрицы A вводится обозначение $P(A) = \Lambda/\lambda$, где Λ и λ — соответственно наибольшее и наименьшее характеристические числа матрицы A. Пусть $\mathfrak{T}$ — некоторый класс неособенных $n \times n$-матриц T. Матрица A называется наилучше обусловленной в отношении $\mathfrak{T}$, если $P(T^*AT) \geqslant P(A)$ для всех $T \in \mathfrak{T}$. Устанавливаются некоторые достаточные, а также необходимые условия для наилучшей обусловленности матрицы A относительно $\mathfrak{T}$.
Ф. Р. Гантмахер

2792. Классическая каноническая форма нильпотентной матрицы. Хузурбазар (The classical canonical form of a nilpotent matrix. Huzurbazar M. S.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 73—76 (англ.)

Описывается простой способ приведения нильпотентной матрицы к жордановой нормальной форме.
Д. А. Супруненко

2793. Дважды стохастические матрицы и комплексные векторные пространства. Шерман (Doubly stochastic matrices and complex vector spaces. Sherman S.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 2, 245—246 (англ.)

Матрица $P = \|p_{ij}\|$ называется дважды стохастической, если $p_{ij} \geqslant 0$ и $\Sigma_i p_{ij} = \Sigma_j p_{ij} = 1$ для всех i и j. Пусть x и y — два вектора в комплексном n-мерном пространстве. Доказывается, что если для любых комплексных чисел $c_1, \ldots, c_n$ точка $\Sigma_{i=1}^n c_i y_i$ лежит внутри выпуклой оболочки точек $\Sigma_{i=1}^n c_i x_{\alpha i}$, где x_i и y_i — координаты векторов x и y, а α пробегает всевозможные перестановки чисел $1, \ldots, n$, то найдется такая, дважды стохастическая матрица P, что $y = Px$. Правильность этого факта, как указывает автор, была предположена Хорном. (РЖМат, 1955, 3626). Ф. И. Карпелевич

2794 К. Теория уравнений с введением в теорию бинарных алгебраических форм. Бернсайд, Пактон (The theory of equations with an introduction to theory of binary algebraic forms. Burnside William Snow, Panton Arthur William. Vol. I, 10th ed., Dehli, S. Chand &Co., 1954, x + 223 pp., rupees 7/8/0) (англ.)

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 5.

ГРУППЫ

2795. О модулярных представлениях конечных групп, индуцируемых свободными группами. Гашюц (Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden. Gaschütz Wolfgang), Math. Z., 1954, 60, № 3, 274—286 (нем.)

Исследуются модулярные представления конечной группы, получаемые путем представления этой группы в качестве факторгруппы свободной группы. Полученные результаты сформулированы в терминах теории модулей, а не теории матриц, ввиду отсутствия надобности в вычислениях с характерами.

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечная группа и $\mathfrak{W}$ — такая группа, что существует гомоморфизм ω группы $\mathfrak{W}$ на группу $\mathfrak{g}$. Тогда пара $(\mathfrak{W}, \omega)$ называется $\mathfrak{g}$-расширением.

Пусть $(\mathfrak{F}, \varphi)$ — $\mathfrak{g}$-расширение со свободной группой $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{f}$ — его ядро. Для любого простого числа p обозначим через $\mathfrak{f}_p$ наименьший нормальный делитель группы $\mathfrak{f}$ (и, как легко видеть, группы $\mathfrak{F}$), фактор-группа $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ по которому является абелевой группой, все элементы которой имеют порядок p. Пусть $\mathfrak{F}^{(p)}$ и $\mathfrak{f}^{(p)}$ — образы групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{f}$ при естественном гомоморфизме $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}/\mathfrak{f}_p$. Доказано, что $\mathfrak{g}$-расширение $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ с точностью до изоморфизма зависит лишь от $\mathfrak{g}$, p, e, где e — число образующих группы $\mathfrak{F}$ (но не от φ).

Подробно изучается строение ядра этого $\mathfrak{g}$-расширения.
В. К. Туркин

2796. Заметка об алгебре S-функций. Данкан (Note on the algebra of S-functions. Duncan D. G.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 509—510 (англ.)

Пусть (μ) — разбиение натурального числа n на целые неотрицательные слагаемые, $\{\mu\}$ — S-функция, соответствующая разбиению (μ) (РЖМат, 1955, 2115). Доказана формула

$$\{\mu\} \otimes \{2k\} = (\{\mu\} \otimes \{2k-1\})(\{\mu\}) - (\{\mu\} \otimes \{2k-2\}) \times$$
$$\times (\{\mu\} \otimes \{2\}) + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2}(\{\mu\} \otimes \{k\})^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{(\beta)} \frac{1}{\beta_1! \ldots \beta_k!}\left(\frac{t_2}{1}\right)^{\beta_1} \ldots \left(\frac{t_{2k}}{k}\right)^{\beta_k}$$

(РЖМат, 1956, 216), где $(2k), (2k-1), \ldots (2)$ — разбиения, состоящие из единственного слагаемого, $t_i = \{\mu\} \otimes S_i$.
Л. М. Глускин

2797. О числе изоморфных классов неинвариантных подгрупп в конечной группе. Итo (On the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in a finite group. Itô Noboru), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 9—11 (англ.)

Пусть G — конечная группа, $r(G)$ — число всех классов неинвариантных подгрупп группы G, $t(G)$ — число различных простых делителей порядка группы G. Автор доказывает теорему: если группа G неразрешима и $r(G) < 2t(G) + 2$, то G изоморфна знакопеременной

группе 5-й степени. Из этой теоремы получается, как частный случай, следующий результат Трофимова (РЖМат, 1955, 3080): $r(A_5) = 7$. С. П. Азлецкий

2798. Группы порядка p^rq^s с абелевыми подгруппами порядка p^r, содержащимися в центре. Йёт-линд (Some groups of order p^rq^s with Abelian subgroups of order p^r contained in the central. Götlind Erik), Arkiv mat., 1955, 3, № 2, 165—169 (англ.)

Абелева подгруппа порядка p^r с двумя образующими группы порядка p^rq^s, где p и q — простые числа, содержится в центре этой группы, если $p > q^s$ и $p \not\equiv 1 \pmod q$, когда порядки образующих различны, а также если $p > q^s$, $p^2 \not\equiv 1 \pmod q$ и порядки образующих одинаковы.

Следует заметить, что эта теорема непосредственно вытекает из второй теоремы Силова и известной теоремы о порядке автоморфизма абелевой p-группы (Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., 1933, стр. 93 и 116). В. К. Туркин

2799. Когомологии в группах абстрактных единиц. Кавада (Cohomology in abstract unit groups. Kawada Yukiyosi), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 12—15 (англ.)

Пусть Γ — конечная группа, $\Gamma(Z)$ — ее групповое кольцо над кольцом целых чисел Z. Γ-модуль $U = \Gamma(Z)/Zu$, где $u = \Sigma_{\sigma \in \Gamma} \sigma$, называется группой абстрактных единиц для группы Γ. Устанавливается несколько простых утверждений относительно групп когомологий $H^r(\Delta, U)$, где Δ — подгруппа группы Γ (r — любое целое). Доказана формула $H^r(\Delta, U) \cong H^r(\Delta, Q/Z)$ (Q — аддитивная группа рациональных чисел), для $r \geqslant 1$ ранее доказанная Д. К. Фаддеевым (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 3, 361—364). З. И. Боревич

2800. О группах когомологий конечной группы. Кобб (On the cohomology groups of a finite group. Cobbe Anne P.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 34—47 (англ.)

Известно, что если в G-модуле A возможно однозначное деление на порядок конечной группы G, то $H^n(G, A) = 0$. Доказываются различные частные случаи этой теоремы, а также ряд других известных утверждений о группах когомологий конечной группы. З. И. Боревич

2801. О решениях уравнения $x^d = 1$ в симметрической группе. Мозер, Уайман (On solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups. Moser Leo, Wyman Max), Canad. J. Math., 1955, 7, № 2, 159—168 (англ.)

Обобщаются и дополняются результаты, изложенные ранее в работах Ховла, Херстейна, Мура (Canad. J. Math., 1951, 3, 328—334) и Ховла, Херстейна, Скотта (РЖМат, 1954, 2565). Пусть $A_{n,d}$ — число решений уравнения $x^d = 1$ в симметрической группе степени n; $B_{n,d}$ — число решений того же уравнения в знакопеременной группе степени n; $T_n = A_{n,2}$. Доказывается формула

$$T_n = \frac{H_n(i/2^{\frac{1}{2}})}{i^n 2^{\frac{1}{2}n}},$$

где $i^2 = -1$, а H_n — многочлен Эрмита. Отсюда вытекает следующее асимптотическое выражение для T_n:

$$T_n \sim \frac{(n/e)^{\frac{1}{2}n} e^{n^{\frac{1}{2}}/2}}{2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \frac{7}{24n^{\frac{1}{2}}} + \ldots\right),$$

а также соотношения:

$$\alpha_{n-1} \leqslant T_n/T_{n-1} \leqslant \alpha_n,$$

где α_n — положительный корень уравнения $x^2 - x - n = 0$, и $T_n/T_{n-1} = n^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}n^{-\frac{1}{2}} + \ldots$

Для простого p и $d \neq p$ имеют место сравнения:

$$A_{p,d} \equiv 1 \pmod p, \quad A_{p,p} \equiv 0 \pmod p.$$

Ввиду того, что $A_{p,p} = (p-1)! + 1$ эти сравнения можно рассматривать как обобщение теоремы Вильсона.

Следует отметить также сравнение $T_{n+m} \equiv T_n T_m \pmod m$.

Для знакопеременной группы найдены следующие соотношения, где $W_n = 2B_{n,2} - T_n$:

$$W_n = W_{n-1} - (n-1)\,W_{n-2}, \quad W_0 = W_1 = 1;$$

$$W_n = \frac{H_n(1/\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^n}, \quad B_{n,2} = n!\,\Sigma_{k=0}^{[n/4]} 1/\{4^k (2k)!\,(n-4k)!\};$$

$$W_n \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{1/2n} 2^{1/2} e^{1/4} \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}n\pi\right\};$$

$$W_{n+m} \equiv W_n W_m \pmod m; \quad B_{p,d} \equiv 1 \pmod p, \quad d \neq p, \quad B_{p,p} = A_{p,p}.$$

Кроме приведенного выше асимптотического выражения числа T_n, средствами теории аналитических функций получено другое, менее точное. Преимущество примененного при этом метода сравнительно с методом, основанным на использовании свойств многочленов Эрмита, авторы видят в возможности получить с его помощью асимптотическое выражение не только числа $T_n = A_{n,2}$, но и числа $A_{n,d}$. А. Н. Прокофьев

2802. Простая группа, имеющая не кратно транзитивное представление. Паркер (A simple group having no multiply transitive representation. Parker E. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 606—611 (англ.)

Рассматривается множество векторов размерности 4 над полем $GF(2^2)$, у которых или строго две, или все четыре координаты отличны от нуля, и группа G таких квадратных матриц четвертой степени над тем же полем с равным единице определителем, которые переставляют указанные векторы. Порядок группы Q равен $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Она проста и транзитивна (Carmichael R. D., Introduction to the theory of groups of finite order, Ginn, New York, 1937, 285).

Доказывается, что группа G изоморфна не кратно транзитивной группе подстановок. Г. Н. Нефедьев

2803. Конечные группы с единственной собственной характеристической подгруппой. I. Тонт (Finite groups having unique proper characteristic subgroups. I. Taunt D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 25—36 (англ.)

Конечная группа с единственной собственной характеристической подгруппой сокращенно называется *UCS*-группой. Рассмотрены некоторые условия, при которых прямое произведение изоморфных *UCS*-групп будет снова *UCS*-группой.

Теорема 2.1. Пусть G — *UCS*-группа с единственной собственной характеристической подгруппой N, удовлетворяющей следующим двум условиям: 1) G не содержит отличных от единицы элементов, инвариантных относительно всех автоморфизмов группы G, 2) фактор-группа G/N не содержит отличных от N/N элементов, инвариантных относительно всех автоморфизмов фактор-группы G/N, индуцируемых ав-

томорфизмами группы G. Тогда прямое произведение конечного числа групп, изоморфных группе G, будет *UCS*-группой.

Теорема 6.1. Пусть G — *UCS*-группа порядка $p^r q^s$, где p, q — различные простые числа, с единственной характеристической подгруппой N порядка p^r. Тогда прямое произведение групп, изоморфных G, будет *UCS*-группой, исключая, быть может, случай $s = 1$ и $q \mid p - 1$.

Приведены еще некоторые свойства *UCS*-групп порядка $p^r q^s$. Рассмотрен также вопрос о числе неизоморфных *UCS*-групп порядка $p^r q$ и об их представлении через образующие. П. Г. Конторович

2804. К теории гомологий для конечных групп операторов. Фаддеев Д. К., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 3, 193—200

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа, a — абелева $\mathfrak{G}$-операторная группа в аддитивной записи. $H^n(\mathfrak{G}, a)$ — n-я группа гомологий (Курош А. Г., Теория групп, М., ГИТТЛ, 1953, стр. 318). $\mathfrak{H}$ — подгруппа $\mathfrak{G}$ порядка h и индекса k. b-цепью автор называет цепь f, удовлетворяющую при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{H}$ условиям

$$f(yx_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i y, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, yx_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, y.$$

Те из b-цепей, которые являются циклами и соответственно границами, образуют группы $Z_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ и $B_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$; соответствующая фактор-группа $Z_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a) / B_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ обозначается через $H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ и называется n-й группой b-гомологий. Как отмечает автор, группы b-гомологий обобщают брауэровские системы факторов в теории алгебр (Ван дер Варден, Современная алгебра, т. 2, М., 1947, § 133).

В статье установлена связь между группами гомологий группы $\mathfrak{G}$ и ее подгруппы $\mathfrak{H}$ при $(h, k) = 1$. В этом случае группа $H^n(\mathfrak{G}, a)$ разлагается в прямую сумму своих подгрупп $H_e^n(\mathfrak{G}, a)$ и $H_i^n(\mathfrak{G}, a)$ так, что $kH_e^n(\mathfrak{G}, a) = hH_i^n(\mathfrak{G}, a) = 0$. Основная теорема статьи утверждает, что группа $H_i^n(\mathfrak{G}, a)$ изоморфна некоторому прямому слагаемому $H_0^n(\mathfrak{H}, a)$ группы $H^n(\mathfrak{H}, a)$, а группа $H_e^n(\mathfrak{G}, a)$ изоморфна группе $H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$.

Отсюда следует, что группа $H^n(\mathfrak{G}, a)$ изоморфна прямой сумме групп $H_0^n(\mathfrak{P}, a)$, где $\mathfrak{P}$ — силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$, взятые по одной для каждого простого делителя порядка группы $\mathfrak{G}$. Л. М. Глускин

2805. Диаграммы, связанные с симметрическими группами. Фрейм, Робинзон, Тролл (The hook graphs of the symmetric group. Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 316—324 (англ.)

Даются выражения для различных величин, связанных с неприводимыми представлениями симметрической группы через диаграммы Юнга, соответствующие этим представлениям. Например, степень неприводимого представления симметрической группы n-й степени, соответствующего разбиению числа n на слагаемые $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $\lambda_i \geqslant 0$; равна $\frac{n!}{H}$, где H определяется следующим образом. Обозначим через λ_j' число слагаемых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не меньших j, и положим $h_{ij} = 1 + \lambda_i - j + \lambda_j' - i$. Тогда H равно произведению всех чисел h_{ij}. И. Р. Шафаревич

2806. Проективные ортогональные и дробно-линейные представления простой группы порядка 360. Эдж (The projective orthogonal and linear fractional representations of the simple group of order 360. Edge William Leonard), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 213 (англ.)

Как известно, знакопеременная группа A_6 изоморфна группе $PO_2(4,3)$ проективных преобразований с определителем $+1$ пространства S_3 над полем $GF(3)$, оставляющих инвариантной квадрику $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Группа A_6 изоморфна также группе $LF(2,3^2)$ проективных преобразований пространства S_1 над полем $GF(3^2)$, определители которых являются квадратами элементов этого поля. Указывается (без доказательства) геометрическая интерпретация упомянутых изоморфизмов путем задания в S_3 и в S_1 совокупности из 6 объектов, переставляемых подстановками группы A_6. В. К. Туркин

2807. Сверхразрешимые группы. Бер (Supersoluble groups. Baer Reinhold), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 16—32 (англ.)

Изучаются группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами (сверхразрешимые группы). Конечные группы такого рода изучались еще Вендтом (Курош А. Г., Теория групп, Москва, 1953), который установил, в частности, нильпотентность их коммутанта. В реферируемой работе доказывается более общий результат, что коммутант произвольной сверхразрешимой группы является ZA-группой. Еще более общий результат можно найти в уже цитированной книге А. Г. Куроша (см. стр. 412—413).

Далее доказано, что все подгруппы сверхразрешимой группы с конечным числом образующих элементов имеют также конечное число образующих элементов. Отсюда выводится, что все элементы нечетного порядка сверхразрешимой группы с конечным числом образующих составляют конечную подгруппу, и что такая группа обладает характеристической ZA-подгруппой конечного индекса. В связи с последним утверждением в последнем параграфе устанавливаются некоторые характеристические свойства групп с условием максимальности, обладающих ZA-подгруппами конечного индекса. С. Н. Черников

2808. Об одном специальном изоморфизме структур. Курцио (Su di un particolare isomorfismo di struttura. Curzio Mario), Ricerche mat., 1953 (1954), **2**, 288—300 (итал.)

Пусть $L(G)$ — структура подгрупп некоторой группы G, а $S(G)$ — структура всех смежных классов по всем подгруппам группы G, упорядоченных по включению. Построен пример двух неизоморфных групп G и G', для которых структуры $S(G)$ и $S(G')$ изоморфны. Этим дано решение проблемы 42 Г. Биркгофа (Теория структур, Изд-во ин. лит., 1952). Однако существование обычного изоморфизма обеспечено, если G — циклическая группа, группа кватернионов или абелева группа типа $(1, 1, \ldots, 1)$. Если структуры $S(G)$ и $S(G')$ изоморфны, то существует изоморфизм ω структуры $S(G)$ на структуру $S(G')$, переводящий структуру $L(G)$ в структуру $L(G')$, причем мощности групп G и G' одинаковы. Если ω переводит нормальные подгруппы в нормальные подгруппы, то центры групп G и G' изоморфны. Рассмотрены также нормализаторы и т. п. Имеются досадные опечатки. Например, в первой строке § 1 вместо «$S(G)$ dei sottogruppi» следует читать «$S(G)$ dei laterali dei sottogruppi». P. M. Whitman

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 673.

2809. **Группы, допускающие покрытие перестановочными подмножествами. Нёйман** (Groups covered permutable subsets. Neumann B. H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 45 (англ.)

В заметке, помимо перечисления основных результатов, опубликованных ранее автором и Коном (РЖМат, 1955, 1112 и 1113), приводится без доказательства следующая теорема: Если группа G допускает покрытие перестановочными подмножествами, мощность каждого из которых строго меньше некоторого фиксированного (конечного или бесконечного) кардинального числа $\mathfrak{n}$, а порядок группы G строго больше $\mathfrak{n}$, то группа G содержит подгруппу с нетривиальным центром, порядок которой также строго больше $\mathfrak{n}$. О. Н. Головин

2810. **О пересечении свободных групп с конечным числом образующих. Хаусон** (On the intersection of finitely generated free groups. Howson A. G.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 428—434 (англ.)

Доказана теорема: Если U и V — две подгруппы свободной группы, имеющие соответственно m и n свободных образующих, то пересечение $U \cap V$ имеет не более $2mn - n - m + 1$ свободных образующих. Л. Е. Садовский

2811. **Замечание о нильпотентных группах с конечным числом образующих. Хигман** (A remark on finitely generated nilpotent groups. Higman Graham), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 284—285 (англ.)

Пусть G — нильпотентная группа с конечным числом образующих. Тогда пересечение подгрупп, порожденных p-ми степенями элементов группы G, конечно для любого бесконечного множества простых чисел p. Существует такое натуральное число n, что пересечение всех характеристических подгрупп группы G, индексы которых являются степенями различных простых чисел с показателями $\leqslant n$, совпадает с единичной подгруппой. В. М. Глушков

2812. **Об одной проблеме К. Куратовского и А. Мостовского. Эренфойхт А.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 10, 475—476

Об одной проблеме К. Куратовского и А. Мостовского в теории групп. Эренфойхт (On a certain problem of K. Kuratowski and A. Mostowski in theory of groups. Ehrenfeucht A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 10, 471—473 (англ.)

Решая проблему, поставленную К. Куратовским и А. Мостовским (Colloq. math., 1951, 2, 212), автор доказывает, что если гипотеза континуума справедлива, то аддитивная группа M целочисленных функций m, которые: 1) определены на подмножествах множества C целых чисел, 2) аддитивны, т. е. удовлетворяют условию $m(X_1 + X_2) = m(X_1) + m(X_2)$ для произвольных различных подмножеств X_1 и X_2 множества C, 3) равны нулю на пустом множестве, — изоморфна аддитивной группе всех целочисленных функций, определенных на подмножествах множества C.

Для доказательства автор устанавливает, что группа M изоморфна группе всех гомоморфизмов аддитивной группы P двусторонних ограниченных последовательностей целых чисел в группу C. Именно, оказывается, что любой гомоморфизм группы P в группу C имеет вид

$$F_m(\{x_i\}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j \cdot m(E_k\,[x_k = j]),$$

где $m \in M(\{x_i\} \in P)$. С другой стороны, из работы Шпэкера (Specker E., Portugaliae math., 1950, 9, 131) следует, что (при справедливости гипотезы континуума) группа P свободна и имеет мощность континуума. Таким образом, группа гомоморфизмов группы P в группу C изоморфна группе всех целочисленных функций, определенных на любом множестве континуальной мощности. A. Mostowski

2813. **Ассоциативная система квадратных матриц. Глускин Л. М.,** Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 17—20

Дается внутренняя характеристика ассоциативной системы G_n всех квадратных матриц n-го порядка над произвольным полем P. Идемпотент $e \neq 0$ ассоциативной системы G автор называет примитивным, если в G не существует такого идемпотента e' ($e' \neq e$, $e' \neq 0$), что $ee' e = e'$. Пусть 0 — нуль, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — попарно переместимые примитивные идемпотенты системы G. Доказано, что система G тогда и только тогда изоморфна системе G_n всех квадратных матриц порядка n над некоторым полем P с заданной мультипликативной группой, когда: 1) подсистема $e_1 G e_1 \subset G$ изоморфна мультипликативной системе поля P. Для каждого e_k существует такая пара элементов $x_k \in G e_k$, $x_k' \in G$, что $x_k x_k' = e_1$; 2) для каждого примитивного идемпотента e системы G существует такой элемент $z \in G$ ($z \neq 0$), что $ze = 0$; 3) каковы бы ни были n^2 элементов $x_{ik} \in e_i G e_k$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$), существует (и только один) такой элемент $x \in G$, что $e_i x e_k = x_{ik}$. Е. А. Халезов

2814. **О классификации полугрупп. Круазо** (Sur la classification des demi-groupes. Croisot Robert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 13—14 (франц.)

Без доказательства сформулированы импликации между некоторыми свойствами полугрупп. П. Г. Конторович

2815. **О характеристике групп их регулярными эквивалентностями. Тьеррен** (Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences régulières. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 20, 1954—1956 (франц.)

Эквивалентность R, определенная в полугруппе D, называется целой справа, если из $xa \equiv a^2 (R)$ следует, что $x \equiv a (R)$; эквивалентность R называется ограничительной справа, если из $ax \equiv bx \equiv a (R)$ следует, что $a \equiv b (R)$. Всякая регулярная эквивалентность (РЖМат, 1955, 1115), целая справа, является ограничительной справа. Если в полугруппе D все регулярные справа эквивалентности целы справа или ограничительны справа, то $D^2 = D$ и для каждого элемента x из D существует в D правая единица. Для того чтобы полугруппа D была группой, необходимо и достаточно, чтобы все ее регулярные справа эквивалентности были целыми справа, а все регулярные слева — целыми слева. Аналогичные критерии даны и в терминах ограничительных эквивалентностей. Л. М. Глускин

2816. **Об увеличительных элементах в теории полугрупп. Шварц Штефан,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 4, 697, 698

Элемент t полугруппы S называется слева (справа) увеличительным элементом, если существует такое собственное подмножество $M \subset S$, что имеет место равенство $Mt = S$ ($tM = S$). (Это понятие было введено Е. С. Ляпиным). В работе доказывается, что в бикомпактной хаусдорфовой полугруппе не может существовать никакой слева (справа) увеличительный элемент. П. Г. Конторович

2817. **О гомологической теории абелевых групп. Эйленберг, Маклейн** (On the homology theory of abelian groups. Eilenberg S., Maclane S.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 43—53 (англ.)

Пусть Π — свободная коммутативная ассоциативная система с базой $\{y_\alpha\}$, $I(\Pi)$ — кольцо многочленов от

переменных y_α с целыми коэффициентами. Рассматривая $I(\Pi)$ как градуированное дифференциальное кольцо с тривиальными градуировкой и дифференциалом, положим

$$A(\Pi, n) = B_N^{n-1} B(I(\Pi))$$

(РЖМат, 1953, 2907). Элементами кольца $A(\Pi, n)$ являются символы вида $[x_1|_{k_1} x_2|_{k_2} \dots |_{k_{r-1}} x_r]$, где $x_1, \dots, x_r \in I(\Pi)$, а $k_1, \dots, k_{r-1}$ — целые положительные числа. Элемент $[x_1|_{k_1} \dots |_{k_{r-1}} x_r]$ называется общим, если произведение $x_1, \dots, x_r$ является одночленом, не содержащим ни одной из переменных y_α более одного раза. В работе вычислены группы гомологий подкомплекса комплекса $A(\Pi, n)$, порожденного общими элементами. Вычислены также группы гомологий и других аналогичных комплексов. Попутно дано описание множества всех естественных гомоморфизмов итерированных тензорных произведений.

М. М. Постников

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2818. **Относительно теоремы о дифференте в полных полях с дискретной метрикой. Кинохара** (On the different theorem in complete fields with respect to a discrete valuation. Kinohara Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, A18, № 1, 9—12 (англ.)

Приведено новое доказательство известной теоремы: Дифферента конечного сепарабельного расширения K/k полного поля k с дискретной метрикой равна единичному идеалу тогда и только тогда, когда расширение K/k неразветвлено и поле классов вычетов поля K сепарабельно относительно поля классов вычетов поля k.

З. И. Боревич

2819. **О проблеме Шеваллея. Масуда** (On a problem of Chevalley. Masuda Katsuhiko), Nagoya Math. J., 1955, 8, February, 59—63 (англ.)

Пусть $K = k(x_1, \dots, x_n)$ — чисто трансцендентное расширение поля k (степени трансцендентности n); s — циклическая перестановка элементов x_i и L — подполе поля K, состоящее из элементов, инвариантных относительно s. Для случая, когда характеристика поля k не делит n, доказано, что 1) поле $L(\zeta)$ чисто трансцендентно над $k(\zeta)$, где ζ — первообразный корень n-ой степени из 1; 2) поле L чисто трансцендентно над k тогда и только тогда, когда в $L(\zeta)$ существуют такие элементы $a_1, \dots, a_t$, что $\Sigma_{i=1}^{t} (L(a_i) : L) = n$ и которые вместе со своими сопряженными над L образуют алгебраически независимую над $k(\zeta)$ систему образующих поля $L(\zeta)$; 3) при $n \leqslant 7$ поле L чисто трансцендентно над k.

З. И. Боревич

2820. **Типы колец разложения. Кантц** (Über den Typus eines Zerlegungsringes. Kantz Georg), Monatsh. Math., 1955, 59, № 2, 104—110 (нем.)

Область целостности с единицей ε, в которой каждый отличный от 0 и ε элемент однозначно разлагается в произведение простых элементов, называется кольцом разложения или Z-кольцом. Относительно таких колец доказываются следующие утверждения:

1. Z-кольцо, являющееся алгебраическим расширением кольца главных идеалов, т. е. главным порядком некоторого алгебраического расширения поля отношений кольца главных идеалов, будет кольцом главных идеалов.

2. Каждое Z-кольцо является либо кольцом главных идеалов, либо, вообще говоря, многократным трансцендентным расширением кольца главных идеалов.

3. Для того чтобы область целостности I с единицей была Z-кольцом, необходимо и достаточно, чтобы на I можно было определить функцию χ, принимающую целочисленные значения и удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\chi(\alpha) > 0$ для $\alpha \neq 0$ и $\chi(0) = 0$; 2) $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$; 3) $\chi(\eta) = 1$ тогда и только тогда, когда η — делитель единицы; 4) для любых двух элементов α и β, ни один из которых не делится на другой, существуют такие элементы μ, ν, ρ, причем элемент ρ прост к элементу α, что $\mu\alpha + \nu\beta = \rho\gamma$ и $0 < \chi(\gamma) < \min[\chi(\alpha), \chi(\beta)]$ (элемент ρ прост к элементу α, если из $\alpha \mid \lambda\rho$ следует $\alpha \mid \lambda$).

Е. Г. Шульгейфер

2821. **Кольцо автоморфизмов простой алгебры. Каш** (Über den Automorphismenring einfacher Algebren. Kasch Friedrich), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 59—65 (нем.)

Пусть A — алгебра всех матриц порядка n над полем Z, и $\mathfrak{S}$ — группа всех ее автоморфизмов, оставляющих неподвижными элементы из Z. Если алгебру A рассматривать как векторное пространство над Z, то элементы из Z и $\mathfrak{S}$ будут линейными преобразованиями этого пространства. Групповое кольцо $\mathfrak{R} = [Z, \mathfrak{S}]$ автор называет кольцом автоморфизмов алгебры A. Из результатов одной из предыдущих работ автора (РЖМат, 1954, 2884) следует, что если рассматривать алгебру A как $\mathfrak{R}$-модуль, то при условии, что поле Z отлично от $GF(2)$, собственными допустимыми подмодулями $\mathfrak{R}$-модуля A будут лишь Z и $B = \{Zd_{ij}, Z(d_{ii} - d_{jj}\}$; $i, j = 1, \dots, n$; $i \neq j$, где d_{ij} — матричные единицы алгебры A; отмечается, что подмодуль B порождается также всеми коммутаторами $\{ab - ba\}$ алгебры A. $\mathfrak{R}$-модуль A разлагается в прямую сумму $A = Z \dotplus B$ тогда и только тогда, когда n не делится на характеристику p поля Z. При ограничении, что поле $Z \neq GF(2)$ и порядок n не делится на характеристику p поля Z, доказывается, что 1) $\mathfrak{R}$ индуцирует на B все линейные преобразования $(n^2 - 1)$-мерного пространства B над полем Z; 2) $\mathfrak{R}$ есть полупростая алгебра ранга $(n^2-1)^2+1$, разлагающаяся в прямую сумму поля Z и алгебры всех матриц порядка $(n^2 - 1)$ над Z. Отмечается, что вопрос о том, остается ли справедливым какое-либо из этих утверждений при более слабых ограничениях, остается открытым.

В заключение указывается, что вопрос об обобщении полученных результатов на произвольные простые алгебры конечного ранга над их центрами сводится к решению того же вопроса для тел. Приводится эскиз доказательства утверждения, что оба результата справедливы для тел обобщенных кватернионов, характеристика которых отлична от двух.

Е. Г. Шульгейфер

2822. **О кольцах с данным модулем. Редеи** (Über die Ringe mit gegebenem Modul. Rédei L.), Acta scient. math., 1954, 15, № 3—4, 251—254 (нем.)

Пусть M — левый модуль над кольцом R с единицей, в котором единица кольца R является тождественным оператором. Если M является аддитивным модулем некоторого кольца, то

$$\omega_i \omega_j = \sum e_{ij}^k \omega_k, \quad e_{ij} \in R. \tag{1}$$

Найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять «структурные константы» e_{ij}^k, чтобы формула (1) определяла в модуле M умножение, относительно которого этот модуль является R-операторным кольцом.

В. И. Шнейдмюллер

2823. **Право-альтернативные тела характеристики два. Сан-Суси** (Right alternative division rings of characteristic two. San Soucie R. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 291—296 (англ.)

Доказывается, что в право-альтернативном теле K (т. е. в теле, в котором справедливо соотношение

$(ab)\,b = ab^2$) характеристики 2 тогда и только тогда имеет место соотношение $a^2b = a\,(ab)$ (т. е. тело K — альтернативно), когда в K выполняется соотношение $a\,[(bc)\,b] = [(ab)\,c]\,b$. Приводится принадлежащий Бруку (Bruck), но не публиковавшийся ранее пример неальтернативного право-альтернативного тела характеристики 2. Л. А. Скорняков

2824. Каноническая система матриц над кольцом главных идеалов по mod m. Фуллер (A canonical set for matrices over a principal ideal ring modulo m. Fuller L. E.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 54—59 (англ.)

Пусть P — кольцо главных идеалов, и $m \in P$. Рассматриваются квадратные матрицы заданного порядка с элементами из кольца классов вычетов $P/\{m\}$. Две такие матрицы A и B называются ассоциированными слева, если существует матрица U с определителем, взаимно простым с $\{m\}$, для которой $UA = B$. Канонической системой кольца $P/\{m\}$ называется такая совокупность матриц над $P/\{m\}$, что в каждом из классов ассоциированных слева матриц содержится точно одна матрица из этой совокупности.

Пусть $\{p\}$ — простой идеал и k — целое число. Через $\overline{a}$ обозначается класс вычетов по mod $\{p^k\}$ элемента a, где $a \in P$. Через $\overline{d}\,(a)$ обозначается целое число $t\,(0 \leqslant t \leqslant k)$, для которого $(\{a\}, \{p^k\}) = \{p^t\}$. Если $d\,(\overline{a}) = k$, то $\overline{a} = \overline{0}$. Доказывается, что канонической системой кольца $P/\{p^k\}$ является совокупность всевозможных матриц, обладающих следующими свойствами: 1) $d\,(\overline{a}_{rs}) \geqslant d\,(\overline{a}_{rr})$ для всех r и s; 2) если $\overline{a}_{rr} \neq \overline{0}$, то $d\,(\overline{a}_{rs}) > d\,(\overline{a}_{rr})$ для всех $s > r$; 3) $\overline{a}_{rr} = \overline{p}^t$ для всех r, где $0 \leqslant t \leqslant k$; 4) если $d\,(\overline{a}_{rs}) \geqslant d\,(\overline{a}_{ss})$ для $r \neq s$, то $\overline{a}_{rs} = \overline{0}$; если же $d\,(\overline{a}_{ss}) > d\,(\overline{a}_{rs})$, то $\overline{a}_{rs}$ принадлежит к некоторой раз навсегда выбранной системе представителей по mod $\{\overline{a}_{ss}\}$. В общем случае, когда $m = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, где $\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}$ — простые идеалы, канонической системой кольца $P/\{m\}$ является совокупность всевозможных матриц, сравнимых по каждому из модулей $\{p_i^{k_i}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ с некоторой матрицей из канонической системы кольца $P/\{p_i^{k_i}\}$.

В. Б. Демьянов

2825. Доказательство леммы Брука и Клейфельда в случае кольца любой характеристики. Штёккер (Beweis eines Hilfssatzes von Bruck und Kleinfeld unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik. Stöcker Claus), Arch. Math., 1955, 6, № 4, 296—302 (нем.)

Если R — альтернативное кольцо без делителей нуля, порожденное элементами x, y, z, для которых $(xy)\,z - x\,(yz) \neq 0$, и C — центр R, то для некоторых $p, q, r \in C$, $p \neq 0$, имеет место равенство $px^2 - qx + r = 0$. Эта лемма доказывалась различными методами в общем случае и в случае характеристики два (Bruck R., Kleinfeld E., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 878—890; Kleinfeld E., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951, 37, 818—820). Предлагается доказательство этой леммы, пригодное для кольца R любой характеристики.

Л. А. Скорняков

2826. Структуры с аддитивным базисом. Конторович П. Г., Плоткин Б. И., Матем. сб., 1954, 35, № 1, 187—192

Если каждый элемент некоторой полной структуры S может быть представлен в виде суммы некоторого подмножества системы $U = \{u_1, \ldots, u_\alpha, \ldots, u_\beta, \ldots\}$ фиксированных элементов S, то эта система называется аддитивным базисом для S. Каждому элементу $a \in S$ сопоставляется множество $U\,(a)$ всех элементов аддитивного базиса, меньших или равных a. Тогда $\Sigma u_\alpha = a$ $(u_\alpha \in U\,(a))$. Элемент a называется U-изолированным в S, если для всякого $u \in U$ либо $au = 0$, либо $au = u$. Элемент a называется изолированным в элементе b, если a содержится в b и изолирован относительно $U\,(b)$. Структура без собственных изолированных элементов называется плотной.

На аддитивный базис могут быть наложены следующие ограничения (условия локальности):

L_1) Всякий элемент аддитивного базиса, содержащийся в сумме некоторого множества V из U, содержится в сумме конечного числа элементов из V.

L_2) Любая пара элементов из U с отличным от нуля пересечением содержится в некотором третьем элементе из U.

L_2') Любая пара элементов из U содержится в некотором третьем элементе из U.

Структура с аддитивным базисом, удовлетворяющим условию L_2'), оказывается плотной. Пересечение всех изолированных элементов, содержащих данный элемент a, называется его изолятором $I\,(a)$.

Если аддитивный базис U удовлетворяет условиям L_1) и L_2), то изолятор любого элемента $u_0 \in U$ равен сумме всех элементов U, содержащих u_0, и изоляторы любых элементов U или совпадают или пересекаются по нулю.

При данном аддитивном базисе U система элементов $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ из S называется базисом покрытия (покрытием), если для любого $u \in U$ найдется такой $v \in V$, что $u \leqslant v$. Базис покрытия называется базисом расщепления, если для каждой пары v_α, v_β $(\alpha \neq \beta)$ его элементов $v_\alpha v_\beta = 0$. Элемент $a \in S$, содержащийся в каком-либо $v \in V$, называется V-нерасщепляемым. Элемент называется нерасщепляемым, если он нерасщепляем относительно любого базиса расщепления (при фиксированном аддитивном базисе U).

Во всякой расщепляемой (с базисом расщепления) структуре существует неприводимый (с уже нерасщепляемыми элементами) базис расщепления.

Если аддитивный базис структуры S удовлетворяет условиям L_1) и L_2), то S расщепляема. Неприводимым базисом расщепления оказывается система изоляторов компонент аддитивного базиса.

Сумма любого множества дедекиндовых элементов аддитивного базиса U (с условием L_1)) структуры является дедекиндовым элементом. Поэтому структура оказывается дедекиндовой, если она обладает дедекиндовым аддитивным базисом (с условием L_1)). Изолированный дедекиндов элемент a структуры S тогда и только тогда будет максимальным изолированным элементом, если все элементы, следующие за a в S, образуют плотную подструктуру $1/a$.

S называется R-структурой, если она имеет аддитивный базис $\widetilde{U}$, удовлетворяющий условиям L_1), L_2) и если, кроме того, а) $\widetilde{U}$ состоит из всех элементов $u \in S$, для которых подструктура $u/0$ дистрибутивна; б) все структуры $u/0$ бесконечны. Структура $S\,(G)$ группы G тогда и только тогда оказывается R-структурой, когда G есть R-группа.

Элемент $u \in U$ называется d-центральным, если он является дедекиндовым и для любого $u_\alpha \in U$ структура $u + u_\alpha/0$ дедекиндова. Сумма всех d-центральных элементов аддитивного базиса называется d-центром структуры. d-центр структуры $S\,(G)$ (будучи дедекиндовым элементом) совпадает с центром группы G (если она без кручения), ибо согласно одной теореме Ивасава

группа без кручения с дедекиндовой структурой подгрупп абелева.

Ряд $0 < Z_1 < \cdots < Z_{n-1} < Z_n < 1$ называется d-центральными, если Z_{i+1} есть d-центр структуры $1/Z_i$. Доказано, что

1. Структура $S(G)$ тогда и только тогда является d-центральной R-структурой, когда G — нильпотентная группа без кручения.

2. Если H — некоторая подгруппа локально-нильпотентной группы G без кручения, то следующие три условия эквивалентны: 1) H — изолированная инвариантная подгруппа; 2) H — изолированный дедекиндов элемент структуры $S(G)$ (с аддитивным базисом $\bar{U}$); 3) для любого элемента $x \in G$ подгруппа H является максимальной изолированной подгруппой группы $\{H, x\}$.

3. Группа, структурно изоморфная локально-нильпотентной группе без кручения, также является локально-нильпотентной группой без кручения.

Л. Е. Садовский

2827. Эффективность теории представлений булевых алгебр. Лось, Рыль-Нардзевский (Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras. Łoś J., Ryll-Nardzewski C.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 49—56 (англ.)

Рассматриваются следующие теоремы: (I) Каждая булева алгебра имеет по меньшей мере один простой идеал. (II) Каждый идеал булевой алгебры, образованной из множеств, можно расширить до простого идеала. (III) Произведение произвольного числа бикомпактных непустых хаусдорфовых пространств не пусто и бикомпактно.

Основным результатом работы является доказательство того, что эти три теоремы между собой эффективно эквивалентны, т. е. что эквивалентность их можно доказать без использования аксиомы выбора. При доказательстве показывается также, что теоремы (I)—(III) эффективно эквивалентны теореме (IV) о существовании согласованного выбора (Łoś J., Ryll — Nardzewski C., Fundam. math., 1951, 38, 233—237), а также следующей теореме (V), касающейся расширения меры: Если вещественная функция f, определенная на подмножестве A булевой алгебры B, обладает тем свойством, что для каждого конечного множества $X \subset B$ существует мера ν_X, определенная на алгебре, порожденной множеством X, принимающая значения из замкнутого множества W, содержащегося в отрезке $[0, 1]$, и удовлетворяющая равенству $\nu_X(a) = f(a)$ для всех $a \in A \cap X$, то существует также и мера μ, определенная на всей алгебре B, принимающая значения из W и удовлетворяющая равенству $\mu(a) = f(a)$ для всех $a \in A$.

Кроме того, из теоремы Тихонова о бикомпактных хаусдорфовых пространствах вытекает аксиома выбора для этих пространств.

Обозначая через (0) аксиому выбора, через (VI) теорему о существовании расширения произвольного частичного упорядочения до упорядочения, через (VII) принцип упорядочения и через (VIII) аксиому выбора для конечных множеств, авторы замечают, что без помощи аксиомы выбора можно доказать импликации (0) → (I) → (VI) → (VII) → (VIII) и ставят вопрос об обращении какой-либо из этих импликаций без помощи аксиомы выбора.

Авторы, не опираясь явно в своих рассуждениях на аксиомы теории множеств, замечают, однако, что все их рассуждения можно провести на основе аксиоматики Бернайса — Гёделя (см., например, Гёдель К., Успехи матем. наук, 1948; (III), 1, 96—149) при исключении из этой аксиоматики аксиомы выбора. A. Mostowski

2828. О σ-полных булевых алгебрах. Сикорский Р., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 1, 7—9

О σ-полных булевых алгебрах. Сикорский (On σ-complete Boolean algebras. Sikorski R.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, 3, № 1, 7—9 (англ.)

Работа посвящена вопросу Марчевского о том, можно ли выделить в классе всех σ-полных булевых алгебр B подкласс σ-полных булевых алгебр, изоморфных σ-телам множеств, посредством некоторой системы условий $\{W_i\}$, формулируемых на языке теории булевых алгебр и налагаемых на подмножества $Z \subset B$ мощности $\overline{\overline{Z}} \leqslant \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — фиксированное кардинальное число. При некотором ограничении на вид условий W_i и при естественном предположении, что условия W_i выполняются в σ-полных булевых алгебрах, изоморфных σ-телам множеств, на поставленный вопрос дается отрицательный ответ в виде следующей теоремы: Какова бы ни была система условий $\{W_i\}$ (рассматриваемого вида), существует σ-полная булева алгебра B, удовлетворяющая всем условиям W_i и неизоморфная σ-телу множеств. Для доказательства теоремы строится такая σ-полная булева алгебра B, неизоморфная σ-телу множеств, что для каждого ее подмножества Z мощности $\overline{\overline{Z}} \leqslant \mathfrak{m}$ минимальная подалгебра $B(Z)$ алгебры B, содержащая Z и содержащая сумму и произведение любого подмножества своих элементов (если только сумма и произведение этих элементов существует в B), изоморфна вполне аддитивному телу множеств.

В конце отмечается, что приведенные рассуждения остаются в силе, если σ-полноту заменить $\mathfrak{n}$-полнотой, где $\mathfrak{n}$ — произвольное бесконечное кардинальное число. Е. Г. Шульгейфер

2829. Медианы, структуры и деревья. Шолендер (Medians, lattices, and trees. Sholander Marlow), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, 808—812 (англ.)

Полуструктура определяется, как частично упорядоченное множество, в котором любая пара элементов a, b обладает точной нижней границей ab. Объединение элементов a, b (если оно существует) обозначается $a + b$. Говорят, что объединение $a + b$ сохраняется при умножении, если для любого элемента t полуструктуры существует объединение $ta + tb$, причем $t(a + b) = ta + tb$. Полуструктура называется дистрибутивной, если любая пара ее элементов вида ab, ac обладает объединением, которое сохраняется при умножении. Полуструктура с медианами (mediane semilattice) и дерево (Sholander M., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 369—381; 1954, 5, 801—807) являются частными случаями полуструктур.

Основные теоремы:

1. Полуструктура тогда и только тогда является полуструктурой с медианами, когда любая тройка ее элементов вида ab, bc, ca обладает объединением, которое сохраняется при умножении.

2. Полуструктура тогда и только тогда является деревом, когда среди любой тройки ее элементов вида ab, bc, ca по крайней мере два элемента равны между собой.

3. Полуструктура с медианами и дерево являются дистрибутивными полуструктурами.

4. Всякую дистрибутивную полуструктуру можно расширить до дистрибутивной структуры.

Указывается (без доказательства), что построенное в работе расширение минимально. М. Л. Берлинков

2830. Логарифмический порядок свободной дистрибутивной структуры. Ямамото (Logarithmic order of free distributive lattice. Yamamoto Koichi), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 3—4, 343—353 (англ.)

Приводится следующая оценка порядка $f(n)$ свободной дистрибутивной структуры $FD(n)$, порожденной n

символами:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^n n^{-\frac{1}{2}}(1+O(n^{-1}))<\log_2 f(n)<$$
$$<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^n n^{-\frac{1}{2}}\log_2\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\,(1+O(n^{-1})),$$

из которой следует, что

$$\log_2\log_2 f(n)=n-\frac{1}{2}\log_2 n+O(\log_2\log_2 n),$$

В статье содержится много опечаток, а при формулировке теоремы 1 (стр. 351), в которой указывается оценка сверху порядка $f(n)$, допущена неточность: вместо $(\ldots((\varepsilon+2)^{d_m}m-1+2)^{d_m}m-2+\cdots+2)^{d_0}+2$, напечатано

$$(\ldots((\varepsilon+2)^{d_m}m-2+2)^{d_m}m-3+\cdots+2)^{d_0}+2,$$

причем в таком виде теорема 1 просто неверна, например, для $n=4$. Поскольку в дальнейшем автор использует теорему 1, не замечая указанной неточности, доказательство основного результата нельзя признать убедительным. Е. Г. Шульгейфер

2831. Определяющие соотношения в свободно порождаемых алгебрах. Ловиг (Gesetzrelationen über frei erzeugten Algebren. Lowig H. F. J.), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 3/4, 129—142 (нем.)

Детальное рассмотрение свойств определяющих соотношений в свободно порождаемых универсальных алгебрах (в смысле Биркгофа). Все результаты формулируются с помощью большого числа специальных определений и обозначений, введенных в предыдущей работе автора (J. reine und angew. Math., 1952, **190**, 65—74). Б. И. Плоткин

См. также: 2716, 2721, 2746, 2748, 2754, 2760, 2837, 2840, 2853, 2858, 2863, 3153, 3254, 3255, 3256, 3273, 3279, 3303

ТОПОЛОГИЯ

2832. Некоторые свойства гипернормальных пространств. Исеки (Some properties of hypernormal spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 937—939 (англ.)

Изучаются введенные Хьюиттом гипернормальные топологические пространства, т. е. пространства, в которых всякие два отделимые по Хаусдорфу множества имеют окрестности с непересекающимися замыканиями. Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы хаусдорфово пространство X было гипернормальным: 1) любые два отделимые по Хаусдорфу множества отделимы функционально, 2) всякую ограниченную непрерывную функцию, заданную на некотором подмножестве пространства X, можно непрерывно продолжить на все X, 3) любые два отделимые по Хаусдорфу множества отделимы множествами нулей непрерывных функций. Пусть дано непрерывное отображение f некоторого замкнутого множества пространства Y в пространство X. Ханнеровское пространство (hannerisation) Z этого отображения (РЖМат, 1955, 5664) гипернормально, если гипернормальны и X, и Y. Наконец, гипернормальное пространство X тогда и только тогда является абсолютным (окрестностным) ретрактом относительно класса гипернормальных пространств, когда всякое непрерывное отображение f произвольного замкнутого множества B произвольного гипернормального пространства Y в X может быть непрерывно продолжено на все Y (на некоторую окрестность множества B).

Примечание референта. Условие 2 найдено Катетовым (Katětov M., Časop. pest. mat. fys., 1950, **75**, 69—78). Последний результат интересно сравнить с результатами Майкла (РЖМат, 1955, 5663). Ю. М. Смирнов

2833. Об одном классе топологических пространств. Ломджария Н., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 3—10 (рез. груз.)

Введено и исследуется понятие конечной компактности для топологических пространств. Систему множеств $\{A_\lambda\}$ пространства R автор называет конечно-компактной, если у каждой точки $x\in R$ имеется окрестность, пересекающаяся с некоторым A_λ по компактному в R множеству, а само пространство R — конечно-компактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать конечно-компактное открытое покрытие. Доказываются теоремы: 1. Если пространство R представимо в виде суммы компактных множеств, то оно конечно-компактно; 2. Всякое локально-компактное пространство конечно-компактно; 3. Существуют конечно-компактные, но не локально-компактные метрические пространства; 4. Существуют паракомпактные, но не конечно-компактные метрические пространства (например, множество иррациональных чисел); 5. Существуют конечно-компактные, но не паракомпактные пространства.

Примечание референта. В утверждение 1 вкралась какая-то ошибка: всякое множество представимо в виде суммы компактных множеств. Остальные утверждения верны, несмотря на приводимые в некоторых из них ссылки на теорему 1. Рассмотренное в доказательстве теоремы 5 пространство нерегулярно; отметим, что известное пространство всех порядковых чисел, меньших Ω, дает нам пример нормального, конечно-компактного, но не паракомпактного пространства. Ю. М. Смирнов

2834. Некоторые замечания об абстрактных пространствах. Курепа (Some remarks on abstract spaces. Kurepa G.), Bull. internat. Acad. yougosl. sci. et beaux-arts, 1954, № 12, 43—50 (англ.)

Доказываются следующие разнородные утверждения. 1. Для всякого изолированного множества $\{x_\lambda\}$ метрического пространства существует система попарно непересекающихся окрестностей Ox_λ. 2. Верхнюю грань мощностей всевозможных систем из попарно непересекающихся открытых множеств (соответственно изолированных подмножеств) топологического пространства R обозначим через sR (соответственно kR). В любом метрическом пространстве R (а также в любом упорядоченном множестве достижимой мощности, взятом с естественной топологией) $sR=kR$, причем существует система попарно непересекающихся открытых множеств мощности sR. 3. Асимптотическим диаметром d_aM множества $M\subseteq R$ автор называет нижнюю грань диаметров всех таких множеств $K\subseteq R$, у которых мощность пересечения $M\cap K$ больше мощности дополнения $M\setminus K$. Если $d_aM=0$, то либо M состоит из одной точки, либо его мощность конфинальна ω_0. Для всякого кардинального числа m, конфинального ω_0, существует метрическое пространство R_m мощности m и диаметра $d_aM=0$. Наконец, для всякого метри-

ческого пространства строится пополнение с помощью множеств нулевого асимптотического диаметра.
Ю. М. Смирнов

2835. О пространствах, имеющих слабую топологию относительно замкнутых покрытий. II. Морита (On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. II. Morita Kiiti), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 711—717 (англ.)

Весьма сложно доказывается, что всякое топологическое пространство, имеющее слабую топологию относительно замкнутого покрытия $\{A_\lambda\}$ (РЖМат, 1955, 3662), каждый элемент A_λ которого является нормальным и паракомпактным пространством, само является нормальным и паракомпактным. Ю. М. Смирнов

2836. О прекомпактных равномерных пространствах. Ньюнс (Sur les espaces uniformes précompacts. Newns W. F.), Portugaliae math., 1954, **13**, № 1—2, 33—34 (франц.)

Дается внутреннее определение прекомпактного равномерного пространства как равномерного пространства, в котором всякий ультрафильтр (максимальная система множеств, содержащая пересечение двух любых своих элементов) есть фильтр Коши (т. е. содержит множества любого порядка малости). Доказывается эквивалентность этого определения двум обычным определениям прекомпактного пространства (как пространства, пополнение которого бикомпактно, и пространства, которое может быть покрыто конечной системой множеств любого данного порядка малости).
А. С. Шварц

2837. О соотношениях между некоторыми внутренними топологиями в частично упорядоченных множествах. Уорд (On relations between certain intrinsic topologies in partially ordered sets. Ward A. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 2, 254—261 (англ.)

В частично упорядоченных множествах рассматриваются интервальная топология, (o)-топология (топология упорядоченности) и «идеальная» топология, введенная Фринком (РЖМат, 1955, 2583). Для того чтобы структура L была хаусдорфовой в интервальной топологии, необходимо и достаточно, чтобы сходимость фильтра в L относительно интервальной топологии совпадала с ($*$)-сходимостью. В любом частично упорядоченном множестве «идеальная» топология сильнее (в широком смысле) интервальной. Всякая булева алгебра — хаусдорфова в «идеальной» топологии. В булевых алгебрах «идеальная» топология может быть строго сильнее (o)-топологии. Возможен также и случай, когда эти топологии в булевой алгебре не сравнимы.
Б. З. Вулих

2838. Ненормальные регулярные разбиения нормальных пространств. Ганя (Partiţiuni regulate nenormale ale spaţiilor normale. Ganea Tudor), Comun. Acad. R. P. Române, 1955, **5**, № 1, 37—41 (рум.; рез. русс., франц.)

Краткое изложение предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 1186). Ю. М. Смирнов

2839. Теорема о монотонных отображениях. Косинский (A theorem on monotone mappings. Kosiński A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, **3**, № 2, 69—72 (англ.)

Теорема о монотонных отображениях. Косинский А., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 2, 69—72

Отображение f пространства X в Y автор называет сильно монотонным, если существует такое число $l > 0$, что для каждой точки $y \in f(X)$ множество $f^{-1}(y)$ является континуумом диаметра $\delta(f^{-1}(y)) \geqslant l$. Доказана следующая теорема. Пусть f — непрерывное, открытое сильно монотонное отображение компакта X в конечномерное пространство Y. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система $G_1, G_2, \ldots, G_k$ открытых множеств пространства X, что $\overline{G}_i \cap \overline{G}_j = 0$ при $i \neq j$; $\delta(G_i) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, k$, и $f(\bigcup_{i=1}^{k} G_i) = f(X)$.
J. W. Jaworowski

2840. Несколько теорем об ультрафильтрах. Мартич (Quelques théorèmes sur l'ultrafiltre. Martić Ljubo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, 9, № 2, 89—95 (франц.; рез. хорв.)

Наряду с фильтрами и ультрафильтрами подвергаются изучению в некотором смысле двойственные им понятия. Фильтром на множестве E называется всякая система φ непустых подмножеств множества E, удовлетворяющая условиям: а) если $A \in \varphi$ и $B \in \varphi$, то и $A \cap B \in \varphi$; б) если $A \in \varphi$ и $C \supseteq A$, то $C \in \varphi$. Таким образом, фильтры на E — это некоторые подмножества множества PE всех подмножеств множества E. Так как PE — частично упорядоченное множество, то в нем имеются идеалы i (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, 43). Следуя Шмидту (Schmidt J., Math. Nachr., 1952, **7**, № 6, 359—378; РЖМат, 1955, 5716), в PE можно выделить так называемые решетки γ (grille). Автор вводит еще один тип подмножеств множества PE, а именно разделитель σ (séparateur). Все эти типы подмножеств множества PE связаны между собой следующим образом посредством двух операций — операции дополнения C — complément — до PE, а также операции вычитания S — supplement — для каждого $\gamma \in PE$ множество S_γ состоит из дополнений $E \setminus \Gamma$ ко всем $\Gamma \in \gamma$:

$$\underset{\text{фильтр}}{\varphi} \leftarrow S \rightarrow \underset{\text{идеал}}{i} \leftarrow C \rightarrow \underset{\text{решетка}}{\gamma} \leftarrow S \rightarrow \underset{\text{разделитель}}{\sigma} \leftarrow C \rightarrow \underset{\text{фильтр}}{\varphi}.$$

Посредством этой связи даются некоторые характеристики ультрафильтров ультраидеалов, ультрарешеток и ультраразделителей, как максимальных систем, удовлетворяющих, соответственно, условиям фильтра, идеала и т. п. Ю. М. Смирнов

2841. О гомеоморфизме точечных множеств. Александров П. С., Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, **4**, 405—420

Подробное изложение краткой статьи (РЖМат, 1955, 4299). Основным результатом является теорема: для гомеоморфности множеств $A \subseteq E^n$ и $A' \subseteq E^{n'}$ необходимо и достаточно, чтобы существовал абстрактный спектр Σ, содержащий конфинальные части σ и σ', которые являются конфинальными частями геометрических спектров множеств A и A' соответственно в E^n и $E^{n'}$ (РЖМат, 1955, 4299). Автор полагает, что настоящая ее формулировка может быть значительно упрощена. Отметим одно, пропущенное предыдущим референтом, важное вспомогательное понятие открытого спектра топологического пространства R: это — направленное частично-упорядоченное множество нервов открытых звездно-конечных покрытий пространства R, взятое вместе с естественно определенными проекциями (порядок — сильный: $\beta > \alpha$, если система замыканий элементов покрытия β вписана в α). Оказывается, что всякое конечномерное нормальное пространство со счетной базой гомеоморфно пространству своего открытого спектра. Ю. М. Смирнов

2842. Исследования по топологии. III. Инагаки (Contribution à la topologie. III. Inagaki Takesh i), Math. J. Okayama, Univ., 1954, **4**, № 1, 79—96 (франц.)

Определяются борелевские множества различных классов в равномерном пространстве без ограничения пространствами, удовлетворяющими первой аксиоме счетности (см. также II часть работы; РЖМат, 1955,

5484) и измеримые по Борелю отображения одного равномерного пространства в другое различных классов. Ряд теорем, хорошо известных для метрических пространств, переносится на этот случай. А. С. Шварц

2843. **Непрерывные семейства разложимых континуумов на сферической поверхности. Дайер** (Continuous collections of decomposable continua on a spherical surface. Dyer Eldon), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 351—360 (англ.)

Доказывается ряд теорем о непрерывном разбиении континуума, лежащего на поверхности сферы в трехмерном евклидовом пространстве, на разложимые континуумы. Отметим некоторые из них.

Теорема 3. Пространство, порожденное непрерывным разбиением континуума, лежащего на сфере, на разложимые континуумы, есть непрерывная кривая.

Теорема 6. Пространство, порожденное непрерывным разбиением сферы на разложимые континуумы, есть дерево.

Теорема 8. Для всякого дерева существует такое непрерывное разбиение сферы на разложимые континуумы, что пространство, порожденное этим разбиением, гомеоморфно данному дереву. А. С. Пархоменко

2844. **Регулярные кривые и регулярные точки конечного порядка. Барретт** (Regular curves and regular points of finite order. Barrett Lida K.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 295—304 (англ.)

Доказаны теоремы: 1. Ни для какого целого $n>2$ не существует локально компактной непрерывной кривой M, каждые две точки которой являются концевыми точками ровно n дуг, не имеющих попарно других общих точек, кроме своих концов. 2. Каковы бы ни были целые числа m и n, удовлетворяющие условию $m\geqslant 2$ $n-2$, существует непрерывная кривая, состоящая только из точек порядка m и n. А. С. Пархоменко

2845. **Плоские пространства, для которых справедлива теорема Жордана. Слай** (Flat spaces for which the Jordan curve theorem holds true. Slye John Marshall), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 143—151 (англ.)

Принимая в качестве первоначальных понятий точки и области, автор формулирует с их помощью основные определения теоретико-множественной топологии («предельная точка», «граница», «связность», «компактность», «простая дуга», «простая замкнутая линия» и др.). Приводится система аксиом, которым должны удовлетворять введенные понятия точки и области. Пользуясь введенными определениями, автор доказывает «теорему Жордана». Приведен пример пространства, негомеоморфного плоскости, в котором выполняются все введенные автором аксиомы. Это пространство неметризуемо и содержит в качестве подмножества континуум, не имеющий счетной базы.

А. С. Пархоменко

2846. **Топологическая характеристика двумерных полиэдров. Косинский** (A topological characterization of 2-polytopes. Kosiński A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 7, 321—323 (англ.)

Топологическая характеристика двумерных полиэдров. Косинский А., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 7, 325—327

Даны (без доказательств) топологические условия, характеризующие все (компактные) двумерные полиэдры, и условия, характеризующие некоторые типы двумерных полиэдров (например, двумерные многообразия). Приведем наиболее существенный результат автора. Для того чтобы сепарабельное метрическое пространство K было гомеоморфно полиэдру размерности $\leqslant 2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) K есть абсолютный окрестностный ретракт (ANR); 2) существует такой граф (одномерный полиэдр) $B\subset K$, что каждая точка $p\in K\setminus B$ имеет окрестность, гомеоморфную плоскости; 3) существует такое конечное множество $Z\subset K$, что каждая точка $p\in K\setminus Z$ имеет произвольную малую окрестность U, для которой множество $S\cup(U\cap B)\setminus p$ связно, какова бы ни была компонента S множества $U\setminus B$. Из этой теоремы вытекает, в частности, что компактное пространство, каждая точка которого имеет двумерную полиэдральную окрестность, есть полиэдр. K. Borsuk

2847. **Покрытие трехмерного множества множествами меньшего диаметра. Эглстон** (Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. Eggleston H. G.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 11—24 (англ.)

Борсук (Borsuk, Fundam. math., 1933, 20, 177—190) высказал предположение, что каждое имеющее диаметр D подмножество n-мерного евклидова пространства можно разбить на $n+1$ множеств диаметра $<D$. Этот факт был установлен Хадвигером для случая, когда рассматриваемое множество может быть включено в выпуклое n-мерное тело с гладкой границей (Hadwiger, Comment. Math. helv., 1946—1947, 19, 72—73; Math. Z., 1947—1949, 51, 161—165). В реферируемой работе установлена справедливость предположения Борсука для $n=3$ (без всяких ограничений).

В. Г. Болтянский

2848. **О характеристике простых кривых в трехмерном пространстве. Харролд, Гриффит, Посзи** (A characterization of tame curves in three-space. Harrold O. G., Jr, Griffith H. C., Posey E. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 12—34 (англ.)

Подробное изложение опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1955, 2604). А. С. Пархоменко

2849. **Рациональные функции, гомотопные взаимно однозначным функциям на некотором подмножестве плоскости. Куратовский** (Fonctions rationnelles qui sont homotopes à des fonctions biunivoques sur certains sous-ensembles du plan. Kuratowski Kazimierz), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 107—121 (франц.)

Пусть S_2 — плоскость комплексных чисел (включая точку ∞), а P — ее подмножество, состоящее из всех чисел $z\neq 0,\infty$. Через P^A будем обозначать множество всех непрерывных отображений множества $A\subset S_2$ в P. Пусть $p_0, p_1,\ldots,p_n$—комплексные числа, а $k_0, k_1,\ldots,k_n$—такие не равные нулю целые числа, что $k_0+k_1+\cdots+k_n=0$. Положим

$$r(z)=(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}$$

$$\text{для } z\in S_2\setminus(p_0\cup\ldots\cup p_n), \tag{1}$$

где предполагается, что в случае $p_j=\infty$ множитель $(z-p_j)^{k_j}$ заменяется единицей.

Теорема 1 утверждает, что если множество A локально связно и разбивает сферу S_2 между каждой парой точек p_i, p_j $(i\neq j)$, то для того, чтобы функция r была гомотопна на A гомеоморфизму, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$|k_0|+|k_1|+\cdots+|k_n|\leqslant 2n. \tag{2}$$

Теорема 2 утверждает, что, обратно, если условие (2) выполнено, то существует такой континуум A, являющийся объединением n простых замкнутых кривых и разбивающий сферу S_2 между каждой парой точек p_i, p_j $(i\neq j)$, что функция r гомотопна на A гомеоморфизму. Единственное отличие теоремы 3 от теоремы 2 заключается в том, что множество A предполагается объединением n областей, гомеоморфных кру-

говому кольцу, а не объединением простых замкнутых кривых.

Теорема 4 утверждает, что если множество A содержит лишь конечное число компонент, то из существования гомотопии функции $f \in P^A$ в рациональную функцию на каждой из этих компонент вытекает существование гомотопии функции f в рациональную функцию на всем множестве A.

Статья содержит также несколько известных теорем, а также следствия теорем 1—4, в частности следствие 2: если A — открытое множество с конечным числом компонент и $f \in P^A$ — гомеоморфизм, то f гомотопен рациональной функции вида (1), удовлетворяющей условию (2). Это следствие неточно сформулировано в статье; именно, гомотопность гомеоморфизма f рациональной функции излишне включена в число условий. Аналогично, в доказательстве теоремы 1 излишне говорится о линейной связности множества Z. K. Borsuk

2850. Некоторые теоремы о худяковских аксиомах ориентации. Шварц (Some theorems on Hudekoff's axioms of orientation. Schwarz Gideon), Riveon lematematika, 1954, **7**, 13—22 (иврит.; рез. англ.)

Автор исследует реализуемость и независимость системы аксиом Н. Худякова (изложение статьи Худякова не помещено; см. в Матем.сб., 1930, **37**, 169—212).

Эти аксиомы имеют такое же отношение к понятию ориентации совокупности $n+1$ точек в n-мерном пространстве, как обычные аксиомы линейно-упорядоченных множеств к порядку на числовой прямой; действительно, аксиомы Худякова сводятся к последним в случае $n=1$. То, что ориентация в евклидовом пространстве есть модель, удовлетворяющая системе аксиом, доказывает реализуемость этой системы. Другие модели, которые удовлетворяют всем аксиомам, кроме какой-нибудь одной, доказывают независимость. M. Jerison

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 550.

2851. Симплициальные комплексы. Картан (Complexes simpliciaux. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. Ecole, norm. supér., 1948/1949 (1955), **1**, № 1, 1—6 (франц.)

Доклад об основных понятиях, относящихся к симплициальным комплексам (симплекс, симплициальный комплекс, барицентрическое подразделение). Отметим особо понятие «симплициального разбиения» хаусдорфова пространства E. Под этим понимается покрытие α, схема пересечений которого является локально конечным абстрактным симплициальным комплексом, причем для каждого элемента $\sigma \in \alpha$ задано гомеоморфное отображение некоторого евклидова симплекса T на σ; требуется, чтобы эти отображения $T \to \sigma$ были согласованы на гранях (в смысле барицентрических координат). Доказано, что при этих условиях пространство E гомеоморфно полиэдру. Доклад интересен как учебное пособие для лиц, изучающих комбинаторную топологию. Изложение сжатое. В. Г. Болтянский

2852. О вычислении вращения векторного поля на n-мерной сфере. Красносельский М. А., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 401—404

Пусть U — такое периодическое периода p гомеоморфное отображение сферы S^n на себя, что отображения $U, U^2, \ldots, U^{p-1}$ не имеют неподвижных точек; V — гомеоморфное отображение евклидова пространства R^{n+1} на себя, при котором $\|V_x\| = \|x\|$. Сравниваются непрерывные векторные поля Φ, Ψ без нулевых векторов, заданные на S^n и удовлетворяющие условиям:

$$\Phi Ux = V\Phi x, \quad \Psi Ux = V\Psi x \quad (x \in S^n).$$

Пусть γ_U степень отображения U, γ_V — степень отображения V, γ_Φ — вращение векторного поля Φ (т. е. степень отображения $\Phi x / \|\Phi x\|$ сферы S^n на себя), γ_Ψ — вращение поля Ψ.

Доказывается следующая теорема: $\gamma_\Phi \equiv \gamma_\Psi \pmod p$, если $\gamma_U \cdot \gamma_V = 1$, и $\gamma_\Phi = \gamma_\Psi$, если $\gamma_U \cdot \gamma_V = -1$. Из этой теоремы, используя некоторые известные приемы, легко получить 1) «теоремы об антиподах» Люстерника — Шнирельмана и Борсука, а также 2), теоремы 1,4 и 5 работы референта (РЖМат, 1955, 2608). Для 1) надо положить $U = V = -I$, $\Psi = I$ (I — тождественное отображение; 2) получается, когда U — инволюция без неподвижной точки $V = -I$, $\Psi = I - U$.

Изложена схема доказательства теоремы. Предположение, что отображения $U, U^2, \ldots, U^{p-1}$ не имеют неподвижных точек, может быть ослаблено для отображений U, обладающих некоторыми свойствами гладкости.

Примечание референта. Условие $\|V_x\| = \|x\|$, имеющее нетопологический характер, можно заменить условием $V\vartheta = \vartheta$, где ϑ — нулевая точка пространства R^{n+1}. А. И. Фет

2853. К применению прямых спектров бикомпактных групп в теории гомологий. Чогошвили Г. С., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 10, 655—662

Работа посвящена двум задачам: 1) определению так называемых гомологических групп расположения (в смысле референта, Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, **6**, 227—282) для произвольных множеств и 2) доказательству того, что спектрально сингулярные группы, введенные автором (Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 10, 583—588), в частности Δ-группы с бикомпактной областью коэффициентов, удовлетворяют аксиомам Стинрода — Эйленберга.

Группы расположения определяются следующим образом. Пусть M — произвольное множество, лежащее в нормальном локально бикомпактном пространстве R; через X обозначаем произвольную дискретную, через Θ — бикомпактную группу коэффициентов. Если X и Θ рассматриваются одновременно, то предполагается, что они двойственны между собою в смысле Понтрягина. Через F_α обозначаются замкнутые в R подмножества множества M, через G_α — окрестности множества M в R_1. Тогда определены гомоморфизмы: I_α^R — гомоморфизм высечения группы $\nabla^r(R, X)$ (в смысле референта — см. цитированную работу) в группу $\nabla^r(F_\alpha, X)$; E_R^α — гомоморфизм вложения (распространения) группы $\Delta^r(F_\alpha \Theta)$ в группу $\Delta^r(R, \Theta)$; гомоморфизм распространения $\mathcal{E}_R^\alpha$ группы $\nabla^r(G_\alpha, X)$ в группу $\nabla^r(R, X)$ и гомоморфизм высечения I_α^R группы $\Delta^r(R, \Theta)$ в группу $\Delta^r(G_\alpha, X)$ (в тексте работы опечатка; на стр. 656 говорится о гомоморфизме высечения $\Delta^r(G_\alpha, \Theta)$ в $\Delta^r(R, \Theta)$, тогда как, очевидно, гомоморфизм высечения отображает $\Delta^r(R, \Theta)$ в $\Delta^r(G_\alpha, \Theta)$). Эти гомоморфизмы определяют: фактор-группу $\nabla_I^r(F_\alpha, R; X) = \nabla^r(F_\alpha, X) - I_\alpha^R \nabla^r(R, X)$; ядро $\nabla_E^r(F_\alpha, R; \Theta) \subseteq \Delta^r(F_\alpha, \Theta)$ (гомоморфизма E_R^α); ядро $\nabla_E^r(G_\alpha, F; X) \subseteq \nabla^r(G_\alpha, X)$ и, наконец, фактор-группу $\Delta_I^r(G_\alpha, R; \Theta) = \Delta^r(G_\alpha, \Theta) - I_\alpha^R \Delta^r(R, \Theta)$. Полученные группы в свою очередь связаны гомоморфизмами высечения J_α^β группы $\nabla_I^r(F_\beta, R; X)$ в $\nabla_J^r(F_\alpha, R; X)$ при $F_\alpha \subset F_\beta$ и группы $\Delta^r(G_\alpha, \Theta)$ в $\Delta^r(G_\beta, \Theta)$ при $G_\beta \subset G_\alpha$, соответственно гомоморфизмами вложения E_β^α группы $\Delta_E^r(F_\alpha, R; \Theta)$ в $\Delta_E^r(F', R; \Theta)$

и $\nabla_E^r(G_\beta, R; X)$ в $\nabla_E^r(G_\alpha, R; X)$. Все это приводит к спектрам, а именно: к прямому спектру дискретных групп

$$\{\nabla_I^r(F_\alpha, R; X),\ I_\alpha^\beta\} \quad (1)$$

с предельной группой $\nabla_I^r(M, R; X)$; к прямому спектру бикомпактных групп

$$\{\Delta_E^r(F_\alpha, R; \Theta),\ E_\beta^\alpha\} \quad (2)$$

с предельной группой $\Delta_E^r(M, R; \Theta)$; к обратному спектру дискретных групп

$$\{\nabla_E^r(G_\alpha, R; X),\ E_\alpha^\beta\} \quad (3)$$

с предельной группой $\nabla_E^r(M, R; X)$ и к прямому спектру бикомпактных групп

$$\{\Delta_I^r(G_\alpha, R; \Theta),\ I_\beta^\alpha\} \quad (4)$$

с предельной группой $\Delta_I^r(M, R; \Theta)$. Обычными методами устанавливается сопряженность спектров (1) и (2), (3) и (4), ведущая к двойственности предельных групп.

Если M и N — два произвольных взаимнодополнительных множества в нормальном пространстве R, то имеются изоморфизмы

$$S_{\nabla\alpha} : \nabla_I^r(F_\alpha, R; X) \approx \nabla_E^{r+1}(G_\alpha, R; X),$$

$$S_{\Delta\alpha} : \Delta_E^r(F_\alpha, R; X) \approx \Delta_I^{r+1}(G_\alpha, R; \Theta),$$

причем выполняются соотношения $S_{\nabla\alpha} I_\alpha^\beta = E_\alpha^\beta S_{\nabla\beta}$ и $S_{\Delta\beta} E_\beta^\alpha = I_\beta^\alpha S_{\Delta\alpha}$.

Таким образом, достигается фундаментальный результат, разрешающий задачу расположения произвольных множеств и заключающийся в следующей таблице:

$$\begin{array}{ccc} \nabla_I^r(M, R; X) & = & \nabla_E^{r+1}(N, R; X) \\ \| & \times & \| \\ \Delta_E^r(M, R; \Theta) & = & \Delta_I^{r+1}(N, R; \Theta), \end{array}$$

где группы, стоящие на одной горизонтали, изоморфны, а группы, стоящие на одной вертикали, двойственны между собою, так же как и группы, стоящие на одной диагонали.

В частности, двойственность

$$\nabla_I^r(M, R; X) \| \Delta_I^{r+1}(N, R; \Theta)$$

представляет собою обобщение основного закона двойственности в теории расположений, построенной референтом. П. С. Александров

2854. Заметка о когомологических операциях. Накаока (Note on cohomological operations. Nakaoka Minoru), J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 1953, A4, 51—58 (англ.)

Дается аксиоматическая теория $\mathfrak{P}$-операций в конечных пополняемых клеточных комплексах. Доказывается существование таких операций и единственность получающихся на их основе квадратов Стинрода, Понтрягина, Постникова и умножения Александера — Колмогорова. Получена известная формула Картана для квадрата произведения (Cartan, C. r. Acad. sci., 1950, 230, 425—427) и соответствующие формулы для квадратов Понтрягина и Постникова. Пусть J_i — гомоморфизм

$$H^p(K, L; Z_{2k}) \to H^{2p-i}(K, L; Z),$$

где $p - i$ нечетно, определенный Симада и Уехара (Shimada, Uehara, Nagoya Math. J., 1952, 4, 43—50).

Автор показывает, что $J_i = \Delta Sq_{i+1}$, где

$$\Delta : H^{2p-i-1}(K, L; Z_2) \to H^{2p-i}(K, L; Z) —$$

гомоморфизм Бокштейна. P. J. Hilton

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 459.

2855. О послойной гомотопической эквивалентности косых произведений. Дольд (Über faserenweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen. Dold Albrecht), Math. Z., 1955, 62, № 2, 111—136 (нем.)

Два косых произведения $\mathfrak{B}_i = \{B_i,\ p_i,\ X,\ Y_i,\ G_i\}$, $i = 1, 2$, с одной и той же базой X называются послойно гомотопически эквивалентными, если существуют такие непрерывные отображения $p_1 : B_1 \to B_2$ и $p_2 : B_2 \to B_1$, что $p_2 \circ h_1 = p_1$, $p_1 \circ h_2 = p_2$, и отображения $h_1 \circ h_2$ и $h_2 \circ h_1$ могут быть продеформированы в тождественные с помощью деформаций, перемещающих каждую точку в ее слое. Доказывается, что для послойной гомотопической эквивалентности косых произведений $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы существовало отображение $h : B_1 \to B_2$ удовлетворяющее условию $p_2 \circ h = p_1$ и являющееся гомотопической эквивалентностью, если его рассматривать на одном фиксированном слое (база предполагается связным полиэдром, слой — локально компактным).

Пусть база $X = S^m$ есть m-мерная сфера, $T_i : S^{m-1} \to G_i$ — характеристические отображения косых произведений $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; $j_i : G_i \to \mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$ — естественное вложение структурной группы Y_i в пространство $\mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$ непрерывных отображений слоя Y_i в себя. Косые произведения $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ тогда и только тогда послойно гомотопически эквивалентны, когда существует такая гомотопическая эквивалентность $g : Y_1 \to Y_2$, что отображения $S^{m-1} \to \mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$, определяемые соответствиями $x \to j_2 T_2(x)$ и $x \to g \cdot (j_1 T_1(x)) \cdot g^-$, гомотопны ($g^- : Y_2 \to Y_1$ есть отображение, гомотопически обратное g). Отсюда следует, что число классов послойной гомотопической эквивалентности косых произведений с базой S^m и слоем Y не превосходит числа элементов группы $\pi_{m-1}\mathfrak{G}(Y, Y)$. Показывается, что число классов послойной гомотопической эквивалентности пучков n-мерных сфер над m-мерной сферой будет бесконечным лишь при выполнении условия $m \equiv 0$ (2), $n = m-1$ или условия $m \equiv 0$ (4), $n = m/2$. В случае $m \equiv 0$ (4) и $n > m/2$ (и только в этом случае) для каждого пучка существует бесконечное число послойно гомотопически эквивалентных ему, но попарно не эквивалентных пучков. А. С. Шварц

2856. О P-гомоморфизме гомотопических групп сфер. Хилтон (A note on the P-homomorphism in homotopy groups of spheres. Hilton P. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 230—233 (англ.)

Пусть $P : \pi_r(S^n) \to \pi_{r+n-1}(S^n)$ — гомоморфизм, определяемый формулой $P\alpha = [\alpha, j]$, где i — образующая группы $\pi_n(S^n)$, а η_n — образующая группы $\pi_{n+1}(S^n)$ ($n \geqslant 2$). Доказано, что если $2i \circ \beta = 0$, где $\beta \in \pi_r(S^{nk-1})$, то $P(\eta_{4k-2} \circ \beta) = 0$. Кроме того, если $\eta_{8k} \circ E^{4k+2}\beta \neq 0$, то $PE\beta \neq 0$. Отсюда легко следует, что $P\eta_{4k} \neq 0$, $P(\eta_{4k} \circ \eta_{4k+1}) \neq 0$, $P(\eta_{4k-2} \circ \eta_{4k-1}) = 0$. Первые две формулы для $k = 1, 2$ ранее доказаны автором и Уайтхедом (РЖМат, 1954, 5488). М. М. Постников

2857. О гомотопической классификации и о продолжении. Накаока (On homotopy classification and extension. Nakaoka Minoru), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 6—9 (англ.)

Автор, без доказательства, указывает полные выражения коцикла μ^{n+k+1} через коцикл λ^n в стационарном случае ($n \geqslant k+2$) для $k \leqslant 6$ (таким образом, новыми являются случаи $k = 4, 5, 6$). С этой целью он использует итерированные степени Стинрода и некоторые гомоморфизмы

$$\pi_n(Y) \otimes Z_p \to \pi_{n+k}(Y) \qquad (1)$$

и

$$(\pi_n(Y)) \to \pi_{n+k}(Y), \qquad (2)$$

которые определяются с помощью некоторых образующих гомотопических групп $\pi_{n+k}(R_n^k(0))$ и $\pi_{n+k}(R_n^k(P))$ соответственно.

Примечание референта. Существует, очевидно, общая формула, пригодная для всех k. Гомоморфизмы вида (1) и (2) могут быть определены с помощью известного гомоморфизма, $H_{n+k+1}(\pi_n(Y), n) \to \pi_{n+k}(Y)$, соответствующего инварианту Эйленберга — Маклейна (см. также Cartan, Serre, C. R. Acad. Sci., 1952, 234, 393—395) и служащего для явного вычисления стационарных групп Эйленберга — Маклейна $H_{n+k+1}(\pi, n)$, $n \geqslant k+2$. H. Cartan

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 733—734.

2858. **Когомологии, размерность и толпы. Уоллес** (Cohomology, dimension and mobs. Wallace A. D.), Summa Brasil. Math., 1953, **3**, 43—55 (англ.)

Под толпой автор подразумевает хаусдорфову полугруппу, т. е. хаусдорфово пространство с непрерывным ассоциативным умножением. Изучается структура компактных толп.

Основные результаты:

1. Пусть S — компактная толпа и P — множество элементов $a \in S$, удовлетворяющих соотношению $aS = S$. Обозначим через $G(e)$ максимальную подгруппу полугруппы S, имеющую в качестве единицы некоторую идемпотенту e. Тогда для произвольных $a \in P$ и $x, y \in S$ соотношение $ax = ay$ влечет за собой $x = y$; соотношение $ab \in P$ влечет за собой $a \in P$, $b \in P$ и, кроме того, P есть прямое произведение подтолпы ловых единиц S и подгруппы $G(e_0)$ некоторой левой единицы e_0.

2. Пусть S — компактная связная толпа с левой единицей; T — замкнутый идеал полугруппы S, а Q — замкнутое подмножество идеала T. Тогда естественный гомоморфизм $H^n(S, Q) \to H^n(T, Q)$ есть изоморфизм на для любого $n > 0$ (H^n есть n-мерная когомологическая группа). Если, к тому же, S имеет единицу и для некоторого $n > 0$ группа $H^n(S)$ по какой-нибудь группе коэффициентов нетривиальна, но $H_p(A) = 0$ для каждого замкнутого собственного подмножества $A \subset S$, то S есть группа.

В частности, компактное многообразие только тогда является толпой с единицей, когда оно представляет собой группу.

3. Пусть S — компактная связная толпа с единицей u, пусть A — такое замкнутое подмножество толпы S, что $G(u) A G(u) \subset C(u)$, и для некоторого $n > 0$ и некоторой группы коэффициентов существует элемент $h \in H^n(A)$, не продолжаемый в $H^n(S)$, но продолжаемый в $H^n(S_0 \cup A)$, для каждого собственного замкнутого подмножества $S_0 \subset S$. Тогда $G(u) \subset A$. Из этого следует, что если n-мерный шар является толпой с единицей u, то $G(u)$ содержится в граничной $(n-1)$-мерной сфере.

Употребляя обобщенное понятие размерности, автор получает несколько более точные результаты. В частности, даны условия для того, чтобы компактная подгруппа компактной связной толпы S совпадала с минимальным замкнутым идеалом толпы S. K. Iwasawa

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 336.

2859. **Новое доказательство теоремы П. А. Смита. Борель** (Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith. Borel Armand), Comment. math. helv., 1955, **29**, № 1, 27—39 (франц.)

Дается новое доказательство следующей теоремы Смита (РЖМат, 1955, 3929 К): Пусть p — простое число, X — конечномерный бикомпакт, имеющий по модулю p такие же гомологии, как n-мерная сфера, T — гомеоморфизм пространства X, имеющий период p. Тогда множество неподвижных точек отображения T пусто или имеет по модулю p такие же гомологии, как k-мерная сфера ($0 \leqslant k \leqslant n$). Доказательство использует спектральную последовательность конечнолистного регулярного накрытия (H. Cartan — J. Leray), построение которой вкратце описано в первом параграфе работы, но не использует специальной теории групп гомологий, примененной Смитом. А. С. Шварц

2860 К. **Математические беседы. I. Задачи о многоцветной раскраске. Дынкин, Успенский** (Mathematische Unterhaltungen. I. Mehrfarbenprobleme. Dynkin E. B., Uspenski W. A. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, IV, 65 S.) (нем.)

Перевод с русского издания (Гос. изд.-во техн.-теор. лит., М.—Л., 1952)

2861 К. **Элементы математики. XV. I часть. Основные образования анализа. Книга V. Векторные топологические пространства. Гл. I. Векторные топологические пространства над телом. Гл. II. Выпуклые множества и локально выпуклые пространства. Бурбаки** (Eléments de mathématique. XV. I part.: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre V: Espaces vectoriels topologiques. Chap. I: Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué. Chap. II: Ensembles convexes et espaces localement convexes. Bourbaki N.), Actual. sci. industr. № 1189, Paris, 1953, 123 (франц.)

Векторное пространство E над телом K называется топологическим векторным пространством (сокращенно TV-пространством), если K и E топологизированы так, что векторные операции непрерывны. TV-пространства образуют основу линейного анализа; они подвергаются здесь предварительному изучению. В начале (I. 1) дается определение TV-пространства E и его специальных реализаций в нормированных векторных пространствах над телом, рассматриваются упомянутые выше требования непрерывности, свойства окрестности нуля в E, далее вопросы пополнения, фактор-пространства, произведение и прямая сумма пространств. Дается общая конструкция, позволяющая определить топологию векторного пространства E с помощью системы линейных отображений TV-пространств в E. В I. 2 рассматриваются линейные многообразия в TV-пространстве в отношении их замкнутости, локальной бикомпактности и конечномерности. Для метризуемых TV-пространств (I. 3) на переднем плане стоит теорема Банаха, согласно которой всякое непрерывное линейное отображение двух таких полных пространств (над недискретным телом) есть гомоморфизм. В II K есть поле R действительных чисел. В II 1 рассматриваются общие свойства выпуклых множеств в отношении пересечения, произведения и взятия выпуклой оболочки. Подробно изложено значение «конусов» и их отношение к упорядоченным векторным пространствам. Локально выпуклые пространства являются предметом изучения в II. 2; так же как в I.1, с помощью системы линейных отображений локально выпуклых пространств в векторное пространство E можно сделать E локально выпуклым пространством. В II. 3 исследуется отделимость выпуклых множеств, которая основывается на теореме Хана — Банаха в ее геометрической форме: если E — некоторое TV-пространство над R, A — открытое

непустое выпуклое подмножество пространства E и M — не пересекающееся с A линейное многообразие, то существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающаяся с A. В II. 4 доказывается теорема Крейна — Мильмана: В локально выпуклом хаусдорфовом TV-пространстве каждое бикомпактное подмножество есть замкнутая выпуклая оболочка своих крайних точек. В II. 5 рассматриваются семинормы вместе с выпуклыми функциями. Действительная функция p на E есть семинорма, если выполнены условия: 1) из $x \in E$, $\lambda \in R$ следует $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$; 2) если $x \in E$, $y \in E$, то $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. С помощью системы семинорм в векторном пространстве E над R можно сделать E локально выпуклым пространством; обратно, каждое векторное пространство может быть получено таким способом. В заключение дается аналитическая форма теоремы Хана — Банаха. Если p — семинорма на векторном пространстве E над R, M — подпространство и f — такая линейная форма на M, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для $x \in M$, то существует линейная форма f' на E, совпадающая с f на M и удовлетворяющая условию $|f'(y)| \leqslant p(y)$ для всех $y \in E$. В II. 6 обсуждаются некоторые из выше упомянутых проблем для TV-пространств над полем комплексных чисел. Приложение содержит теорему Маркова — Какутани о существовании общей неподвижной точки системы непрерывных, линейных, аффинных, перестановочных друг с другом отображений непустого выпуклого бикомпактного подмножества хаусдорфова TV-пространства в себя. J. Aumann

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, 1/5, 107.

См. также: 2775, 2817, 2863, 2872, 2873, 2878, 2972, 2973, 2975, 2979, 3086, 3089, 3133, 3146, 3311, 3313

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2862. Аксиоматика числового континуума. Пламеннов И., Сб. студ. науч. работ Пензенск. гос. пед. ин-та, 1953, № 1, 82—102

Статья примыкает к работе референта (Успехи матем. наук, 1949, 4, № 2, 180—197); в ней теория простейшего линейного континуума строилась на базе четырех аксиом, из которых первые три имеют место для всех линейных континуумов, а четвертая вводится с целью выделения из этих континуумов простейшего. При таком построении основ анализа алгебраические действия над действительными числами однозначно определяются, а свойства этих действий становятся доказуемыми теоремами. Автор выбирает несколько иной путь; принимая три первых аксиомы референта (вместе с построением на базе этих аксиом всей топологической части анализа), он непосредственно переходит к аксиоматическому определению алгебраических операций (сложения и умножения). При этом, как показывает автор, требование существования суммы уже имеет своим следствием четвертую аксиому референта. Другим результатом является то, что обратимость умножения при таком построении может быть доказана. А. Я. Хинчин

2863. Топологическая характеристика вполне аддитивной и чисто конечноаддитивной частей аддитивной функции множеств. Бауэр (Topologische Kennzeichnung des total-additiven und rein-endlich-additiven Teils einer additiven Mengenfunktion. Bauer Heinz), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 83 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра всех подмножеств некоторого множества E и $f \mid \mathfrak{B}$ — действительная (конечная) неотрицательная и конечноаддитивная функция в $\mathfrak{B}$. Пусть $f = f_t + f_\tau$ — однозначно определенное разложение функции f на действительные неотрицательные части, обладающие свойствами: f_t вполне аддитивна, а f_τ чисто конечноаддитивна, т. е. из $0 \leqslant t(A) \leqslant f_\tau(A)$, $A \in \mathfrak{B}$ следует $t(A) = 0$, где $t(A)$ вполне аддитивна в $\mathfrak{B}$.

Множество E представляет собой вполне регулярное хаусдорфово пространство с базой открыто-замкнутых множеств $\mathfrak{B}$. Рассматривается произвольное, содержащее E как плотное подмножество, T_1-пространство S, допускающее непрерывное отображение на стоуновскую бикомпактификацию δE пространства E, при котором точки E остаются на месте. Система $\overline{\mathfrak{B}} = \{\overline{A}\}$ замыканий в S множеств $A \in \mathfrak{B}$ является булевой алгеброй с единицей S, изоморфной $\mathfrak{B}$. Функция $\overline{f} \mid \overline{\mathfrak{B}}$, определенная соотношением $\overline{f}(\overline{A}) = f(A)$, неотрицательна и вполне аддитивна в $\overline{\mathfrak{B}}$. Пусть $\overline{f}_a$ и $\overline{f}_i$ — соответственно внешняя и внутренняя меры, индуцированные в S функцией $\overline{f}$. Утверждается, что $f_t(A) = \overline{f}_a(A)$ и $f_\tau(A) = \overline{f}_i(\overline{A} - A)$ для всякого $A \in \mathfrak{B}$ и, таким образом, f вполне аддитивна в $\mathfrak{B}$, если $\overline{f}_i(S - E) = 0$, и f чисто конечноаддитивна в $\mathfrak{B}$, если $\overline{f}_a(E) = 0$. А. Г. Пинскер

2864. О размерности и мере в смысле Минковского ограниченных точечных множеств в евклидовом пространстве. Дебруннер (Zur Minkowskischen Dimensions- und Maßbestimmung beschränkter Punktmengen des euklidischen Raumes. Debrunner H.), Comment. math. helv., 1955, 29, № 3, 258—272 (нем.)

Пусть A — непустое точечное множество в евклидовом пространстве R_k. Через A_ρ обозначим множество точек $P \in R_k$, для которых $\overline{PQ} < \rho$ с $Q \in A$. Положим

$$q_\tau(A, \rho) = V(A_\rho)\, \rho^{-(k-\tau)},$$

где $V(A_\rho)$ означает жорданову меру множества A_ρ; и определим

$$\underline{q}_\tau(A) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} q_\tau(A, \rho), \quad \overline{q}_\tau(A) = \overline{\lim}_{\rho \to 0} q_\tau(A, \rho).$$

Нижней и верхней размерностями множества A в смысле Минковского называются числа

$$\underline{\mu}(A) = \inf \tau\,[\underline{q}_\tau(A) = 0], \quad \overline{\mu}(A) = \inf \tau\,[\overline{q}_\tau(A) = 0].$$

Мера Минковского определяется следующим образом. Положим

$$M_\tau(A, \rho) = q_\tau(A, \rho)\, \omega_{k-\tau}^{-1},$$

где $\omega_\varkappa = \pi^{\varkappa/2} / \Gamma(1 + \varkappa/2)$ для целых $\varkappa$ означает объем $\varkappa$-мерного единичного шара.

Пусть

$$\underline{M}_\tau(A) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} M_\tau(A, \rho),$$

$$\overline{M}_\tau(A) = \overline{\lim}_{\rho \to 0} M_\tau(A, \rho).$$

Конечные положительные значения $\underline{M}_\tau(A)$ и $\overline{M}_\tau(A)$ соответственно для $\tau = \underline{\mu}(A)$ и $\tau = \overline{\mu}(A)$ называются

нижней и верхней мерами множества A в смысле Минковского

$$\underline{M}(A) = \underline{M}_{\underline{\mu}}(A), \quad \overline{M}(A) = \overline{M}_{\underline{\mu}}(A).$$

Множество $A \subset R_k$, для которого $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu$, $\underline{M}(A) = \overline{M}(A) = M$, называется μ-размерно измеримым в смысле Минковского. Вообще говоря, верхние и нижние размерность и мера Минковского не совпадают. Через $(\underline{\mu}, \underline{M}; \overline{\mu}, \overline{M})$ обозначается класс всех множеств $A \subset R_k$, для которых $\underline{\mu}(A) = \underline{\mu}$, $\underline{M}(A) = \underline{M}$, $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}$, $\overline{M}(A) = \overline{M}$.

Рассматривается поведение размерности и меры Минковского при различных операциях над множествами.

Теорема. Если A — ограниченное непустое множество класса $(\underline{\mu}, \underline{M}; \overline{\mu}, \overline{M})$, то для размерности и меры Минковского справедливо одно из соотношений:

α) $0 < \underline{\mu} = \overline{\mu} = k, \quad 0 < \underline{M} = \overline{M} < \infty;$

β) $0 = \underline{\mu} = \overline{\mu} < k, \quad \underline{M} = \overline{M}$ — положительное целое;

γ) $0 < \underline{\mu} = \overline{\mu} = k, \quad 0 = \underline{M} = \overline{M};$

δ) $0 = \underline{\mu} = \overline{\mu} < k, \quad \underline{M} = \overline{M} = \infty;$

ε) $0 < \underline{\mu} < \overline{\mu} = k, \quad 0 \leqslant \underline{M} \leqslant \infty, \quad \overline{M} = 0;$

ζ) $0 = \underline{\mu} < \overline{\mu} = k, \quad \underline{M} = \infty, \quad \overline{M} = 0;$

η) $0 = \underline{\mu} < \overline{\mu} < k, \quad \underline{M} = \infty, \quad 0 \leqslant \overline{M} \leqslant \infty;$

ϑ) $0 < \underline{\mu} = \overline{\mu} < k, \quad 0 \leqslant \underline{M} \leqslant \overline{M} \leqslant \infty;$

ι) $0 < \underline{\mu} < \overline{\mu} < k, \quad 0 \leqslant \underline{M} \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant \overline{M} \leqslant \infty.$

Наоборот, для произвольных $\underline{\mu}, \underline{M}, \overline{\mu}, \overline{M}$, удовлетворяющих одному из соотношений α) — ι), класс $(\underline{\mu}, \underline{M}; \overline{\mu}, \overline{M})$ не пуст. Р. С. Гутер

2865. **О формуле Грина — Гаусса — Остроградского.** Ло ясевич (Sur la formule de Green — Gauss — Ostrogradsky. Łojasiewicz S.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 306—325 (франц.)

Пусть G — ограниченное открытое множество n измерений такое, что его граница S совпадает с границей его дополнения в R_n. Предполагается, что S можно представить в виде суммы конечного или бесконечного числа непересекающихся множеств $S = C + S_1 + S_2 + \ldots$, где C — замкнутое множество меры $n-1$ измерений равной нулю и $S_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ — поверхность, открытая относительно S, заданная параметрическими уравнениями

$$x_i = x_i^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

или, используя векторные обозначения

$$X = (x_1, \ldots, x_n), \; U = (u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

при помощи представления $X = X^{(\nu)}(U)$, где U пробегает область $D^{(\nu)}$ пространства $n-1$ измерений; предполагается далее, что это представление есть гомеоморфное отображение области $D^{(\nu)}$ в $S^{(\nu)}$, $x_i^{(\nu)}(U)$ принадлежит классу C^1 в $D^{(\nu)}$, ранг матрицы

$$\partial X^{(\nu)} / \partial U = \| \partial x_i^{(\nu)} / \partial U_j \| \; (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n-1)$$

равен $n-1$ и вектор нормали $A^{(\nu)}(U)$ к поверхности направлен во внешность области G.

Пусть $F(X) = (f_1(X), \ldots, f_n(X))$ — векторное поле класса C^1 в области $G_1 \supset G + S$, функция $|F(X^{(\nu)}(U))| \times |A^{(\nu)}(U)|$ суммируема в $D^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и

$$\sum_\nu \int_{D^{(\nu)}} |F(X^{(\nu)})| \, |A^{(\nu)}| \, dU < \infty. \qquad (1)$$

Доказывается, что тогда имеет место формула Гаусса — Остроградского

$$\int_G \operatorname{div} F \, dX = \sum_\nu \int_{D^{(\nu)}} F(X^{(\nu)}) \, A^{(\nu)} \, dU.$$

Показывается далее, что эта формула остается справедливой, если F есть векторное поле класса C^1, ограниченное в области G, непрерывное в $G + \Sigma S^{(\nu)}$, удовлетворяющее условию (1) и, если, кроме того, $\operatorname{div} F$ суммируема в области G. М. А. Акивис

2866. **Об одном обобщении интеграла Стилтьеса — Гюнтера.** Хахубия Г. П., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, № 2, 57—78 (рез. груз.)

Пусть $\mu(\omega)$ — положительная аддитивная абсолютно непрерывная функция области, определенная в области D n-мерного евклидова пространства R_n. Пусть далее $\psi(P)$ и $\varphi(\omega)$ — какие угодно функции точки P и области ω, определенные в D. Рассмотрим какое-либо λ-подразбиение области D на области $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, диаметры которых $\leqslant \lambda$. По определению, интегралом от $\psi(P)\,\varphi(\omega)$ по функции $\mu(\omega)$ в области D называется следующий предел:

$$\int_D \psi(P)\,\varphi(\omega)\,\mu(d\omega) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_1^n \psi(P_k)\,\varphi(\omega_k)\,\mu(\omega_k),$$

если он существует и не зависит ни от способа λ-подразбиения, ни от выбора промежуточных точек $P_k (P_k \in \omega_k)$.

Даются достаточные условия существования интеграла. Он, в частности, существует, если $\psi(P)$ интегрируема по $\mu(\omega)$ (в смысле интеграла Стилтьеса), $\varphi(\omega)$ ограничена и $\varphi(\omega)\,\mu(\omega)$ полуаддитивна сверху. Если, при тех же условиях, функция $\varphi(\omega)\,\mu(\omega)$ аддитивна, то существует также интеграл $\int_D \psi(P)\,\varphi^2(\omega)\,\mu(d\omega)$. Наконец, если $\psi(P)$ непрерывна, а $\varphi(\omega)$ аддитивна и абсолютно непрерывна, то интеграл существует и имеет место равенство

$$\int_D \psi(P)\,\varphi(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_D \psi(P)\,\varphi(\omega)\,\mu'(P)\,d\omega.$$

Исследуются некоторые свойства интеграла, а также выясняются вопросы о существовании интегралов при тех или иных условиях, наложенных на подинтегральные функции. Ю. С. Очан

2867. **Интеграл Хеллингера.** Корчагина Л. Н., 13-я [науч. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1955, 231

2868. **Выражение двойным интегралом площади поверхности, заданной в полярных координатах.** Костовский А. Н., Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-та, 1955, № 5, ч. 2, 94—95

Краткое изложение одноименной работы автора (РЖМат, 1955, 3682). Г. Я. Поплавская

2869. **О $C_{\alpha\beta}$ и A-интегрируемости функций двух переменных.** Челидзе В. Г., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1955, 21, 65—76

Выясняется связь между различными интегралами функций двух переменных. Пусть функция $f(t, \tau)$ определена на $R_0 = (0 \leqslant t < \infty, \; 0 \leqslant \tau < \infty)$ и числа $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $\lambda > 1$ таковы, что $\gamma\delta \leqslant (\alpha + 1) \times (\beta + 1)$. По определению,

$$\lim_{(t,\tau) \to \infty} f(t, \tau) = S, \qquad (1)$$

если предел (1) берется по t и $\tau \to \infty$ при условии, что

$$\lambda^{-1}\tau^{\gamma/(\alpha+1)} \leqslant t \leqslant \lambda\tau^{(\beta+1)/\delta}. \quad (2)$$

Если же в пределе (1) значок 0 отсутствует, то это будет означать обычный предел функции двух переменных.

Функция $f(t, \tau)$ $C_{\alpha\beta}$-интегрируема на R_0, если существует конечный предел I при $(x, y) \to \infty$

$$\lim F_{\alpha\beta}(x, y) = \lim x^{-\alpha}y^{-\beta}\int_0^x\int_0^y (x-t)^{\alpha}(y-\tau)^{\beta} \times$$

$$\times f(t, \tau)\,dt\,d\tau = I = (C_{\alpha\beta})\int_0^\infty\int_0^\infty f(t, \tau)\,dt\,d\tau. \quad (3)$$

Функция f называется $C^*_{\alpha\beta}$-интегрируемой на R_0, если существует $\lim_{(x,y)_0 \to \infty} F_{\alpha\beta}(x, y)$. Функция $f(t, \tau)$ называется A^*-интегрируемой на R_0, если существует предел I при $(p, q)_0 \to +0$

$$\lim \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pt-q\tau} f(t, \tau)\,dt\,d\tau = I =$$

$$= (A^*)\int_0^\infty\int_0^\infty f\,dt\,d\tau. \quad (4)$$

В определениях интегралов (3) и (4) предполагается, что функция f интегрируема по Лебегу на любом конечном прямоугольнике. Доказывается несколько теорем. Например:

Теорема 1. Если $f(t, \tau)$ $C_{\alpha\beta}$-интегрируема на R_0, то для любых $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ она $C^*_{\alpha',\beta'}$-интегрируема на R_0 и эти интегралы совпадают, если

$$1)\ \lim_{u\to\infty,\ u\leqslant x} \int_0^u (1 - t\,x^{-1})^{\alpha'-\alpha-1} t^{\alpha} a(t)\,dt = 0, \quad (5)$$

где

$$\lim_{y\to\infty} y^{-(\beta+\gamma+1)}\int_0^y (1-\tau y^{-1})^{\beta'-\beta-1}\tau^{\beta} F_{\alpha\beta}(t, \tau)\,d\tau = a(t)$$

равномерно по t на каждом конечном интервале.

2) Аналогично (5) требуется условие по переменной τ. Показывается, что при некоторых дополнительных ограничениях $C_{\alpha\beta}$-интегрируемая функция f будет и A^*-интегрируемой.

Примечание референта. В работе имеются опечатки. Например, в формулах (2.21) и (2.22) напечатано $u \geqslant x$, $v \geqslant y$ вместо $u \leqslant x$, $v \leqslant y$; на стр. 71, строка 1 сверху, напечатано «от 0 до ν» вместо «от ν до ν».

Заметим, что определение $C^*_{\alpha\beta}$-интеграла дано неясно. Именно, постоянные γ, δ и λ фиксированы раз и навсегда или же они должны подбираться для каждой конкретной функции? Далее, в доказательстве теоремы 1 есть недоразумение. Автор хочет доказать $C^*_{\alpha',\beta'}$-интегрируемость, тогда как пользуется условием (2.18) вместо такого же условия, но с α' и β' (вместо α и β). В этом случае при оценке, например, $J_1(x, y)$ будем иметь уже не $y^{\gamma}x^{-(\alpha+1)} \leqslant \lambda^{\alpha+1}$, а $y^{\gamma}x^{-(\alpha+1)} \leqslant \lambda^{\alpha'+1}x^{\alpha'-\alpha}$. В статье ничего не сказано, каким образом нужно доводить доказательство до конца. П. Л. Ульянов

2870. О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой. Матории А. П., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 3, 262—266

А. Н. Колмогоров (Уч. зап. МГУ, 1939, **30**, Математика, 3—16) дал полное решение вопроса о соотношении между верхними гранями абсолютных величин произвольной функции, определенной на всей прямой, и ее производных k-го и n-го порядков. Для функции, заданной на полупрямой, имеются работы Горни (Gorny A., Acta math., 1939, **71**, 317—358), референта (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 2, 167—170) и др.

Реферируемая статья примыкает к работе Горни. Доказывается соотношение

$$M_k(f) \leqslant P_{nk} M_0^{(n-k)/n}(f)\, M_n^{k/n}(f),$$

где $M_i(f)$ — наибольшее значение абсолютной величины i-й производной функции, заданной на полупрямой, и где

$$P_{nk} = \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots[n^2-(k-1)^2]\,[(2n-1)!!]^{k/n}}{\{n^2(n^2-1^2)\ldots[n^2-(n-1)^2]\}^{k/n}(2k-1)!!}.$$

Константы P_{nk} лучше, чем соответствующие константы Горни, но не являются окончательными. Автор рассматривает только ограниченные функции на полупрямой с производными, абсолютные величины которых имеют наибольшие значения. Случай, когда абсолютная величина какой-либо производной не достигает своей верхней грани, автор не рассматривает.

Примечание референта. Результат автора является частным случаем соотношения между верхними гранями функции и ее двух любых производных на полупрямой, которое было получено референтом в 1950 г., о чем был сделан доклад на XI научно-исследовательской конференции Моск. автомоб.-дор. ин-та в январе 1951 г. (см. тезисы).

В. М. Оловянишников

2871. Об одной проблеме квазианалитичности. Шилов Г. Е., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 893—895

Рассматривается класс $S^{\beta}_{\alpha}(\alpha, \beta \geqslant 0)$, состоящий из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$), производные которых удовлетворяют неравенствам $|x^k\varphi^{(p)}(x)| \leqslant CA^kB^pk^{k\alpha}p^{p\beta}$ ($k,\ p = 0, 1, \ldots$; $-\infty < x < \infty$; константы A, B и C зависят от φ). Доказывается, что класс S^{β}_{α} тривиален, т. е. состоит из одной единственной функции $\varphi(x) \equiv 0$, тогда и только тогда, когда α и β удовлетворяют одному из следующих условий: 1) $\alpha = 0$, $\beta \leqslant 1$; 2) $\alpha \leqslant 1$, $\beta = 0$; 3) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Доказательство основывается на критерии квазианалитичности Карлемана, некоторых свойствах индикатрисы целой функции и непустоте функциональных классов Z^q_q ($q > 1$) (эти классы введены в работе И. М. Гельфанда и автора (РЖМат, 1955, 3291)); в частности устанавливается равенство $S^{1-\alpha}_{\alpha} = Z^{1/\alpha}_{1/\alpha}$ ($\alpha < 1$).

В конце заметки вводится также линейное топологическое пространство $S^{\beta,B}_{\alpha,A}$, состоящее из всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих при любых ε, $\delta > 0$ неравенствам

$$|x^k\varphi^{(p)}(x)| \leqslant C_{\varphi}(\varepsilon, \delta)(A+\delta)^k k^{k\alpha}(B+\varepsilon)^p p^{p\beta}$$

($k, p = 0, 1, \ldots$; $-\infty < x < \infty$). Ю. М. Березанский

2872. Об униформизации функций. I. Сикорский, Заранкевич (On uniformization of functions (I). Sikorski R., Zarankiewicz K.), Fundam. math., 1955, **41**, № 2, 339—344 (англ.)

Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех непрерывных отображений f сегмента $I = [0, 1]$ на себя с $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}$. Рассматривается вопрос, при каких дополнительных условиях для $f_1, \ldots, f_n$ существуют функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{F}$ такие, что $f_1(\varphi_1(x)) = \ldots = f_n(\varphi_n(x))$ для всех $x \in I$.

Доказывается достаточность любого из следующих условий, в которых $i = 1, \ldots, n$: α) для каждого i существует такая последовательность $0 = x_0 < x_1 < \ldots$

$\ldots < x_r = 1$, что f_i монотонна в каждом промежутке (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, r$; α_1) множества $f_i^{-1}(y)$ имеют конечное число компонент для каждого $y \in I$; α_2) функции f_i ограниченной вариации и для каждого $y \in I$ множество $f_i^{-1}(y)$ не содержит интервала; α_3) функции f_i ограниченной вариации и если для некоторого j $f_j(x) = y_0 = \text{const}$ для $x \in [x_1, x_2]$, то множества $f_i^{-1}(y_0)$ имеют конечное число компонент.

Заранкевич применил эти результаты к доказательству теоремы Дайсона (РЖМат, 1956, 276). Теорема, подобная приведенной выше, была доказана Хомма (Homma T., Kōdai Math. Sem. Repts, 1952, 1, 13—16) при других условиях относительно $f_1, \ldots, f_n$.

На примере (который также приведен Хомма) показывается, что дополнительные условия относительно $f_1, \ldots, f_n$ не могут быть опущены. J. W. Jaworowski

2873. Об униформизации функций. II. Сикорский (On uniformization of functions (II). Sikorski R.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 345—350 (англ.)

В части II дается другое доказательство теорем части I (реф. 2872), основанное на том, что при $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}$ множество $A = E[(x_1, \ldots, x_n): f_1(x_1) = \ldots = f_n(x_n)]$, соединяющее точки $p_0 = (0, \ldots, 0)$ и $p_1 = (1, \ldots, 1)$ n-мерного евклидова пространства, связно. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях для $f_1, \ldots, f_n$ каждая компонента A локально связна. Гомологические способы доказательства и свойство связности множества A следующим образом обобщаются на случай отображений k-мерного куба Q_k.

Пусть $\mathfrak{F}_k$ — множество всех непрерывных отображений Q_k в себя, тождественных на границе Q_k. Подмножество B nk-мерного куба $Q_{nk} = Q_k \times \ldots \times Q_k$ (n сомножителей), состоящее из всех точек $(x, \ldots, x)$, где $x \in Q_k$, гомеоморфно Q_k. Пусть Z — цикл, являющийся границей ориентированного куба B. Кроме того, пусть $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}_k$ и $A = E[(x_1, \ldots, x_n) \in Q_{nk}: f_1(x_1) = \ldots = f_n(x_n)]$. Тогда $Z \subset A \subset Q_{nk}$ и $Z \sim 0$ в A.

В заключение указываются некоторые следствия этой теоремы. J. W. Jaworowski

2874 К. Лекции по теории функций действительных переменных. Сансоне (Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabili reali. Lezioni tenute nel I semestre dell anno accademico 1950/51. Univ. studi Firenze. Ist. matem. 2 ristampa 1954. Sansone Giovanni, Firenze, Ed. tip. Soc. ed univ., 1954, 176 p.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 645—646, 55 (итал.)

2875 К. Элементы теории функций действительного переменного. Чинкуини (Elementi di teoria delle funzioni di variabile reale. 2 ed. Cinquini Silvio. Pavia, Tip. Portiglia e Galli, 1953, 232 p.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 647, 132 (итал.)

2876 Д. К теории полуаддитивных функций. Воробьев А. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1955

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2877. Об одной проблеме теории отображений. Новотный (O jednom problemu z theorie zobrazeni. Novotný Miroslav), Spisy vyd. přírodověd. facult. Masarykovy univ., 1953, № 2, 53—64 (чеш.; рез. русс., франц.)

Пусть даны два произвольных множества M_1 и M_2 и преобразования f_i ($i = 1,2$) соответствующего множества M_i в себя. Автор дает полную конструктивную характеристику всех отображений F множества M_1 в M_2, переводящих f_1 в f_2, т. е. отображений, для которых $F(f_1(x)) = f_2(F(x))$ при каждом $x \in M_1$. Для этого каждое множество M_i разбивается на классы ξ_i эквивалентности: элементы x и x' из M_i эквивалентны, если при некоторой итерации $f_i^{(n)}$ отображения f_i имеем $f_i^{(n)}(x) = x'$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Автор замечает, что данный класс ξ_1 множества M_1 может быть переведен каким-либо отображением не во всякий класс ξ_2 множества M_2 и вводит понятие допустимого класса (множества M_2) относительно данного класса ξ_1 множества M_1. Для каждого допустимого класса ξ_2 относительно класса ξ_1 строится конструкция, позволяющая получить любое возможное отображение $K_{\xi_1 \xi_2}$ класса ξ_1 в класс ξ_2. Оказывается, что любое переводящее f_1 в f_2 отображение F получается из некоторого отображения H совокупности всех классов множества M_1 в совокупность всех классов множества M_2, отображающего каждый класс ξ_1 в какой-либо допустимый относительно ξ_1 класс ξ_2 множества M_2, следующим естественным способом: для каждого $x \in M_1$ полагаем $F(x) = K_{\xi_1 \xi_2}(x)$, где $\xi_1 \ni x$ и $\xi_2 = H(\xi_1)$. Приводятся два приложения полученного результата к теории группоидов. Ю. М. Смирнов

2878. Однолистные отображения. Татаркевич (Les transformations unifoliées. Tatarkiewicz K.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 122—136 (франц.)

Пусть X и Y — евклидовы пространства размерности соответственно n и m, $X \times Y$ — их декартово произведение, $M \subseteq X \times Y$. Через $S[M, x^{(0)}]$ обозначается пересечение гиперплоскости $x = x^{(0)}$ с множеством M. Множество $A \subseteq X \times Y$ называется проективно простым относительно X, если для каждого $x \in X$ множество $S[A, x]$ содержит не более одной точки. Множество $A \subseteq X \times Y$ называется связным относительно X, если для каждого $x \in X$ множество $S[A, x]$ связно. Отображение Φ множества $M \subseteq X \times Y$ на множество $M^* \subseteq X^* \times Y^*$ называется однолистным в M (относительно X), если оно взаимно однозначно и если оно каждое проективно простое относительно X подмножество $A \subseteq M$ отображает в проективно же простое относительно X^* множество $A^* \subseteq M^*$. Если отображение Φ задается формулами $x^* = g(x, y)$, $y^* = h(x, y)$, $(x, y) \in M$, то условием W автор называет условие независимости функции g от y: $g(x, y) = s(x)$, причем отображение $x^* = s(x)$ должно быть взаимно однозначным. Показывается (теорема 1), что если выполнено условие W, то Φ есть однолистное отображение. Далее для различных классов множеств доказывается необходимость условия W для однолистности отображения Φ. В качестве примера отметим следующие классы множеств и отображений Φ:

1. M есть открытое множество, связное относительно X, а g — непрерывная функция (теорема 2).

2. M — область, связная относительно X, Φ непрерывно и взаимно однозначно на M и отображает каждую дугу из M, проективно простую относительно X, в проективно же простую относительно X^* дугу (теорема 7). Л. Д. Кудрявцев

2879. О явлении сходимости Серпинского. Попруженко (Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński. Poprużenko J.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 29—37 (франц.)

Вводится понятие σ-равномерной сходимости: последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется σ-равномерно сходящейся на множестве E, если существует такая последовательность множеств $\{M_n\}$, что $E = \bigcup_k M_k$ и $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на каждом множестве M_k.

Доказывается, что существует только одно кардинальное число $\mathfrak{m}$ такое, что для каждого множества E мощности $\mathfrak{m}$ выполняются условия: 1) существует сходящаяся на множестве E последовательность действительных функций, не сходящаяся σ-равномерно ни на каком подмножестве $E_1 \subseteq E$ мощности $\mathfrak{m}$; 2) всякая сходящаяся последовательность действительных функций $\{g_n(x)\}$, определенных на E, σ-равномерно сходится на всяком множестве $E_1 \subseteq E$ мощности $< \mathfrak{m}$. Число $\mathfrak{m}$ является регулярным алефом и удовлетворяет неравенству $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Эта теорема доказывается без помощи континуум-гипотезы. Если принять гипотезу континуума, то получается теорема Серпинского о существовании сходящихся последовательностей действительных функций, не сходящихся равномерно ни на каком несчетном множестве. Далее эта теорема применяется к общей теории меры и устанавливается следующий результат, являющийся обобщением аналогичных результатов Банаха и Куратовского: Если $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$ и Φ — семейство всех функций φ, определенных на некоторых σ-телах $\mathfrak{M}_\varphi$ подмножеств множества X и удовлетворяющих условиям:

1) $0 \leqslant \varphi(E) < \infty$, 2) $\varphi(E_1) \leqslant \varphi(E_2)$ для $E_1 \subseteq E_2$, 3) $\varphi\left(\sum_n E_n\right) \leqslant \sum_n \varphi(E_n)$, 4) $\varphi(E) < \varphi(X)$ для $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{X}}$,

то существует такая последовательность множеств $E_n \subset X$, что для каждой $\varphi \in \Phi$ хоть одно множество E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не принадлежит $\mathfrak{M}_\varphi$. Доказательство этой теоремы опирается на обобщенную теорему Егорова. S. Mrówka

2880. **Об одном разложении несчетных множеств. I. Попруженко** (Sur une décomposition des ensembles indénombrables (I). Poprużenko J.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 146—149 (франц.)

Пространство X обладает свойством λ, если каждое счетное подмножество X есть G_δ. Подмножество Y пространства X обладает свойством λ', если для каждого счетного подмножества $Z \subset X$ множество $Y + Z$ обладает свойством λ. Рассматривается следующее свойство кардинального числа $\mathfrak{m}$:

(K) Если E — множество мощности $\mathfrak{m}$, то существует двойная последовательность $\{A^i_m\}$ подмножеств E такая, что 1) $E = \sum_{m=1}^{\infty} A^i_m$ для $i = 1, 2, \ldots$; 2) множества A^i_m, $m = 1, 2, \ldots$, при каждом фиксированном i не пересекаются; 3) для каждой последовательности $\{m_i\}$ натуральных чисел пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty}(A^i_1 + A^i_2 + \cdots + A^i_{m_i})$ не более чем счетно.

Доказывается теорема: Для того чтобы существовал несчетный алеф $\mathfrak{m}$ со свойством (K), необходимо и достаточно, чтобы существовало множество мощности $\aleph_1$, которое обладает свойством λ, но не обладает свойством λ'. S. Mrówka

2881. **Об одном разложении несчетных множеств. II. Попруженко** (Sur une décomposition des ensembles indénombrables (II). Poprużenko J.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 272—277 (франц.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — класс всех алефов $\mathfrak{m}$ со следующим свойством: для каждого множества E мощности $\mathfrak{m}$ существует сходящаяся последовательность действительных функций, определенных на E, которая не является σ-равномерно сходящейся (реф. 2879) ни на каком множестве $E_0 \subset E$ мощности $\mathfrak{m}$.

Доказывается, что $\mathfrak{m} \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}$ обладает свойством (K_2), аналогичным свойству (K) (реф. 2880) с заменой условия 3) на условие 3′) для каждых последовательностей $\{i_s\}$ и $\{m_s\}$ натуральных чисел, первая из которых возрастающая, мощность множества $\varlimsup_{n\to\infty}(A^{i_s}_1 + A^{i_s}_2 + \cdots + A^{i_s}_{m_s}) < \mathfrak{m}$.

Пусть Φ_E — семейство всех внешних мер φ, определенных для множеств $X \subset E$, не равных тождественно 0 и удовлетворяющих условию: $\varphi(X) = 0$ всякий раз, когда $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{E}}$. Пусть $\mathfrak{M}_\varphi$ — σ-поле всех φ-измеримых множеств (в смысле Каратеодори). Тогда: а) для каждой конечной последовательности $E_1, \ldots, E_n$ подмножеств E существует $\varphi \in \Phi_E$ такая, что $E_i \in \mathfrak{M}_\varphi$ $(i = 1, \ldots, n)$; б) существует бесконечная последовательность $\{H_n\}$ подмножеств E такая, что для каждой $\varphi \in \Phi_E$ соотношение $H_n \notin \mathfrak{M}_\varphi$ удовлетворяется для бесконечно многих n. S. Mrówka

2882. **Разложение множества на пары, отличающиеся обоими элементами. Гинсберг** (Decompositions of a set into disjoint pairs. Ginsburg S.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 278—283 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

1. Пусть $F = \{A_\xi \mid \xi < \tau\}$ — семейство абстрактных множеств, каждое из которых мощности $\aleph_\gamma$. Кроме того, пусть F содержит подсемейство $G = \{B_\xi \mid \xi < \omega_\gamma\}$ такое, что для каждого $\xi < \tau$ множество A_ξ содержит как подмножество хотя бы один элемент G. Тогда существует такое разложение $A = \bigcup_{\xi<\tau} A_\xi$ на пары, отличающиеся обоими элементами, что любое множество S, являющееся объединением пар и содержащее хотя бы одно множество A_ξ, имеет $\aleph_\gamma$ элементов, общих с каждым $A_\xi \in F$.

Автор применяет этот результат к разложениям евклидовой плоскости и получает следующие теоремы:

2. Не существует разложения плоскости на пары, отличающиеся обоими элементами, со свойствами: пусть S — любое множество, являющееся объединением пар; если S содержит одну линию, то оно содержит две линии.

3. Существует разложение плоскости на пары, отличающиеся обоими элементами, со свойством: каждое множество, являющееся объединением пар и содержащее одну линию, содержит $2^{\aleph_0}$ непересекающихся сегментов и имеет $2^{\aleph_0}$ элементов, общих с каждой линией плоскости.

4. Существует разложение плоскости в семейство пар, отличающихся обоими элементами, со свойством: Если L — линия плоскости, то среди подобных преобразований только тождественное преобразование отображает сумму $L(S)$ всех пар, содержащихся в L, в себя. Не существует подобных непересекающихся подмножеств $L(S)$ мощности $2^{\aleph_0}$. Если $L \neq L'$, то порядковые типы произвольных подмножеств $L(S)$ и $L'(S)$ мощности $2^{\aleph_0}$ несравнимы.

Ставится вопрос: Пусть α — линейный порядковый тип мощности $2^{\aleph_0}$. Существует ли разложение множества действительных чисел на пары, отличающиеся обоими элементами, такое, что любое множество S, являющееся объединением пар и содержащее подмножество порядкового типа α, содержит также подмножество порядкового типа λ? S. Mrówka

2883. **Об одном свойстве преобразований абстрактных множеств. Попруженко** (Sur une propriété des transformations des ensembles abstraits. Poprużenko J.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 163—167 (франц.)

Пусть X — произвольное множество мощности $\aleph_{\eta_0}$ и $\mu^*(E)$ — абстрактная конечная внешняя мера, определенная для $E \subset X$, не равная тождественно 0 и равная 0 для одноточечных множеств. Пусть τ — наименьшее порядковое число из интервала $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$, для которого справедливо следующее утверждение: существует семейство мощности $\aleph_\eta$ подмножеств X меры 0 такое, что сумма всех этих подмножеств есть множество положительной внешней меры.

Доказывается следующая теорема: Пусть Y — произвольное подмножество X мощности $\geqslant \aleph_\tau$, Φ — произвольное семейство мощности $\aleph_\tau$ подмножеств Y мощности $\geqslant \aleph_\tau$, Ψ — произвольное семейство мощности $\aleph_\tau$ функций $f(x) = y \in Y$, определенных для $x \in X$ и таких, что множество $K(y) = E\{x : x \in X,\ f(x) = y\}$ измеримо для каждых $f \in \Phi$ и $y \in f(X) \subset Y$. Тогда для каждого множества $M \subset X$ положительной внешней меры существует подмножество $N \subset M$ мощности $\aleph_\tau$ такое, что $E - f(N) \neq 0$ для каждых $E \in \Phi$ и $f \in \Psi$. Как частный случай получим следующую теорему Серпинского (Sierpiński W., Fundam. math., 1932, 19, 208): Если $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и F — семейство мощности континуума линейных множеств мощности континуума, то существует множество мощности континуума такое, что все его непрерывные образы отличны от множеств семейства F. S. Mrówka

2884. О существовании вполне неоднородных пространств. Бюхи (On the existence of totally heterogeneous spaces. Büchi J. R.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 97—102 (англ.)

Множество M действительных чисел называется вполне неоднородным, если $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph_0}$ и для всякой функции Бэра $f \in M^X$ $(X \subset M)$ мощность множества $E(f(x) : f(x) \neq x)$ меньше чем $2^{\aleph_0}$. Автор доказывает, что существование вполне неоднородных множеств действительных чисел вытекает из континуум-гипотезы. Без континуум-гипотезы можно доказать существование множеств M мощности $2^{\aleph_0}$ таких, что для каждой функции $f \in M^X$ $(X \subset M)$, монотонной (в широком смысле), множество $E(f(x) : f(x) \neq x)$ имеет мощность $< 2^{\aleph_0}$. Эта теорема остается в силе и в том случае, если в ее формулировке монотонную функцию заменить на обобщенный гомеоморфизм (взаимно однозначное отображение h называется обобщенным гомеоморфизмом, если h и h^{-1} являются функциями Бэра).

Дальнейшие результаты утверждают борелеву неизмеримость вполне неоднородных множеств и существование $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ борелевых инвариантов множеств действительных чисел (т. е. классов I множеств действительных чисел со свойством: если $A \in I$ и f — функция Бэра, то $f(A) \in I$). S. Mrówka

2885. О некоторых линейно упорядоченных множествах. Окума (Sur quelques ensembles ordonnés linéairement. Ohkuma Tadashi), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 9, 805—808 (англ.)

Линейно упорядоченное множество автор называет цепью. Через $G(E)$ обозначается группа автоморфизмов цепи E по отношению к ее порядку. Цепь E называется однородной, если группа $G(E)$ транзитивна на E. Цепь E называется единственно однородной, если, каковы бы ни были два элемента a и b цепи, существует только один автоморфизм из $G(E)$, который отображает a на b. Цепь J всех целых чисел, очевидно, является единственно однородной. Приводятся краткие доказательства следующих теорем:

1. Существует единственно однородная цепь, не изоморфная цепи J всех целых чисел.

2. Мощность множества всех различных типов единственно однородных цепей равна $2^{2^{\aleph_0}}$. В. Я. Арсенин

2886. Класс всюду ветвящихся множеств. Гинсберг (A class of everywhere branching sets. Ginsburg Seymour), Duke Math. J., 1953, 20, № 4, 521—526 (англ.)

Изучаются свойства частично упорядоченных множеств. Пусть P — частично упорядоченное множество и p — его элемент, $A(p)$ — множество: $A(p) = \{x : x \geqslant p,\ x \in P\}$. Пусть M и N — непустые подмножества множества P. M называется кофинальным в N, если для всякого элемента $p \in N$ найдется элемент $q \in M$ такой, что $q \geqslant p$. По определению, множество P имеет достаточно много некофинальных подмножеств, если оно обладает свойством: для всякой пары элементов p и q из P неверно по крайней мере одно из следующих двух утверждений: а) $A(p)$ кофинально в $A(q)$; б) $A(q)$ кофинально в $A(p)$. Множество P называется всюду ветвящимся, если для каждого $p \in P$ найдутся такие q и r в P, что $q \geqslant p$, $r \geqslant p$ и $A(q) \cap A(r) = \Lambda$. Множество P называется разветвленной системой, если для каждого $x \in P$ множество $\{y : y \leqslant x,\ y \in P\}$ просто упорядочено.

Доказывается теорема: Если P — всюду ветвящаяся разветвленная система, то P содержит кофинальное подмножество Q, имеющее достаточно много некофинальных подмножеств. То же самое в предположении, что E — бесконечное множество, а P — семейство всех бесконечных подмножеств E, упорядоченное посредством отношения, обратного включению.

Множество Q называется резидуальным подмножеством P, если для каждого $p \in Q$ $A(p) \subseteq Q$. Если при этом Q не является собственным кофинальным подмножеством никакого резидуального подмножества P, то Q называется максимальным резидуальным подмножеством. Пусть $F(P)$ — семейство максимальных резидуальных подмножеств P, частично упорядоченное отношением, обратным включению. Два множества P_1 и P_2 называются кофинально подобными, если каждое из них изоморфно кофинальному подмножеству некоторого частично упорядоченного множества Q.

Доказываются теоремы: Если P и Q — два кофинально подобных всюду ветвящихся частично упорядоченных множества, то $F(P)$ изоморфно $F(Q)$. Если P — всюду ветвящееся множество, то $F(P)$ имеет достаточно много некофинальных подмножеств. Если P имеет достаточно много некофинальных подмножеств, то P кофинально подобно $F(P)$.

В заключение ставится задача: Если множество P имеет достаточно много некофинальных подмножеств и Q кофинально подобно P, то содержит ли множество Q кофинальное подмножество R, которое имеет достаточно много некофинальных подмножеств? Формулируется также ослабленная форма этой задачи. В. Я. Арсенин

2887 К. Трансфинитные числа. Бахман (Transfinite Zahlen. Bachmann Berlin, . Göttingen, Heidelberg, Springer-Verl., 1955, VII + 204 S., 29.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 23, 1258 (нем.)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2888. Интегрируемость сумм тригонометрических рядов. I. Идзуми, Сато (Integrability of trigonometrical series. I. Izumi Shin-ichi, Sato Masako), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 258—263 (англ.)

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \cos nx$. Доказываются следующие теоремы:

1. Если функция $x^{\alpha-1}f(x)$ абсолютно интегрируема, то ряд $\sum_1^\infty n^{-\alpha}a_n$ сходится. Аналогично для ряда из синусов.

2. Если ряд $\sum_1^\infty n^{-\alpha}a_n$ абсолютно сходится, то функция $x^{\alpha-1}f(x)$ интегрируема в смысле Коши. Аналогично для ряда из синусов.

3. Если ряд $\sum_1^\infty n^{-\alpha}a_n$ сходится и при $M\to\infty$

$$\sum_{k=1}^\infty k^{\alpha-1}\max_{kM\leqslant m<(k+1)M}|s_m-s_{kM}|=o(1),$$

где $s_n=\sum_1^n k^{-\alpha}a_k$, то функция $x^{\alpha-1}f(x)$ интегрируема в смысле Коши.

4. Если $x^{\alpha-1}f(x)$ интегрируема в смысле Коши и при $M\to\infty$

$$\sum_{k=1}^M k^{-\alpha}\max_{k\pi/M\leqslant\delta<(k+1)\pi/M}\left|\int_{k\pi/M}^{\delta}x^{\alpha-1}f(x)\,dx\right|=o(1),$$

то ряд $\sum_1^\infty n^{-\alpha}a_n$ сходится. И. Е. Жак

2889. О некоторых тригонометрических рядах. XII. Идзуми (Some trigonometrical series. XII. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 4, 207—209 (англ.)

Рассматривается поведение в окрестности нуля суммы тригонометрического ряда с монотонно убывающими коэффициентами. Методы доказательства непосредственно примыкают к методам Салема при исследовании таких вопросов.

Теорема 3. Пусть $a(x)$ — положительная, убывающая, выпуклая функция на $(0,\infty)$ и $a(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Тогда при $x\to+0$

$$\sum_1^\infty a(n)\sin nx\sim x\int_0^{1/x}ta(t)\,dt,\qquad(1)$$

когда левая часть (1) неограничена или же правая часть (1) положительна при $x\geqslant 0$.

Теорема 5. Пусть $a(x)$ — положительная, убывающая к нулю функция такая, что $a(t)>ca(3t)$ при $t>0$, где $c=\text{const}>1$. Тогда справедливо то же заключение, что и в теореме 3.

Аналогичного типа теоремы доказываются и для рядов по косинусам.

Примечание референта. В формулировке теоремы 5 в статье написано, что постоянная $c<1$, тогда как в доказательстве используется $c>1$.

П. Л. Ульянов

2890. О некоторых тригонометрических рядах. XIII. Идзуми (Some trigonometrical series. XIII. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 5, 257—260 (англ.)

Статья посвящена тем же вопросам, что и некоторые предыдущие заметки автора (см., например, РЖМат, 1955, 2156). Доказывается теорема: Если $f(x)$ — 2π-периодическая функция, принадлежащая классу Lip α $(0<\alpha<1)$, то ряд

$$\sum_{n=2}^\infty\left|s_n(x)-f(x)\right|^2n^{-\beta}(\lg n)^{-\gamma}\qquad(1)$$

равномерно сходится на $[0,2\pi]$, где $s_n(x)$ — частная сумма n-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$, $\beta=1-2\alpha$, $\gamma>1$ при $\alpha<1/2$ и $\gamma>2$ при $1/2\leqslant\alpha<1$. Отмечается, что теми же рассуждениями, которыми доказана сформулированная выше теорема, можно показать, что ряд (1) сходится равномерно на $[0,2\pi]$ при $\beta=\gamma=0$, если выполнено условие $|f(x+t)-f(x)|\leqslant K|t|^{1/2}(\lg|t|^{-1})^{-\gamma}$ для всех x и t, где $K=\text{const}$ и $\gamma>1$. П. Л. Ульянов

2891. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций. Соколов И. Г., Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, **29**, № 1 (6), 82—87

Доказывается неравенство

$$L_n=\pi^{-1}\int_0^\pi|\sin(n+1/2)t\,|/\sin(t/2)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 0{,}40526\ln(2n+1)+0{,}98818+$$
$$+0{,}0120(2n+1)^{-2}+0{,}1(2n+1)^{-3}$$

для константы Лебега суммы Фурье. Приводятся таблица численных значений L_n для малых n и таблица значений для малых r константы

$$(4/\pi)K_r=(4/\pi)\sum_{l=0}^\infty(-1)^{l(r-1)}(2l+1)^{-(r+1)},$$

существенно входящей в точную оценку верхней грани наилучших приближений периодических функций, имеющих ограниченную производную порядка r, при помощи тригонометрических полиномов порядка n.

С. М. Никольский

2892. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. (Второе сообщение). Стечкин С. Б., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 4, 221—246

Продолжение одной из работ автора (РЖМат, 1953, 162). Рассматриваются определенные классы функций и находятся достаточные и необходимые (во всем классе) условия абсолютной сходимости рядов Фурье от функций данного класса. Будем писать $F(z)=\sum_1^\infty c_nz^n\in A$, если $\sum_1^\infty|c_n|<\infty$.

Теорема 1. Пусть числа $G_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ и $G_n\downarrow 0$. Для того чтобы из

$$E_n(F)=O(G_n)\qquad(1)$$

вытекало $F(z)\in A$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_1^\infty n^{-1/2}G_n<\infty$, где $E_n(F)$ — наилучшее приближение в круге $|z|\leqslant 1$ посредством многочленов степени $n-1$ комплексной функции $F(z)$, аналитической в $|z|<1$ и непрерывной в $|z|\leqslant 1$. Очевидно, что здесь за исходный класс функций берется класс тех функций, которые удовлетворяют условию (1).

Далее доказывается аналогичного типа теорема, когда приближение для $F(z)$ строится не по произвольным полиномам, а с помощью частных сумм ряда Тейлора функции $F(z)$.

Такого же типа теоремы доказываются и для класса функций, которые удовлетворяют условию

$$\omega_k(\delta,F)=O(\omega(\delta))\quad(0<\delta\leqslant\pi),$$

где $\omega_k(\delta,F)$ — k-й модуль непрерывности функции F, а $\omega(\delta)$ — наперед заданная положительная функция (удовлетворяющая, может быть, еще некоторым требованиям). В § 3 доказываются теоремы о точках абсолютной сходимости рядов Фурье. Например:

Теорема 5. Если последовательность чисел $\{G_n\}$ такова, что $G_n>0$, $G_n\downarrow 0$ и $\sum_1^\infty n^{-1/2}G_n=\infty$, то существует функция $F(z)$, аналитическая в круге $|z|<1$, для которой $E_n(F)=O(G_n)$ и в то же время ряды Фурье функций $\operatorname{Re}F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im}F(e^{ix})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости. П. Л. Ульянов

2893. О продолжении функций. Ульянов П. Л., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 184—185

Формулируется теорема: Если $f(x)\in L(0,2\pi)$ такова, что она и ее сопряженная $\bar f(x)$ имеют ограниченное

изменение на $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ и

$$\int_0^{\pi} |f(a+t) - f(a-t)|\, t^{-1}\, dt < \infty,$$

$$\int_0^{\pi} |f(b+t) - f(b-t)|\, t^{-1}\, dt < \infty,$$

то функцию $f(x)$ можно продолжить с $[a, b]$ на весь отрезок $[0,2\pi]$ так, чтобы она и ее сопряженная функция имели ограниченное изменение на $[0,2\pi]$. Пользуясь теоремой Ф. и М. Рисс, отсюда как следствие получаем: Если удовлетворены условия теоремы, то $f(x)$ и $\overline{f}(x)$ абсолютно непрерывны на $[c, d] \subset [a, b]$. Автор делает еще некоторые замечания о продолжении функций.

Н. К. Бари

2894. Теорема выпуклости для некоторых групп преобразований. Хиршман (A convexity theorem for certain groups of transformations. Hirschman I. I., Jr), J. Analyse Math., 1953, **2**, 209—218 (англ.)

Изучается преобразование $f(x) \to \Lambda(\sigma) f(x)$, определяемое для функции $f(x) \in L^p(0,2\pi)$ соотношениями:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \Lambda(\sigma) f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\lambda_n \sigma} e^{inx},$$
$$-\infty < \sigma < +\infty,$$

где $c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательность действительных постоянных $(-\infty < n < +\infty)$. Основной результат выражает свойство выпуклости нормы $\| \Lambda(\sigma) f \|_n$ по переменным σ и $1/n$ и гласит: Если преобразование таково, что для любых функций $g(x) \in L^p(0,2\pi)$ и $h(x) \in L^q(0,2\pi)$ имеют место неравенства

$$\| \Lambda(i\tau)\, g \|_p \leqslant A(\tau) \| g \|_p, \quad \| \Lambda(i\tau)\, h \|_q \leqslant A(\tau) \| h \|_q,$$

где $|\tau^{-1}| \lg \lg A(\tau)$ остается ограниченным при $|\tau| \to +\infty$, то

$$\| \Lambda(\sigma) f \|_n \leqslant B \| f \|_p^{1-\theta} \| \Lambda(\sigma_1) f \|_q^{\theta},$$

где $0 < \theta < 1$, $1/n = (1-\theta)/p + \theta/q$, $\sigma = \sigma_1 \theta$ и константа B зависит только от последовательности λ_n, от σ, p, q, θ, но не зависит от f. Доказательство состоит, как и в случае теоремы Рисса — Торина (ср. Thorin A., Comm. Sem. Math. Univ. Lund (Medd. Lunds Univ. mat. sem.), 1948, 9, 1—58), в сведении к свойствам выпуклости голоморфных функций.

Предыдущий результат применяется к изучению среднего $M_r(f, \rho) = [(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^r\, d\varphi]^{1/r}$, рассматриваемого как функция переменных $[\lg \rho, 1/r]$; к изучению $\| f_\sigma(x) \|_n$, где $f_\sigma(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (c_n (in)^{-\sigma})\, e^{inx}$, для которой приводится свойство выпуклости относительно $[\sigma, 1/n]$, и общее к изучению $\| f \|_r = [\int_S |f(x)|^r d\mu(x)]^{1/r}$.

P. Lelong

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 295.

2895. Суммируемость логарифмическими средними продифференцированных рядов Фурье. Моханти, Нанда (The summability by logarithmic means of the derived Fourier series. Mohanty R., Nanda M.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 53—58 (англ.)

Известно (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, § 3.9, пример 12), что если 2π-периодическая функция $f(t) \in L(0,2\pi)$ с рядом Фурье

$$f(t) \sim a_0/2 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (1)$$

в точке $t = x$ имеет конечную производную $f'(x)$, то ряд, полученный из (1) почленным дифференцированием, суммируем к $f'(x)$ методом первых логарифмических средних, т. е. при $n \to \infty$

$$t_n(x) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} k^{-1} S_k(x) \to f'(x),$$

где $S_k(x)$ — k-я частная сумма продифференцированного ряда.

Автор доказывает, что если в точке x

$$\int_t^{\pi} |g(u)|\, /\, u\, du = o(\ln t^{-1}) \quad (t \to 0), \qquad (2)$$

где

$$g(u) = \frac{f(x+u) - f(x-u)}{4 \sin(u/2)} - C,$$

то при $n \to \infty$ $t_n(x) \to C$; кроме того, при выполнении условия (2) $n^{-1} \Sigma_1^n S_k(x) = o(\ln n)$.

А. Ф. Тиман

2896. Роль функций Лебега в теории интерполяции Лагранжа. Эрдёш, Туран (On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation. Erdös P., Turán P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 1—2, 47—66 (англ.; рез. русс.)

Пусть A — треугольная матрица узлов $x_{kn} \in [-1,1]$ интерполяционной формулы Лагранжа $L_n(f; A) = \sum_{k=1}^n l_{kn}(x) f(x_{kn})$, рассматриваемой как операция из пространства $C[-1,1]$ в себя; пусть $M_n(A)$ означает соответствующую «константу Лебега», т. е. норму этой операции: $M_n(A) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \sum_{k=1}^n |l_{kn}(x)|$.

Обозначим через $A(\beta)$, где β — фиксированное число, $0 < \beta < 1$, класс всех матриц A, удовлетворяющих при произвольно малом $\varepsilon > 0$ условиям:

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} M_n(A)\, n^{-\beta-\varepsilon} < c_1(\varepsilon),$$

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} M_n(A)\, n^{-\beta+\varepsilon} > c_2(\varepsilon)$$

($c_1 < \infty$, $c_2 > 0$ зависят только от ε), и рассмотрим класс функций $\mathrm{Lip}\,\alpha$, где $\beta/(\beta+2) < \alpha < \beta$. Оказывается, что для функций $f(x)$ этого класса сходимость или расходимость интерполяционного процесса Лагранжа с матрицей узлов $A \in A(\beta)$ не определяется одной лишь быстротой роста норм $M_n(A)$ («грубая теория интерполяции»), но зависит еще от структуры самой матрицы A («тонкая теория интерполяции»). Именно, доказываются следующие теоремы: 1) если $\alpha > \beta/(\beta+2)$, то существует такая матрица $A_0 \in A(\beta)$, что интерполяционный процесс $L_n(f; A_0)$ сходится равномерно к каждой $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$; 2) если $\alpha < \beta$, то существуют такая матрица $A_1 \in A(\beta)$ и такая функция $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, что последовательность $L_n(f_1; A_1)$ неограничена в промежутке $[-1,1]$.

Авторы отмечают, что подобное деление вопросов сходимости-расходимости на «грубую» и «тонкую» теории возникает и при рассмотрении других линейных операций (ортогональные разложения, механические квадратуры и пр.).

В. Ф. Николаев

2897. О графо-аналитическом решении некоторых задач чебышевского приближения. Ремез Е. Я., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 409—412

Рассматриваются три задачи чебышевского типа: определить параметры a, b; λ или λ^* из условий: 1) $\max |y - ax - b| = L(a, b) = \min$, 2) $\max |y - \lambda x| = L_1(\lambda) = \min$, 3) $\max |1 - \lambda^* x / y| = L_2(\lambda^*) = \min$, причем максимумы берутся при $(x, y) \in G$, где G — плоское ограниченное замкнутое множество, а в задаче 3) еще $C_1 \leqslant x/y \leqslant C_2$ ($C_1 C_2 > 0$).

Решением задачи 1) является средняя линия полосы между двумя параллельными опорными прямыми D_1, D_2

выпуклой оболочки K_G множества G, удовлетворяющими условию: если $K_i = D_i \cap K_G\,(i=1,2)$ и A_i — ортогональная проекция K_i на ось Ox, то A_1 и A_2 должны иметь хотя бы одну общую точку. Задача может иметь больше одного решения.

Решением задачи 2) является угловой коэффициент λ_0 любой опорной прямой $y - y_0 = \lambda_0 x$ в точке P_0 выпуклой оболочки K_{G_0} множества $G_0 = G \cup G_1$, где G_1 — множество, симметричное с G относительно начала координат, а $P_0 \equiv (0, y_0)$ — точка пересечения контура множества K_{G_0} с положительным направлением оси Oy. Если P_0 — особая точка этого контура, то решение не единственно и пучок $y = \lambda_0 x$ дает совокупность всех решений. Величиной наилучшего приближения будет y_0.

Решение задачи 3) получается аналогично решению задачи 2) с заменой множества G на $G^* = \{(X, Y)\}$, где $Y \equiv 1$, $X = x/y$. Оказывается, что наилучшим значением параметра λ^* будет среднее гармоническое величин $(y/x)_{\min}$ и $(y/x)_{\max}$ на G. Максимальная относительная погрешность ε_0^* соотношения $y \approx \lambda_0^* x$ дается формулой $\varepsilon_0^* = [(x/y)_{\max} - (x/y)_{\min}] / [(x/y)_{\max} + (x/y)_{\min}]$.

С. И. Зуховицкий

2898. Метод графо-аналитического решения задач чебышевского приближения. Ремез Е. Я., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 71—90

Развернутое изложение результатов работы автора реф. 2897). Задача 1) изучается в более общей формулировке, когда G — ограниченное замкнутое $(n+1)$-мерное множество. Рассматривается вопрос о единственности решения задачи и даются практические примеры.

Б. А. Рымаренко

2899. О применении метода С. Н. Бернштейна в теории монотонных полиномов. Рымаренко Б. А., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 3, 373—375

Рассматривается полином $y_n(x)$ степени $\leqslant n$, монотонно возрастающий на отрезке $[-1, 1]$ (класс T_n) или на всей действительной оси (класс B_n), коэффициенты которого связаны $s \leqslant n$ линейными неоднородными соотношениями; ищется полином, имеющий наименьшее колебание на отрезке $[-1,1]$. Указывается, что при $s = 1$ и $y_n \in T_n$ производная экстремального полинома имеет вид

$$y_n'(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}u^2(x), \quad \alpha, \beta = 0 \text{ или } 1,$$

а при $s = 2$ и $y_n \in B_n$ тот же вид с $\alpha = \beta = 0$.

Рассматриваются некоторые частные задачи, решение которых основывается на указанном виде экстремального полинома.

Я. Л. Геронимус

2900. О некоторых экстремальных задачах теории монотонных полиномов. Рымаренко Б. А., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 4, 203—205

Тезисы доклада на заседании Ленинградского общегородского математического семинара, содержание которого опубликовано в заметке автора (реф. 2899).

2901. О некоторых экстремальных задачах для функций, монотонных на всей вещественной оси. Григорьева И. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), 6, 200—204

Решаются две экстремальные задачи. Пусть $f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2} y_{2m}(z)\,dz$, где $\{y_{2m}(x)\}$ — множество полиномов степени $2m$ с действительными коэффициентами, неотрицательных на всей действительной оси. Требуется найти среди данных полиномов экстремальный, т. е. минимизирующий осцилляцию η функции $f(x)$ на $(-\infty, \infty)$ (а также найти величину $\eta_{\min}$), если: 1) $f'(0) = A^2$ или 2) $f''(0) = B$ (A и B — данные числа). Экстремальный полином ищется в форме $y_{2m}(x) = U_{2m}(x) + V_{m-1}^2(x)$, где $U_m(x)$ и $V_{m-1}(x)$ — полиномы с действительными коэффициентами степени соответственно m и $m-1$. Решение задач имеет вид:

$$1)\ \eta_{\min} = A^2 \Big/ \sum_{k=0}^{m} \hat{H}_k^{0^2},$$

$$2)\ \eta_{\min} = B \Big/ \left(2\sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=0}^{m} \hat{H}_k^{0^2} \cdot \sum_{k=1}^{m} k\hat{H}_{k-1}^{0^2}}\right),$$

где $\hat{H}_k(x)$ — нормированный полином Эрмита, $\hat{H}_k^0 = \hat{H}_k(0)$ (Даются также выражения для коэффициентов экстремальных полиномов).

Примечание референта. 1) Окончательное выражение для $\eta_{\min}$ в первой задаче таково:

$$\eta_{\min} = \frac{m!!}{(m+1)!!} A^2 \sqrt{\pi} \quad \text{(для четного } m\text{)}.$$

Аналогичные формулы можно получить для $\eta_{\min}$ второй задачи и для коэффициентов экстремальных полиномов (для m четных и нечетных). 2) В рассмотренных задачах можно заранее утверждать, что экстремальный полином следует искать среди полиномов вида $y_{2m}(x) = U_m^2(x)$ (реф. 2899).

Б. А. Рымаренко

2902. К вопросу о формулах механических квадратур. Доронин Г. Я., Сб. науч. тр. Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 1955, № 1—2, 210—217

Дается точная оценка абсолютного значения дополнительной погрешности для функций класса $\mathrm{Lip}_K \alpha$, которая получается в результате замены несоизмеримых узлов квадратурной формулы значениями близкими к ним. Кроме того, используя прием С. М. Никольского (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 2, 165—177), автор получает наилучшую квадратурную формулу для классов функций с интегрируемым квадратом первой и второй производных.

К. В. Лащенов

2903. О некоторых свойствах ортогональных систем класса L^2 и о собственных функциях дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля. Микола ш (Über gewisse Eigenschaften orthogonaler Systeme der Klasse L^2 und die Eigenfunktionen Sturm — Liouvillescher Differentialgleichungen. Mikolás Miklós), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 1—2, 147—190 (нем.; рез. русс.)

Пусть последовательность функций $\{\varphi_i(x)\}$ сама или вместе с постоянной γ ортогональна и полна с весом $q(x)$ в (a, b), где $q(x)$ — почти всюду в (a, b) положительная функция. Пусть далее $w(x)$ — некоторая функция, $Q(x)$ — почти всюду положительная в (a, b) функция. Спрашивается, при каких условиях системы функций 1) $\{\varphi_i'(x)\}$ и 2) $\{c_k + \int_a^x w(t)\,\varphi_k(t)\,dt\}$ при надлежащем подборе постоянных c_k будут ортогональны с весом $Q(x)$ в (a, b)?

Приводятся необходимые и достаточные условия для первой и второй задач. В частности, если $Q(x)$ дифференцируема,

$$q^{-1}(x)\,[Q(x)\varphi_k'(x)]' \in L_q^2$$

$$\lim_{x \to a+0} [Q(x)\varphi_m(x)\varphi_n'] = \lim_{x \to b-0} [Q(x)\varphi_m(x)\varphi_n'(x)]$$

$$(m, n = 1, 2, \ldots),$$

то система $\{\varphi_k'(x)\}$ будет ортогональна в (a, b) с весом $Q(x)$ тогда и только тогда, когда

$$[Q(x)\varphi_k'(x)]' = \rho_k q(x)\varphi_k(x) \quad (a < x < b,\ k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\rho_k = -\int_a^b Q(x)[\varphi_k'(x)]^2\,dx \Big/ \int_a^b Q(x)[\varphi_k(x)]^2\,dx.$$

Выясняются некоторые характеристические свойства классических ортогональных систем: тригонометрической, полиномов Чебышева, Якоби, Лагерра и др.

В заключение доказывается теорема: Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ и ее разложение в ряд Фурье по $\{\varphi_k(x)\}$ — ортогональной и полной системе в (a, b) с весом $Q(x)$, $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$ — при дифференцировании переходит также в ряд по ортогональным функциям, то его сумма почти всюду сходится к $f(x)$, а производный ряд почти всюду суммируется C_1 к $f'(x)$, причем суммируемость равномерна в любом замкнутом интервале непрерывности $f'(x)$. Б. В. Гнеденко

2904. **Об одном простом методе построения биортогональных систем. Геронимус Я. Л.**, Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 267—272

Пусть система функций $\{P_n(z)\}_0^\infty$ ортогональна относительно некоторого линейного функционала $\mathfrak{S}$, т. е. $\mathfrak{S}\{P_i(z)\overline{P_k(z)}\} = \delta_{ik}$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$, и пусть $\mathfrak{A} = \|\alpha_{ik}\|_{i,k=0}^\infty$ — произвольная треугольная матрица с $\alpha_{ik} = 0$ при $k < i$, $\alpha_{ik} = a_{ik}$ при $k \geqslant i$.

Дается метод построения двух систем функций $\{u_k(z)\}_0^\infty$ и $\{v_k(z)\}_0^\infty$, образующих систему, биортогональную относительно того же функционала, т. е. удовлетворяющую соотношениям $\mathfrak{S}\{v_k(z)\overline{u_r(z)}\} = \delta_{kr}$ $(k, r = 0, 1, \ldots)$. Именно $v_k(z) \sim \Sigma_{n=k}^\infty a_{kn}P_n(z)$ (вопрос о сходимости этих рядов в работе не рассматривается) и $u_r(z) = |\beta_{ik}|_{i,k=0}^r$, где $\beta_{0k} = P_k(z)$, $\beta_{ik} = \alpha_{i-1,k}$ при $i \geqslant 1$.

Указываются различные частные системы биортогональных функций $\{v_k(z)\}_0^\infty$ и $\{u_k(z)\}_0^\infty$, среди которых отмечаются система П. Л. Чебышева (Собр. соч., т. II, 1947, 245—314) и система А. А. Маркова (Избр. тр., 1948, 146—230). Б. А. Рымаренко

2905 Д. **К теории множителей, преобразующих ряды Фурье. Скворцова М. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

2906 Д. **Об одном специальном представлении функций многих переменных. Игнатьева А. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т., М., 1955

См. также: 2682 К, 2718, 2923, 2925, 2930, 2932, 2940, 2976, 3105, 3107, 3112, 3139, 3141, 3154, 3164 К, 3198

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2907. **Оценки для производных целых функций конечного порядка и нормального типа. Джрбашян М. М.**, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1955, 8, № 2, 1—16 (рез. арм.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \geqslant 1/2$ и нормального типа σ, удовлетворяющая условию

$$\sup_{\pi/2\rho \leqslant |\arg z| \leqslant \pi} |f(z)| = M < \infty.$$

Для производных $f(x)$ имеют место неравенства

$$|f^{(k)}(0)| \leqslant MA_k\sigma^{k/\rho},\quad \rho \geqslant 1/2.$$

$$|f^{(k)}(re^{\pm\pi i/2\rho})| \leqslant MB_k\sigma^k r^{k(\rho-1)},\quad r > 0,\ 1/2 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

$$|f^{(k)}(re^{\pm\pi i/2\rho})| \leqslant MB_k\sigma^k\{r + (k/\sigma)^{1/\rho}\}^{(\rho-1)k},\quad r > 0,\ \rho \geqslant 1.$$

Здесь

$$A_k = \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}e^{k/\rho}\right)\left(\frac{\rho}{k}\right)^{k/\rho}\frac{k!}{2},$$

$$B_k = \frac{1 + e^k}{2}\cdot m_0^{-k}\frac{k!}{k^k},$$

$$m_0 = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\rho} \frac{\sin(\pi/2\rho - \theta)}{\cos\rho\theta\sin(\pi/2\rho + \rho\theta - \theta)}.$$

Подобные же неравенства установлены и для целых функций порядка $\rho \geqslant 1$, ограниченных вне двух симметричных углов. Постоянные B_k не являются наилучшими, как показывает случай $\rho = 1$. М. А. Евграфов

2908. **Некоторые экстремальные задачи для целых функций. Джрбашян М. М., Тавадян А. Б.**, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1954, 7, № 5, 1—17 (рез. арм.)

Обозначим через $W_\sigma\{a_{2p-2}, a_{2q-1}\}$ класс всех целых функций $f(z)$ экспоненциального типа с показателем $\leqslant\sigma$, для которых существует интеграл $\mu(f) = \{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx\}^{1/2} < +\infty$ и которые удовлетворяют дополнительно условиям: $f^{(2k)}(0) = a_{2k}$ и $f^{(2\nu+1)}(0) = a_{2\nu+1}$, $k = 0, \ldots, p-1$; $\nu = 0, \ldots, q-1$ (a_{2k} и $a_{2\nu+1}$ — заданные числа). Через $W_\sigma\{a_{2p-2}\}$ и $W_\sigma\{a_{2q-1}\}$ обозначаются соответствующие классы, если заданы значения производных только четного порядка или только нечетного.

Ставится и решается следующая задача: среди всех функций, принадлежащих к любому из классов $W_\sigma\{a_{2p-2}, a_{2q-1}\}$; $W_\sigma\{a_{2p-2}\}$ или $W_\sigma\{a_{2q-1}\}$, найти ту, для которой $\mu(f)$ принимает минимальное значение. Единственная экстремальная функция (в классе $W_\sigma\{a_{2p-2}, a_{2q-1}\}$) имеет вид:

$$f_0(z) = \int_{-\sigma}^{+\sigma}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{2k}\hat{X}_{2k}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \sum_{k=0}^{q-1}\alpha_{2k+1}X_{2k+1}\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right\}e^{iuz}\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\alpha_{2k}\sqrt{(4k+1)\pi\sigma}\,\frac{Y_{2k} + \frac{1}{2}(\sigma z)}{\sqrt{z}} +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\alpha_{2k+1}\sqrt{(4k+3)}\,\frac{Y_{2k} + \frac{3}{2}(\sigma z)}{\sqrt{z}},$$

где $\hat{X}_m$ — нормированный полином Лежандра, $Y_{n+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из формул:

$$\alpha_{2k} = b_0^{(2k)}\cdot\mu_0 + b_2^{(2k)}\mu_2 + \ldots + b_{2k}^{(2k)}\mu_{2k},\ \alpha_{2k+1} =$$

$$= b_1^{(2k+1)}\mu_1 + \ldots + b_{2k+1}^{(2k+1)}\mu_{2k+1},\ \mu_{2k} = (-1)^k\frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}},$$

$$\mu_{2k+1} = (-1)^{k+1}\frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}},$$

b_i^j — коэффициент при x^i многочлена $\hat{X}_j$.

Кроме того,

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left\{2\pi\sigma\left[\sum_{k=0}^{p-1} |\alpha_{2k}|^2 + \sum_{k=0}^{q-1} |\alpha_{2k+1}|^2\right]\right\}^{1/2}.$$

Решение задачи вытекает из теоремы Планшереля: $\mu(f) = \{2\pi \int_{-\sigma}^{+\sigma} |\varphi(u)|^2\, du\}^{1/2}$, представления Палея — Винера: $f(z) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{iuz}\varphi(u)\, du$ и экстремального свойства частной суммы ряда Фурье по ортогональной системе. Вводится также класс $D_{1/2}(\sigma, a_r)$, состоящий из целых функций $f(z)$ порядка $1/2$ и типа $\leqslant\sigma$ с заданными первыми производными и конечным $\mu(f)$. Для него дается представление, вытекающее из формулы Палея — Винера и решается экстремальная задача, аналогичная той, что решалась для $W_\sigma(a_{2p-2}, a_{2q-1})$. Из решения экстремальных задач вытекают теоремы, дающие необходимый и достаточный признак того, чтобы данные числа $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, были значениями последовательных производных функции класса W_σ или $D_{1/2}(\sigma)$. С. Я. Хавинсон

2909. О нулях производной рациональной функции. Байшанский (О нулама извода рационалне функције. Бајшански Богдан), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 131—134 (серб.; рез. франц.)

Доказывается следующее обобщение теоремы Люка — Гаусса: Если C_n и C_p — наименьшие выпуклые многоугольники, содержащие соответственно нули и полюсы рациональной функции, то в случае, когда C_n и C_p не имеют общих точек, все нули производной этой рациональной функции содержатся в двух областях, являющихся тенями каждого из многоугольников C_n и C_p при освещении из вершин другого. В. И. Левин

2910. О теореме Какейя. Кришная (On Kakeya's theorem. Krishnaiah P. V.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 314—319 (англ.)

Известна теорема Какейя о нулях многочлена: Если $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n > 0$, то все корни уравнения $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n = 0$ удовлетворяют неравенству $|z| > 1$. Дается распространение этой теоремы на степенные ряды.

Основной результат:

Пусть при $r \geqslant 1$: 1) $a_{r-1} - a_r = |a_{r-1} - a_r|\, e^{i(\alpha+\theta r)}$, где $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$, $|\theta_r| \leqslant \arccos(\cos^r\theta)$, α — произвольно и фиксировано; 2) $\lim_{r\to\infty} a_r = \rho e^{i(\alpha+\beta)}$, где $|\beta| \leqslant 1/2\,\pi$, $\rho \geqslant 0$. Тогда все корни уравнения $f(z) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = 0$ удовлетворяют неравенству $|z| \geqslant \cos\theta$.

Если же, кроме того, $(a_0 - a_1) \neq 0$ и хотя бы одна из разностей $(a_1 - a_2)$ или $(a_2 - a_3)$ также отлична от нуля, то все корни уравнения $f(z) = 0$ удовлетворяют неравенству $|z| > \cos\theta$. На примерах показано, что при невыполнении последнего условия в оценке модуля корней появляется знак равенства. Метод доказательства незначительно отличается от метода доказательства в алгебраическом случае. На стр. 316 имеется опечатка: вместо z_r должно быть z^r.

А. В. Батырев

2911. О свободной границе с постоянными напряжениями плоской упругой области в равновесии. Арф (Sur les frontières libres à tensions constantes d'un milieu élastique plan en équilibre. Arf C.), Istambul Üniv. fen. fak. mec., 1954, **A19**, № 2, 119—132 (франц.; рез. турец.)

В соответствии с формулами Колосова тензор напряжений представляется в виде

$$\sigma_x = \mathrm{Re}\,[2f(z) + \psi(z) - \overline{z}f'(z)],$$

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\,[2f(z) - \psi(z) + \overline{z}f'(z)], \qquad (1)$$

$$\tau = \mathrm{Im}\,[-\psi(z) + \overline{z}f'(z)],$$

где $f(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции от $z = x + iy$.

Рассматривается задача об определении функций $f(z)$ и $\psi(z)$ таких, что свободная от внешних усилий граница плоской области, находящейся в упругом равновесии, обладает таким свойством, что вдоль нее напряжения остаются постоянными. Это означает, что на указанной границе должны выполняться следующие равенства:

$$-\sigma_x\, dy + \tau dx = 0,\ \tau\, dy + \sigma_y\, dx = 0, \qquad (2)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\alpha = \mathrm{const}.$$

Равенства (2) записываются в комплексной форме в виде следующих соотношений:

$$2\,\mathrm{Re}\,[f(z)]\, dz - [\overline{\psi}(z) - z\overline{f'}(z)]\, dz = 0,\ \mathrm{Re}\, f(z) = \alpha. \qquad (3)$$

Затем последовательно рассматриваются всевозможные случаи, для которых выполняются соотношения (3), и находятся соответствующие им формы границ областей, находящихся в упругом равновесии.

Г. Н. Положий

2912. Нелинейная проблема Гильберта для системы функций. Погожельский (Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 1, 3—5 (франц.)

См. РЖМат., 1955, 2639.

2913. Смешанные граничные задачи в теории потенциала. Хут (Mixed boundary value problems in potential theory. Huth J. H.), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 2, 121—124 (англ.)

Смешанные задачи теории потенциала можно привести к задаче Римана — Гильберта, решение которой может содержать произвольные постоянные (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946). В реферируемой статье эти постоянные интерпретируются в терминах диполей, в случае следующей задачи: найти гармоническую в круге функцию, если на одной части границы задаются ее значения, а на оставшейся части — значения нормальной производной. Г. Ф. Манджавидзе

2914. Вариация функционалов области. Шиффер (Variation of domain functionals. Schiffer M.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 4, 303—328 (англ.)

Обзор вариационных методов, применяющихся при изучении некоторых проблем теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. В § 1 приводятся примеры функционалов области и выводится (формально) формула Адамара для вариации функции Грина уравнения Лапласа (область изменяется путем сдвига каждой точки границы по нормали в границе). Делается замечание о том, что, в то время как граничные задачи дифференциальных уравнений могут быть решены при довольно слабых ограничениях на границу области, вариационные формулы типа адамаровской требуют значительно более жестких ограничений на границу. В § 2 дается обзор некоторых экстремальных задач теории аналитических функций, решенных вариационными методами. Показывается, как видоизменить формулу Адамара в случае двумерного уравнения Лапласа, чтобы сделать ее пригодной для произвольных областей.

В § 3 выводятся формулы для вариации функции Грина при более общих, чем в § 1, деформациях области. Даются примеры исследования некоторых экстремальных задач вариационным методом. Существование экстремальной области для рассматриваемого функционала доказывается путем привлечения побочных со-

ображений (принцип компактности, например), затем путём приравнивания вариации нулю получается некоторое соотношение, из которого можно получить сведения о структуре экстремальной области. Рассказано о приложениях, сделанных в ряде работ, методов вариации функционалов области к гидродинамической проблеме «свободных границ».

В § 4 приводятся формулы для второй вариации функции Грина, полученные в недавнее время.

В §§ 5—6 описывается в самых общих чертах метод трансплантации (пересадки), развитый в работах Шиффера и др. Рассмотрим его на следующем примере. Пусть B — область (в трехмерном пространстве) с дополнением D, $F(B)$ — класс непрерывно дифференцируемых в D функций $U(x)$, принимающих на границе D значение 1 и имеющих порядок $1/r$ в бесконечности; тогда электростатическая емкость $B: K(B) = \min_{U\in F} \frac{1}{4\pi}\iiint_D (\nabla U)^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3$. Функция $\psi(x)$, для которой достигается min, называется потенциалом (the conductor potential) B. Рассмотрим деформацию $B: x_1' = tx_1$; $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. Получим континуум областей $B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $B(1) = B$. Введем также обозначения $K[B(t)] = K(t)$ и ψ_t — потенциал $B(t)$. Функция $\psi_{t_0}\left(\frac{t_0}{t}x_1, x_2, x_3\right)$ (t_0 — фиксировано) входит в класс $F(t)$ для $B(t)$ и поэтому дает возможность оценить $K(t)$ сверху. (В этой «пересадке» экстремальной функции ψ_{t_0} в другую область $B(t)$ и состоит сущность метода). Получается неравенство: $t^{-1}K(t) \leqslant t^{-2}A + B$, где A и B зависят лишь от t_0, но не от t. Из этого неравенства следует выпуклость сверху $t^{-1}K(t)$, как функции от t^{-2}, т. е. метод приводит к определенному заключению о подведении функционала $K(t)$.

Рассматриваются и более общие деформации, чем $x_1' = tx_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. Существенным здесь является то, что функционал определен, как минимум неотрицательного интеграла. С. Я. Хавинсон

2915. О разделенной разности для ограниченных однолистных функций. Илиев Любомир, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 861—862

Рассматривается класс $S_M^{(k)}$ регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ k-симметричных функций

$$f_k(z) = z + a_1^{(k)}z^{k+1} + a_2^{(k)}z^{2k+1} + \ldots, |f_k(z)| < M.$$

На основании неравенств Базилевича (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 2) и Неванлинна (Nevanlinna, Overs. av Finska Vetensc. Förch., 1917, 62) доказывается неравенство

$$|[f_k(z_1) - f_k(z_2)]/(z_1 - z_2)| \geqslant$$
$$\geqslant M^2(r^2-1)[(1+r^k)\sqrt{M^k} -$$
$$-\sqrt{M^k(1+r^k)^2 - 4r^k}\,]^{2/k} / \{[(1+r^k)\sqrt{M^k} +$$
$$+\sqrt{M^k(1+r^k)^2 - 4r^k}\,]^{2/k} - [(1+r^k)\sqrt{M^k} -$$
$$-\sqrt{M^k(1+r^k)^2 - 4r^k}\,]^{2/k}\}$$

являющееся точным только для $k = 1$ и $k = 2$.

И. Е. Базилевич

2916. Об одном методе Нехари. Аленицын Ю. Е., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2, 71—79

В работе «Extremal problems in the theory of bounded analytic functions» (Amer. J. Math., 1951, **73**, № 1), повторенной в журнале Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57, № 5 и книге Conformal mapping, Нехари применяет новый метод решения экстремальных проблем в классе B_R функций $\varphi(z)$, однозначных и регулярных в конечной n-связной области, ограниченной n замкнутыми аналитическими кривыми Жордана, и подчиненных условию $|\mathrm{Re}\varphi(z)| \leqslant 1$. При этом он рассматривает первую и вторую вариацию интеграла по контуру вида $I(\alpha) = \int_C |P(z,\alpha)|\, ds$, опуская «элементарные вычисления». Автор отмечает нестрогость вывода формулы первой вариации в книге Conformal mapping и неверность формулы второй вариации, а потому и необоснованность опирающихся на последнюю обобщений на случай n-связной области известных в случае круга предложений (§§ 5 и 6 первой из указанных работ). В связи с этим он строго выводит формулы первой и второй вариации указанного интеграла, а также уточняет высказанное Нехари утверждение о множестве экстремальных функций. И. Е. Базилевич

2917. Конформные отображения с наименьшим искажением. Хелфенстейн (Conformal maps with least distortion. Helfenstein H. G.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 306—313 (англ.)

Пусть D — конечная односвязная область на некоторой поверхности S, конформно отображаемая на $|z|<1$ (причем прообраз P точки $z=0$ задан), $\gamma(z) = |dz|/ds$ — искажение масштаба при этом отображении, $\{w = f(z)\}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \mu/\gamma(0)$ (где $\mu > 0$ фиксировано) — семейство функций, регулярных в $|z| < 1$, $\psi(z) = \ln\gamma(z)$, $\varphi(z) = \ln|f'(z)|$.

Рассматривается связанная с вопросом о построении географических карт задача о минимуме интеграла

$$I = \iint_{|z|<1} (\varphi + \psi - C)^2\, dx\, dy$$

при варьировании $\varphi(z)$ и постоянной C. При предположении, что $\psi(z)$ имеет в $|z| < 1$ ограниченные вторые производные, доказано существование решения задачи и получены выражения для C и коэффициентов разложения $\ln f'(z)$ в ряд Тейлора через соответствующие зависящие от $\psi(z)$ интегралы. Вопрос об однолистности экстремальной функции не решается. В качестве примера показано, что при отображениях круговой области на сфере, переводящих в точку $w = 0$ центр области, минимум I доставляет отображение на круг при помощи симметричной стереографической проекции. П. П. Куфарев

2918. Об одной вариационной задаче теории однолистных выпуклых в кольце функций. Дундученко Л. Е., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), **16**, 253—274

Функция $f(z)$, регулярная в кольце $0 < q < |z| < 1$ и однолистно его отображающая, называется выпуклой, если каждую окружность $|z| = r$ ($q < r < 1$) она отображает на простую замкнутую выпуклую кривую (Зморович В. А., Докл. АН СССР, 1952, 86, № 3).

В классе функций, регулярных, однолистных и выпуклых в кольце $0 < q < |z| < 1$, устанавливаются оценки кривизны $K_{r,q}(\alpha)$ линий уровня (образов окружностей $|z| = r$, $q < r < 1$, $z = re^{i\alpha}$):

$$\left(\frac{1-r}{1+r} + \frac{r-q}{r+q} - 1\right)\frac{(1-r)^2}{r} <$$
$$< K_{r,q}(\alpha) < \left(\frac{1+r}{1-r} + \frac{r+q}{r-q} - 1\right)\frac{(1+r)^2}{r}.$$

Оценки эти не являются точными. В названном классе функций устанавливаются также приближенные формулы абсолютных экстремумов кривизны линий уровня в предположении достаточной малости числа q, позволяющем пренебречь членами со степенями q, показатели которых больше двух. Доказательства основаны на использовании структурной

формулы функций рассматриваемого класса, установленной В. А. Зморовичем (см. предыдущую ссылку), и на применении одного, принадлежащего ему, вариационного метода. Г. В. Корицкий

2919. К теории однолистных функций. Рахманов Б. Н., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 369—371

Пусть K — класс регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, однолистно отображающих этот круг на выпуклые области. Пусть $K+S$ есть класс функций $\Phi_1(z)=|f(z)+zf'(z)|/2$, где $f(z)\in K$. Ранее автором (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 2, 209—211) доказано, что функции класса $K+S$ однолистны в $|z|<1$. Здесь устанавливаются следующие результаты (указывается лишь идея их доказательства). Если $\Phi_1(z)\in K+S$, то в $|z|<1$ имеем $|\arg\Phi_1'(z)|\leqslant 3\arcsin|z|$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{\Phi_1(z)}{z}\right\}\leqslant\frac{2-|z|}{2(1-|z|)^2}$, а в $|z|\leqslant 1/2$ $\operatorname{Re}\left\{\frac{\Phi_1(z)}{z}\right\}\geqslant\frac{2+|z|}{2(1+|z|)^2}$, и эти оценки точные. Если $\Phi_1(z)=z+\Sigma_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in K+S$, то функция $S_n(z)=z+\Sigma_{k=2}^{n}a_kz^k$ при $n\geqslant 11$ однолистна в $|z|<1-3\ln n/n$, а при $n\geqslant 9$ не имеет нулей в $0<|z|<1-2\ln n/n$. Если $f(z)\in K$, то функция

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{(c+1)e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}\left[(c+1)f(e^{i\alpha}z)-f(e^{-i\alpha}z)\right],$$
$$c\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant\pi/2,$$

однолистна в $|z|<1$. Этот результат переносится и на аналогичный класс функций, порождаемый функциями $F(z)=1/z+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots$, однолистно отображающими круг $|z|<1$ на область с выпуклым дополнением. Ряд точных результатов указывается для функций $\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, регулярных в $|z|<1$ и удовлетворяющих в этом круге условию $|\arg[z\varphi'(z)/\varphi(z)]|\leqslant\pi/2n$, $n=1,2,\ldots$

Примечание референта. Результаты автора для функций $\varphi(z)$ при $n=1$ известны, они являются классическими результатами теории регулярных функций с положительной действительной частью и теории однолистных функций. Ю. Е. Аленицын

2920. Два достаточных условия однолистности отображения. Рогожин В. С., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 135—137

Устанавливаются некоторые простые достаточные условия однолистности отображения, осуществляемого аналитической функцией комплексного переменного.

Теорема 1. Пусть в области $|z|>r$, $(r<1)$, имеем функцию $f(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots$, удовлетворяющую условию $\Delta\arg f'(z)<\pi-4\arctg r$, где $\Delta\arg f'(z)$ — колебание $\arg f'(z)$, для всех $|z|>r$, тогда $f(z)$ однолистна в области $|z|>1$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ регулярна в области D такой, что две любые ее точки z_1 и z_2 можно соединить дугой окружности, принадлежащей области, и пусть $l(z_1,z_2)$ — нижняя грань длин указанных дуг для фиксированной пары точек области, $\varphi(z_1,z_2)$ — нижняя грань радианных мер этих дуг, d_0 — верхняя грань множества всех $l(z_1,z_2)$ и θ_0 — верхняя грань множества всех $\varphi(z_1,z_2)$. Тогда, если $|f''(z)/f'(z)|<(\pi-\theta_0)/d_0$, то $f(z)$ однолистна в области D.

Доказательства обеих теорем основаны на применении известной интегральной теоремы о среднем значении в комплексной области, принадлежащей Вейерштрассу. Г. В. Корицкий

2921. Конформное отображение единичного круга на неналегающие друг на друга области. Колбина Л. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 5, 37—43

Вариационным методом Г. М. Голузина (Матем. сб., 1951, 29, № 2, 455) получено решение следующих экстремальных задач:

1) Пусть $a_k(k=1,2,3)$ — различные точки плоскости z, $z=f_k(\zeta)$, $f_k(0)=a_k$ — функции, отображающие конформно и однолистно $|\zeta|<1$ на неналегающие друг на друга области, $\alpha_k>0$ — заданные постоянные. Показано, что максимум $I=\Pi_{k=1}^{3}|f_k'(0)|^{\alpha_k}$ относительно всевозможных систем функций $f_k(\zeta)$, удовлетворяющих указанным условиям, равен:

$$I_{\max}=A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}|a_1-a_2|^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}|a_2-a_3|^{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1}\times$$
$$\times|a_3-a_1|^{\alpha_3+\alpha_1-\alpha_2},$$

где $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ — некоторая функция α_1, α_2, α_3.

2) Пусть $f_k(\zeta)$ $(k=1,2,3)$ отображают $|\zeta|<1$ на области B_k так, что $f_1(0)=a$, $f_2(0)=-a$, $f_3(0)=0$ (a — задано), $f_4(\zeta)$, $f_4(\infty)=\infty$, отображает $|\zeta|>1$ на B_4, и области B_1, B_2, B_3, B_4 не налегают друг на друга. Определен

$$I_0=\max|f_1'(0)\,f_2'(0)\,f_3'(0)\,[f_4'(\infty)]^{-1}|:\ I_0=a^2/4.$$

В обеих задачах указан вид экстремальных функций. П. П. Куфарев

2922. О возможности приближения непрерывных функций рациональными. Батырев А. В., Уч. зап. Ростовск.-н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 99—104

Приводятся условия возможности равномерного приближения непрерывных функций комплексного переменного рациональными функциями на замкнутом и нигде не плотном множестве E с любой степенью точности.

Пусть K_δ есть круг радиуса δ с центром в точке $\zeta\in E$. Обозначим через $a_\delta(\zeta)$ точную верхнюю границу емкостей ограниченных замкнутых множеств, граница каждого из которых есть жорданова кривая, принадлежащая пересечению круга K_δ и дополнения множества E. Пусть $a_\delta=\min\{a_\delta(\zeta)\}$ для некоторого конечного покрытия множества E кругами K_δ. Тогда для равномерного приближения достаточно, чтобы $\lim_{\text{при }\delta\to 0}\delta^2/a\delta=0$, и необходимо, чтобы $\overline{\lim_{\text{при }\delta\to 0}}\,\delta^2/a_\delta=c$, где c есть конечное число.

Доказательства и результаты аналогичны результатам С. Н. Мергеляна (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 2 (48), 31—122) и полностью на них основаны. Имеются опечатки. П. К. Суетин

2923. Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области. Ремез Е. Я., Укр. матем. ж., 1953, 5, № 1, 3—49

Автор рассматривает «систему» (вообще говоря, несчетно-бесконечную) несовместных линейных уравнений $\Sigma_{k=1}^{n}a_kz_k=l$, где $Q\equiv(a_1,a_2,\ldots,a_n,l)$ пробегает ограниченное множество G_0 в унитарном пространстве R_{n+1} и $(z_1,z_2,\ldots,z_n)\equiv z\in R_n$. Полагая $l-\Sigma_{k=1}^{n}a_kz_k\equiv\delta(Q,z)$, имеем задачу

$$\sup_{Q\in G_0}|\delta(Q,z)|\equiv L(z)=\min. \qquad (1)$$

К множеству G_0 применяются следующие операции пополнения, оставляющие без изменения величину $L(z)$ и ее минимум, равный ρ: 1) G_0 заменяется замыканием G_0^*; 2) понимая под G_φ^* $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ множество точек $Q\cdot e^{\varphi i}$ $(Q\in G_0^*)$, полагаем $\bigcup_\varphi G_\varphi^*\equiv G$; 3) определяется выпуклая оболочка K_G множества G, которая заменяет G_0 в формулировке задачи (1). Решение

$z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ задачи (1) геометрически определяется построением в R_{n+1} «опорного линейного образа» (комплексный аналог опорной плоскости) $l = \Sigma z_{k0} a_k + \xi_0$ к выпуклому телу K_G в пограничной его точке $Q_0 = (0, 0, \ldots, 0, l_0)$ $(l_0 = \xi_0 > 0)$, причем $\xi_0 = \rho$. При исследовании свойств решений большую роль играют барицентрические представления

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \widetilde{Q}_j \ (\mu_j > 0, \cdot \sum \mu_j = 1; \ 1 \leqslant r \leqslant 2n+1) \quad (2)$$

точки Q_0 через системы «барицентрически независимых» точек $\widetilde{Q}_j = (\widetilde{a}_{1j}, \ldots, \widetilde{a}_{nj}, \widetilde{l}_j) \in G$. Обозначая через $Q_j = \widetilde{Q}_j l^{-i\varphi_j} = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}, l_j)$ соответствующие точки множества G_0^*, имеем уклонения $\widetilde{\delta}_{j0} = \delta(\widetilde{Q}_j, z_0) = \rho$; $\delta_{j0} = \delta(Q_j, z_0) = \rho e^{-i\varphi_j}$. Каждому представлению (2) соответствует соотношение линейной зависимости «с ориентированными комплексными коэффициентами» между линейными формами $f_j(z) \equiv f(Q_j, z) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k$ $(j = \overline{1, r})$:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{sgn} \widetilde{\delta}_{j0} \cdot f_j(z) \equiv 0 \ (\mu_j > 0; \ \sum \mu_j = 1) \quad (3).$$

Соответствующие подсистемы $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$ системы несовместных уравнений G_0^* автор называет неприводимыми чебышевскими подсистемами, а каждую из соответствующих точек Q_j — чебышевской точкой уклонения задачи (1).

Устанавливается ряд новых результатов и аналогов известных теорем (фундаментальной теоремы Чебышева — Маркова и др.).

Оказывается, что в случае вещественного и притом конечного G_0 совокупность фиксированных точек уклонения (т. е. таких точек $Q \in G_0^*$, которым при любом из решений $z = z_0$ задачи (1) соответствует уклонение $\delta(Q, z)$ с модулем $|\delta| = \rho$) исчерпывается всегда чебышевскими точками уклонения, в случае же множества G_0, невещественного или бесконечного, возможны и фиксированные точки уклонения, не являющиеся чебышевскими.

В последней IV главе допускается, что при $z = z'$ уклонения $\delta_j' = \delta(Q_j, z')$ для уравнений $Q_j \in G_0^*$ $(j = \overline{1, m})$ все отличны от 0.

Автор говорит, что они образуют лимитирующую систему уклонений, если ни при каком выборе поправки $\Delta z' = (\Delta z_1', \ldots, \Delta z_n')$ величины $|\delta_j'|$ $(j = \overline{1, m})$ не могут быть уменьшены все одновременно. Необходимым и достаточным условием этого является существование соотношения, сходного с (3). При этом всегда может быть выделена хотя бы одна неприводимая подсистема лимитирующих уклонений, для которой все $\mu_j > 0$ и, кроме того, дальнейшее сокращение подсистемы $\{Q_j\}$ уже невозможно. Из данного критерия следует аналог теоремы Валле Пуссена о нижней границе величины ρ.

В отличие от вещественного случая, в общем случае комплексной задачи (1) чебышевская подсистема $\{Q_j\}$ $(j = \overline{1, r})$ системы уравнений G_0^* не будет обязательно обнаруживать лимитирующей системы уклонений — при любой степени близости z' ко множеству решений $\{z_0\}$. Все же при $\|z' - z_0\| \to 0$ уклонения δ_j' $(j = \overline{1, r})$ будут по меньшей мере, составлять «квазилимитирующую» систему, позволяющую устанавливать нижнюю границу для ρ с точностью до поддающейся оценке бесконечно малой величины. Библ. 24 назв. Б. А. Рымаренко

2924. Некоторые свойства наилучших приближений в комплексной области. Иванов В. В., Тр. Новочеркас. политехн. ин-та, 1955, 28 (42), 17—25

Указывается пример аналитической в единичном круге функции, удовлетворяющей в замкнутом круге условию Липшица порядка $\alpha = 1$, для которой наилучшее равномерное приближение многочленами имеет порядок $1/n$. С помощью сумм типа сумм Фейера и Валле — Пуссена для рядов по многочленам Фабера результат переносится на произвольную область с правильной аналитической границей. Имеются неточные формулировки. Так неравенство, приводимое на стр. 17, справедливо лишь при дополнительном условии, что приближаемые функции удовлетворяют условию Липшица порядка α с одной и той же постоянной. Аналогичное дополнение необходимо и в теореме 4. П. К. Суетин

2925. О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами. Гельфонд А. О., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 41—65

Обзор результатов о приближении функций многочленами с целочисленными коэффициентами. Приведем два характерных результата, принадлежащих автору:

1. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ со своими первыми m производными, все числа $f^{(k)}(0)/k!$, $f^{(k)}(1)/k!$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ целые и модуль непрерывности $f^{(m)}(x)$ равен $\omega(\delta)$, то при $n > n_0$ существует многочлен $Q_n(x)$ с целыми коэффициентами, степени не выше n, такой, что

$$|f^{(k)}(x) - Q_n^{(k)}(x)| < Cn^{k-m}\omega(1/n), \ 0 \leqslant k \leqslant m.$$

(C — абсолютная постоянная).

2. Если $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная внутри эллипса

$$z = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right), \ 1 < \rho < \sqrt{2 + \sqrt{5}},$$

действительна на отрезке $[-1, 1]$ и все числа:

$$f^{(n)}(0)/n!, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[\frac{f^{(k)}(1)}{k!} - (-1)^k \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}\right] \times \times \frac{2^{-2n+k-1}(2n-k)!}{n!\,(n-k)!},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[\frac{f^{(k)}(1)}{k!} + (-1)^k \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}\right] \times \times \frac{2^{-2n+k-1}(2n-k-1)!\,k}{n!\,(n-k)!}$$

целые, то при любом $n > n_0$ существует многочлен $Q_n(x)$ с целыми коэффициентами, степени не выше n, такой, что

$$|f(x) - Q_n(x)| < \sigma_1^{-n}, \ -1 \leqslant x < 1, \ \sigma_1 > \sigma(\rho) > 1.$$

М. А. Евграфов

2926. О разложении аналитических функций по ортогональным полиномам. Обрешков (Sur le développement des fonctions analytiques suivant des polynomes orthogonaux. Obrechkoff N.), Докл. Болгар. АН, 1954, 7, № 2, 5—8 (франц., рез. русс.)

Автор рассматривает систему полиномов $\{P_n(z)\}$, удовлетворяющую условиям ортогональности

$$\int_C F(z) P_n(z) P_m(z)\, dz = \delta_{nm},$$

где аналитическая функция $F(z)$ имеет особые точки в области D, ограниченной простым контуром C.

В частности, он полагает $F(z)=e^{1/z}$ и находит для соответствующих ортогональных полиномов формулу

$$p_n(z)=e^{-1/z}\frac{d^n}{dz^n}(z^{2n}e^{1/z}),\ P_n(z)=\frac{p_n(z)}{\sqrt{\mu_n}},$$

$$\mu_n=\frac{2\pi i(-1)^n}{2n+1},$$

аналогичную формуле Родрига, а также дифференциальное уравнение и уравнение в конечных разностях

$$z^2y''+(2z+1)y'-n(n+1)y=0,$$

$$y_{n+1}-2(2n+1)zy_n-y_{n-1}=0,$$

частным решением которых является $p_n(z)$. При $n\to\infty$ $p_n(z)=O(4|z|)^n$, откуда вытекает, что разложение Фурье некоторой функции по этим полиномам имеет своей областью сходимости круг с центром в начале координат. Система $\{p_n(z)\}$ является полной; для нее справедливо равенство Парсеваля (для квадратов коэффициентов Фурье). Я. Л. Геронимус

2927. **Об особых точках элементов аналитических функций. Риччи** (Sui punti critici degli elementi analitici. Ricci Giovanni), Mathematiche, 1954, 9, № 1, 43—81 (итал.)

Обзорная статья. Приводится ряд достаточных признаков (принадлежащих Виванти, Прингсхайму, Адамару, Фабри, Полиа и др., а также самому автору статьи) того, чтобы точка 1 или каждая точка, лежащая на границе круга сходимости ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, была особой для суммы этого ряда. Н. А. Давыдов

2928. **Аналог теории Фредгольма для операторов в пространствах аналитических функций и обобщение теоремы Пуанкаре о разностных уравнениях. Евграфов М. А.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 4, 597—599

Формулируются теоремы, показывающие, что для оператора

$$A(F)=(1/2\pi i)\int_{|t|=r}K(z,t)F(t)\,dt,\ R_0<r<R_1,$$

где

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{n,k}z^k/\zeta^{n+1},$$

$$|z|<\rho<|\zeta|,\ R_0<\rho<R_1,$$

$$\sup_{0\leqslant n<\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|r^{k-n}=\vartheta_1(r),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|r^{k-n}=\vartheta(r),$$

$$\sup_{R_0<r<R_1}\vartheta_1(r)=\vartheta_1,\ \sup_{R_0<r<R_1}\vartheta(r)=\vartheta$$

в пространстве $\mathfrak{A}(|z|<r)$ функций аналитических в круге $|z|<r$, $R_0<r<R_1$, справедливы теоремы Фредгольма, причем резольвента $R(z,\zeta;\lambda)$ является аналитической функцией своих аргументов, регулярной при $|z|<\rho<|\zeta|$, $R_0<\rho<R_1$, $|\lambda|<1/\vartheta_1$, мероморфной при $|\lambda|=1/\vartheta$, и все полюсы ее простые.

Далее, рассматривается последовательность функций $\varphi_n(z)=z^nP(z)+z^{n+1}\varepsilon_n(z)$, $n=0,1,2,\ldots$, где $P(z)$ и $\varepsilon_n(z)$ регулярны при $|z|<R$ и $\max|\varepsilon_n(z)|\to0$, когда $|z|\leqslant R_1<R$ и $n\to\infty$. Обозначив: α_n — нули $P(z)$, ρ_k — различные модули нулей $0\leqslant\rho_1<\rho_2<,\ldots,$ m_k — число нулей α_n в круге $|z|\leqslant\rho_k$, автор формулирует теоремы:

а) Существует ровно m_k линейно-независимых функций $\Phi_m(z)$, регулярных при $|z|>\rho_k$, ортогональных ко всем $\varphi_n(z)$ в смысле:

$$\int_{|z|=r}\varphi_n(z)\Phi_m(z)\,dz=0,\ \rho_k<r<R;\qquad(1)$$

б) Для того чтобы функция $F(z)$, регулярная в круге $|z|<r$, $\rho_k<r<\rho_{k+1}$, могла быть разложена в ряд $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(z)$, $|z|<r$, необходимо и достаточно, чтобы $F(z)$ была ортогональна к функциям $\Phi_m(z)$, $m=1,2,\ldots,m_k$;

в) Если функция $\Phi_m(z)$ удовлетворяет условиям (1) и регулярна в точках $z=\alpha_n$, $|\alpha_n|=\rho_k$, то $\Phi_m(z)$ регулярна при $|z|>\rho_{k-1}$.

Последняя теорема позволяет автору сформулировать теорему, которую он рассматривает как обобщение теоремы Пуанкаре: Если $\Phi(z)\neq\text{const}$, регулярна при $|z|>R_1$, $R_1<R$ и удовлетворяет условиям (1), то по крайней мере одна из точек α_n является особой точкой $\Phi(z)$. В тексте две опечатки: 1) стр. 599, строка 2 сверху, должно быть: $|z|>\rho_k$; 2) стр. 599, в теореме 9 должно быть: $\Phi(z)\neq\text{const}$. М. Г. Хапланов

2929. **О представлениях и продолжениях ограниченных линейных функционалов, определенных на классах аналитических функций. Дэйвис, Уолш** (On representations and extensions of bounded linear functionals defined on classes of analytic functions. Davis Philip, Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 190—206 (англ.)

Работа тесно примыкает к прежней статье тех же авторов (J. d'Analyse math., 1952, **2**, 1—28) и основывается на методах и результатах этой последней.

Пусть $H(B)$ и $H(G)$ — два гильбертовых пространства, построенных из аналитических функций над областями B и G соответственно (скалярные произведения в них могут быть заданы различными способами). Допустим, что $H(B)\subset H(G)$ в следующем смысле: а) $G\subset B$; б) если $f\in H(B)$, то $f\in H(G)$; в) $\|f\|_B\geqslant\|f\|_G$. Скажем, что линейный функционал L, ограниченный над $H(B)$, продолжим на $H(G)$, если существует ограниченный над $H(G)$ функционал L^*, совпадающий с L над $H(B)$. Продолжение функционала L возможно далеко не всегда — что не противоречит теореме Хана — Банаха, ибо, будучи ограничен над $H(B)$ по норме $\|\ \|_B$, L может перестать быть ограниченным по норме $\|\ \|_G$. Если такое продолжение все же возможно, то оно единственно тогда и только тогда, когда $H(B)$ всюду плотно в $H(G)$. Основные результаты относятся к случаю, когда пространство $H(B)=L^2(B)$ ($\|f\|=\iint_B|f|^2dA$, dA — элемент площади).

Пусть B — конечносвязная жорданова область. Рассмотрим функционалы $L_n(f)=f^{(n)}(0)$, $n=0,\ldots,$ или $L_n(f)=f(\alpha_n)$, $n=1,\ldots,$ $\alpha_n\to0$ ($0\in B$, $\alpha_n\in B$). Эти функционалы обладают «риссовыми представителями» $\{\Phi(z)\}$ (т. е. $L_n(f)=\iint_B f\overline{\Phi_n}dA$). Пусть $\{\Phi_n^*(z)\}$ — ортонормальная последовательность, получившаяся из $\{\Phi_n(z)\}$. Обозначим через $G(z,0)$ функцию Грина области B с полюсом $z=0$, а через C_r ее линию уровня: $G(z,0)=-\ln r$. Через $L^2(C_r)$ обозначим пространство L^2 над областью, лежащей внутри C_r.

Теорема. Пусть T — линейный функционал, ограниченный над $L^2(B)$. Для того чтобы он был продолжим на всякое пространство $L^2(C_{r'})$, $r'>r$, и не был продолжим ни на какое пространство $L^2(C_r$,

$r'' < r$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim}\,|T(\Phi_n^*)|^{1/n} = r$ $(0 \leqslant r'' < r < r' \leqslant 1)$.

Теорема. Пусть L — ограниченный линейный функционал над $L^2(B)$, где B — односвязная область с аналитической границей. Обозначим через $l(z)$ «рисов представитель» L (т. е. $L(f) = \iint_B f\bar{l}\,dA$, $f \in L^2(B)$). Для того чтобы функционал L был продолжим на какое-нибудь пространство $L^2(G)$, где $\overline{G} \subset B$, необходимо и достаточно, чтобы $l(z)$ была аналитически продолжима через границу B.

Отметим еще теорему вспомогательного характера: Пусть B — односвязная область с аналитической границей и $l(z)$ аналитична в некоторой области $B^+ \supset \overline{B}$; тогда функция $c(z) = \iint_B \overline{l(w)}\,dA/(z-w)$ аналитически продолжима из внешности B через границу B и будет, следовательно, аналитической во внешности некоторой области G, $\overline{G} \subset B$. С. Я. Хавинсон

2930. Теорема Коши — Гурса. Данжуа (Le théorème de Cauchy — Goursat. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 4, 386—389 (франц.)

Пусть r — односвязная область в плоскости (z), ψ — граница ее. Нормализуем r и ψ, добавив к r множество ψ' тех точек ψ, которые не являются граничными для внешности r. Положим $\rho = r + \psi'$, $\varphi = \psi - \psi'$. Пусть r_p, $1 \leqslant p$, — компоненты внешности r. Эти множества являются нормализованными. Границу r_p обозначим K_p. Предположим, что для всякого $\varepsilon > 0$ число расчлененных континуумов диаметра $> \varepsilon$, входящих в φ, — конечное (условие (α)). Тогда все K_p суть кривые Жордана, как доказывает автор. Пусть теперь S — замкнутое ограниченное множество. Обозначим через r_i компоненты дополнения к S и пусть они нормализованы в ρ_i; φ_i — граница ρ_i. Предположим, что для каждой области ρ_i выполняется (α). Тогда $\varphi_i = \Sigma_p K_{ip} + \theta_i$, где K_{ip} — кривые Жордана, о которых говорилось выше, а θ_i — множество предельных точек для множества этих кривых, если число последних бесконечно. Предположим, что все кривые K_{ip} спрямляемы и сумма их длин конечна. На множестве S задана непрерывная функция $f(z)$, имеющая в каждой точке S производную относительно множества S. Положим $Y = \Sigma_{i,p} \int_{K_{i,p}} f(z)\,dz$. Тогда $Y = 0$. С. Я. Хавинсон

2931. Об обращении интегральной теоремы Коши. Мюллер (Über die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Müller Claus), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 47—51 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}_n$ — конечная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладкой кривой $\mathfrak{C}_n$, и пусть F_n — площадь $\mathfrak{G}_n$. Дается определение: последовательность $\{\mathfrak{C}_n\}$ называется нуль-последовательностью, если каждому данному $\varepsilon > 0$ соответствует такое число $N(\varepsilon) > 0$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$ области $\mathfrak{G}_n$ расположены внутри круга радиуса ε и с центром в точке $z = 0$. Доказывается теорема: Если $f(z)$ — непрерывная на открытой плоскости и если найдется такая фиксированная нуль-последовательность $\{\mathfrak{C}_n\}$, что для всякой сходящейся последовательности $\{z_n\}$ точек некоторой замкнутой области $\mathfrak{G}$ имеем при $n \to \infty$:

$$\oint_{\mathfrak{C}_n} f(z_n + \zeta)\,d\zeta = o(F_n),$$

тогда $f(z)$ — голоморфная в открытой области $\mathfrak{G}$.

Примечание референта. Эта теорема автора является некоторым обобщением теоремы референта (Матем. сб., 1949, **24** (66), № 1, 15—26). В. С. Федоров

2932. Теорема Ломана — Меньшова и некоторые ее аналоги для субгармонических функций. Арсов (The Looman — Menchoff theorem and some subharmonic function analogues. Arsove Maynard G.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 78—79; Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 94—105 (англ.)

Макер (Maker, Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **45**, 265—275) доказал следующую теорему, обобщающую известные результаты Ломана — Меньшова: Пусть $f = u + iv$ непрерывна на открытом множестве Ω. Если u и v имеют конечные частные производные Дини на $\Omega - E$, где E состоит из счетного числа замкнутых в Ω множеств конечной длины (длина — линейная мера Каратеодори), и если условия Коши — Римана выполняются почти везде, тогда $f = u + iv$ аналитична на Ω. В работе показывается, что эта теорема остается справедливой, если условия Коши — Римана заменить на $\lim \frac{1}{r^2}\left|\int_{C_r(z)} f(x)\,dx\right| = 0$, где $C_r(z)$ — окружность с центром в точке z и радиуса r.

Доказывается также теорема: Пусть $f = u + iv$ ограничена на $\Omega - E$, где Ω открыто, E состоит из счетного числа замкнутых в Ω множеств длины нуль. Если $\overline{\lim_{x \to z}}\,|[f(x) - f(z)]/(x - z)| < +\infty$ для $z \in \Omega - E$ и уравнения Коши — Римана выполняются почти везде на $\Omega - E$, то $f(z)$ может быть так доопределена на E, чтобы быть аналитической на Ω. Доказывается ряд результатов о субгармонических и гармонических функциях, а также о функциях, представимых в виде разности субгармонических функций (δ — субгармонические функции). Приведем некоторые теоремы: Пусть u — действительная функция, имеющая непрерывные первые частные производные на открытом множестве Ω, и пусть $E \subset \Omega$ множество F_σ (относительно Ω) емкости нуль. Если первые частные производные Дини функций u_x и u_y конечны на $\Omega - E$ и $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \geqslant 0$ почти везде, то u субгармонична на Ω.

Пусть u — непрерывная действительная функция на открытом множестве Ω. Для того чтобы u была субгармонической на Ω, необходимо и достаточно, чтобы везде за исключением быть может множества $E \subset \Omega$ типа F_σ относительно Ω и емкости нуль было бы

$$\underline{\Delta}^B u > -\infty \;(\underline{\Delta}^P u > -\infty) \tag{1}$$

и, кроме того, почти везде

$$\underline{\Delta}^B u \geqslant 0 \;(\underline{\Delta}^P u \geqslant 0). \tag{2}$$

Здесь $\underline{\Delta}^B u$ и $\underline{\Delta}^P u$ — известные в теории субгармонических функций операторы (нижние) Бляшке и Привалова соответственно.

Эту теорему интересно, как замечает сам автор, сравнить с теоремой И. И. Привалова (Докл. АН СССР, 1941, **31**, 102—103), в которой исключительное множество предполагалось замкнутым (емкости нуль, конечно), зато в условиях (1) и (2) фигурировали верхние операторы. С. Я. Хавинсон

2933. О принципе Фрагмена — Линделёфа. Терзиоглу (Über das Phragmén — Lindelöfsche Prinzip. Terzioglu Nazim), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 176—177 (нем.)

Пусть $f(\zeta)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\xi > 0$ $(\zeta = \xi + i\eta)$, $|f(i\eta)| \leqslant 1$ и пусть $\ln \zeta = x + iy$, $\ln f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$.

Приводятся оценки для $m^2(\lambda)=\int_{\theta_\lambda}u^2(\lambda, y)\,dy$, где θ_λ — пересечение прямой $x=\lambda$ и области G, в которой $u(x, y)>0$. Из этих оценок можно получить теорему Фрагмена — Линделёфа. Г. Ф. Манджавидзе

2934. Теоремы примыкания для некоторых рядов Дирихле. Способы экстраполяции функционального анализа. Мальявин (Théorèmes d'adhérence pour certaines séries de Dirichlet. Procédés d'extrapolation en analyse fonctionnelle. Malliavin Paul), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 1, 20—22 (франц.)

Автор без доказательств приводит результаты, которые являются продолжением его же результатов (РЖМат, 1955, 5752). Приводятся следующие утверждения (обозначения те же, что и в нашем реферате упомянутой статьи).

1. Множество единственности одного класса мероморфных функций. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, которая удовлетворяет мажорации номер 1. Тогда, если $f(z)$ задана на последовательности Λ_1 так, что

$$\int^{\infty} M\left([\lambda_1(r)-\lambda_2(r)]_0-a\right)\frac{dr}{r^2}=+\infty,$$

то $f(z)$ определена на полуплоскости. В частности, из асимптотики $f(z)$ на Λ_1 следует ее глобальная асимптотика. С помощью этих утверждений автор доказывает следующее:

Пусть $F(u)$ голоморфная в полуполосе $B_{v_0}=\{v>v_0, |w|<\pi/2\}$, так что $|F(u)-\Sigma_{\lambda_k<n}C_k e^{-\lambda_k u}|<\alpha^n M_n e^{-\alpha v}$.

Предположим, что $\int^{\infty} M([\ln r-\lambda(r)]_-a)\frac{dr}{r^2}=+\infty$ и $^1/_2>D^\circ(\Lambda)=\overline{\lim}\,\lambda(r)/2\ln r$. Обозначим $m(v_0)=\max|F(u)|$, если $u\in B_{v_0}$. Тогда

$$\ln|c_k|<A+\ln m(v_0)+\lambda_k(v_0+\delta)+\lambda_k(k(\lambda_k)-k_0(\lambda_k)),$$

где δ зависит только от Λ, а A зависит от Λ и $\{M_n\}$.

2. Способы экстраполяции функционального анализа. Автор распространяет способ экстраполяции на линейные операторы пространства Банаха и получает следующие теоремы.

Теорема Мюнтца. Пусть a — элемент банаховой алгебры. Предположим, что спектр элемента a виден из начала координат под углом $\theta_0<2\pi$ и что $\|(a-\lambda)^{-1}\|=O(1/d)$ (где d — расстояние λ от спектра). Пусть Λ — последовательность целых чисел такова, что $\lim[\lambda(r)-(\theta_0/\pi)\ln r]=+\infty$. Тогда линейное многообразие, порожденное через $a^\lambda(\lambda\in\Lambda)$, плотно в алгебре, порожденной через элемент a.

Пусть $a(p)$ — гиперболический оператор с постоянными коэффициентами, пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, заданная на световом конусе C_0, тогда $m_s<m_0^{1-s/n}e^{nq(s/n)}$, где $m_n=\|a^n(p)f\|_2$, $0\leqslant s\leqslant n$ и $g(t)=-\int_0^t\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\xi\right]d\xi$, $(0<t<1)$.

А. П. Тамадян

2935. О предположении Хейнса. Кеннеди (On a conjecture of Heins. Kennedy P. B.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 17, 22—47 (англ.)

Если целая функция $f(z)$ имеет n различных асимптотических значений, то по известной теореме Альфорса $\underline{\lim}\ln M(r)/r^{1/2}>0$ $(M(r)=\max|f(z)|, |z|=r)$. Хейнс при дополнительном условии $\lim\ln M(r)/r^{1/2}<+\infty$ доказал, что $f(z)$ имеет порядок $n/2$, и предположил, что из его условия вытекает наличие обычного предела: $\lim\ln M(r)/r^{1/2}$. Для $n=1$ это предположение было им доказано (M. Heins, Ann. Math., 1948, 49, 200—213, 533—537). Автор исследует вопросы, связанные с ростом субгармонических функций при условии, аналогичном условию Хейнса. Он заявляет также о намерении в следующей статье опровергнуть предположение Хейнса для всех $n>1$.

Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — жордановы кривые, уходящие из точки $z=0$ в бесконечность и нигде кроме $z=0$, не пересекающиеся. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — области, на которые эти кривые разбили плоскость. В каждой D_k задана субгармоническая функция $u_k(z)$, удовлетворяющая следующим условиям: $\overline{\lim}_{z\to x}u_k(z)\leqslant 0$ для $z\in D_k$ и x, лежащего на границе D_k; $u_k(z)>0$ для некоторого $z\in D_k$. Положим $\sigma_k(r)=\sup\sigma_k(z)$ для $z\in D_k$, $|z|=r$, $\sigma(r)=\max\sigma_k(z)$. Хейнсом в первой из цитированных работ доказано: $\lim\sigma(r)/r^{n/2}>0$, и при дополнительном допущении о конечности этого предела дана оценка: $\ln\sigma_k(r)-\frac{1}{2}n\ln r=oO(\ln r)$. Автор уточняет эти результаты, доказывая следующие теоремы:

Теорема I. Пусть $\theta_k(r)$ — угловая мера той дуги окружности $|z|=r$, которая проходит в D_k. Тогда при предположении $\lim\sigma(r)/r^{n/2}<+\infty$ (α) имеем оценку: $\ln\sigma_k(r)=\lambda_k+\pi\int_1^r dt/t\theta_k(t)+o(1)$, где λ_k — константы.

Теорема II. При предположении (α) имеем: а) $\ln\sigma_k(r)-(n/2)\cdot\ln r=o([\ln r]^{1/2})$, б) $\Pi_1^n\sigma_k(r)\sim\gamma r^{n^2/2}$, γ — конечная константа.

Теорема III. При предположении (α) существует функция $f_k(z)=a_k(z)+ib_k(z)$, отображающая D_k однолистно и конформно на полосу $|b_k|<\pi/2$ в плоскости $w=a+ib$ $(z=0, \infty\to a=\mp\infty)$ и такая, что $u_k(z)=\overline{u}_k(z)+w_k z)$, где $\overline{u}_k(z)=e^{a_k(z)}\cos b_k(z)$ и $w_k(z)$ субгармонична в D_k неположительна там и такова, что мажорация $w_k(z)<-Mu_k(z)$ невозможна ни при каком $M>0$. Далее, если $\overline{\sigma}_k(z)=\max\overline{u}_k(z)$ для $z\in D_k$ и $|z|=r$, то $\ln\sigma_k(r)=\ln\overline{\sigma}_k(r)+o(1)$.

Последняя теорема представляет собой аналог одной известной теоремы Альфорса:

Теорема IV. При предположении (α): $\lim\arg z/(\ln z)^{1/2}=0$, $z\in C_k$.

Для доказательства своих теорем автор приводит 19 лемм, некоторые из которых интересны сами по себе. С. Я. Хавинсон

2936. Почти ограниченные функции. Гудман (Almost bounded functions. Goodman A. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 82—97 (англ.)

Пусть дана группа линейных преобразований

$$G^{(2n)}=\{L_1(w), L_2(w), \ldots, L_{2n}(w)\},\qquad (1)$$

$$L_k(w)=\frac{a_k w+b_k}{c_k w+d_k},\quad a_k d_k-c_k b_k\neq 0.$$

Обозначим через $S^{2n}(w)$ множество $2n$ чисел, порождаемых (1) при фиксированном w. Функция $f(z)$, определенная в области Δ, называется почти ограниченной относительно группы G^{2n}, если $f(z)$ мероморфна в Δ и если для каждого w (включая $w=\infty$) $f(z)$ принимает не более чем n значений из множества $S^{2n}(w)$ (каждое из принимаемых значений может приниматься несколько раз).

В частном случае, когда $G^{(2)} = \{w, 1/w\}$ и $f(z) = a_1 z + a_2 z_2 + \ldots$ ($|z| < 1$), условие почти ограниченности означает, что $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$, каковы бы ни были z_1 и z_2. Соответствующий класс был введен Бибербахом и исследовался различными авторами (Эйленберг, Рогозинский, Лебедев и Милин).

В работе при некоторых условиях, наложенных на группу $G^{(2n)}$, доказывается теорема: Если $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ однолистная и почти ограниченная относительно $G^{(2n)}$ в $|z| < 1$, то $|a_1| \leqslant 1$ и знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $f(z) \equiv \eta z$, $|\eta| = 1$.

Кроме того, для функций, рассматриваемых в этой теореме, в работе получены некоторые другие результаты. Н. А. Лебедев

2937. О явных выражениях для границ в теореме Шоттки. Дженкинс (On explicit bounds in Schottky's theorem. Jenkins J. A.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 76—82 (англ.)

Пусть функция $F(z)$, аналитическая в $|z| < 1$, не принимает значений 0 и 1 в этом круге и $F(0) = a_0$. По известной теореме Шоттки модуль этой функции в $|z| \leqslant r$, $0 < r < 1$, не превосходит некоторой константы, зависящей только от a_0 и r. Пусть $K(a_0, r)$ обозначает наилучшую константу в этой теореме.

Приводится простое доказательство результата Хеймана (Hayman W. K., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, **43**, 442—454): $K(a_0, r) < (\mu e^{\pi})^{(1+r)/(1-r)}$, где $\mu = \max(1, |a_0|)$. Это доказательство основано на оценке, с помощью соображений геометрического характера, модуля функции $F_0(z)$, удовлетворяющей условию $F(0) = a_0$ и отображающей $|z| < 1$ на универсальную поверхность наложения плоскости w с тремя выключенными точками: $0, 1, \infty$.

Уточняя оценки в своем геометрическом методе, автор получает новые результаты:

$$K(a_0, r) \leqslant \frac{1}{4}(\mu e^{\pi})^{(1+r)/(1-r)} + \frac{3}{4}, \qquad (1)$$

$$K(a_0, r) \leqslant \frac{1}{16}(16|a_0| + 8)^{(1+r)/(1-r)} + 1. \qquad (2)$$

Оценка (1) лучше, чем результат Хеймана, но не является асимптотически наилучшей при фиксированном r и стремлении $|a_0|$ к ∞. Оценка (2) является асимптотически наилучшей в указанном смысле, она значительно лучше чем (1), за исключением значений a_0, близких к 1, и r достаточно больших.

Если $F(z)$ — аналитическая в $|z| < 1$ функция, не принимающая значений 0 и 1 и $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, то по известной теореме Ландау $|a_1|$ не превосходит константы, зависящей только от a_0. Автор получает количественную оценку $|a_1| \leqslant 2|a_0|\{|\ln|a_0|| + 7{,}77\}$, уточняя этим оценку Хеймана в цитированной его статье $|a_1| \leqslant 2|a_0|\{|\ln|a_0|| + 5\pi\}$. С. Я. Альпер

2938. О проблеме Блоха и Неванлинна. Рудин (On a problem of Bloch and Nevanlinna. Rudin Walter), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 202—204 (англ.)

Построен пример степенного ряда, абсолютно сходящегося в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и такого, производная суммы которого почти всюду на окружности $|z| = 1$ имеет бесконечные радиальные граничные значения. Этим примером автор положительно отвечает на вопрос Блоха и Неванлинна о том, существует ли аналитическая в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ функция, производная которой имеет неограниченную характеристику. Заметим, что положительный ответ на этот вопрос содержался уже в работе Н.Н. Лузина (Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, 1922, 5, 20—26), с которой автор, видимо, не знаком. Н. А. Давыдов

2939. Радиальная вариация аналитических функций. Рудин (The radial variation of analytic functions. Rudin Walter), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 235—242 (англ.)

Радиальной вариацией функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$, называется число (конечное или бесконечное)

$$V(f, \theta) = \lim_{r \to 1} \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| \, d\rho.$$

Доказывается, что если $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [(b_n - z)/(1 - \bar{b}_n z)]$ ($|b_n|/b_n$) есть произведение Бляшке и если $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |b_n|) \ln [1/(1 - |b_n|)] < \infty$, то $\int_0^{2\pi} V(B, \theta) d\theta < \infty$. Строится произведение Бляшке $B(z)$, а также аналитическая в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ функция $f(z)$, для которых $V(B, \theta) = \infty$, $V(f, \theta) = \infty$ для почти всех θ. Н. А. Давыдов

2940. Криволинейные предельные значения произвольных функций. Багемил (Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. Bagemihl F.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 6, 379—382 (англ.)

Пусть D — круг $|z| < 1$ с границей K, S — произвольное множество из D, Γ — простая жорданова дуга, расположенная полностью в D, кроме одного конца, расположенного на K, $C(f, \Gamma)$ — множество предельных значений комплексной функции f, заданной в D, вдоль дуги Γ. Доказываются следующие два предложения, являющиеся обобщением результатов Бламберга (Blumberg H., Fundam. math., 1939, **32**, 16—17) и Ярника (Jarník V. Fundam. math., 1936, **27**, 147):

1. Для всякого $S \subset D$ существует множество $K^* \subset K$, где $K - K^*$ не более чем счетное, такое, что, какова бы ни была точка $e^{i\theta} \in K^*$, всякие две дуги Γ_1 и Γ_2 с концом в $e^{i\theta}$ одновременно пересекают либо S, либо $D - S$;

2. Какова бы ни была f, существует множество K^*, как выше, такое, что для всякой точки $e^{i\theta} \in K^*$ и всяких двух дуг Γ_1 и Γ_2 с концом в $e^{i\theta}$ $C(f, \Gamma_1) \cap C(f, \Gamma_2) \neq 0$. Приводятся некоторые следствия. И. Н. Песин

2941. О проблеме Коллингвуда и Картрайт. Рудин (On a problem of Collingwood and Cartwright. Rudin Walter), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 231—238 (англ.)

Пусть S_n — кольцо $1 - n^{-1} < |z| < 1$, T_n — множество всех $z \in U$ ($|z| < 1$) таких, что $|z - e^{i\theta}| < 1/n$, $f(S_n)$ и $f(T_n)$ — множества значений мероморфной в круге U функции $f(z)$ для z, принадлежащих соответственно S_n и T_n, $\overline{f(S_n)}$ и $\overline{f(T_n)}$ — замыкания множеств $f(S_n)$ и $f(T_n)$. Тогда $C(f) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(S_n)}$ и $C(f, e^{i\theta}) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(T_n)}$ — непустые континуумы в расширенной комплексной плоскости, означающие множества всех предельных значений функции $f(z)$ соответственно на окружности $|z| = 1$ и в точке $e^{i\theta}$.

Грос (Gross W., Monatsh. Math. und Phys., 1918, 29, 3—47) доказал, что для любого непустого континуума K и для каждого θ найдется мероморфная в U функция $f(z)$ такая, что $K = C(f, e^{i\theta})$, т. е. непустой континуум $C(f, e^{i\theta})$ может быть наперед заданным. Коллингвуд и Картрайт поставили вопрос о том, может ли быть наперед заданным непустым континуумом множество $C(f)$. В работе дается отрицательный ответ на этот вопрос. Как замечает сам автор, эта проблема была решена раньше Д. Б. Потягайло

(Докл. АН СССР, 1952, 86, 661—663). Доказывается, что множества $R(f) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} f(S_n)$ и $R(f, e^{i0}) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} f(T_n)$, являющиеся Δ-множествами, могут быть наперед заданными Δ-множествами. Множество E автор называет Δ-множеством, если $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, где $G_n \supset G_{n+1}$ и каждое G_n — связное открытое подмножество комплексной плоскости. Н. А. Давыдов

2942. Однозначное определение порядка для функций, область существования которых имеет нулевую границу. Хелстрём (Ein eindeutiger Ordnungsbegriff bei Funktionen mit nullberandetem Existenzgebiet. Hällström Gunnar af), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 117 (нем.)

Пусть E — замкнутое множество емкости нуль, B — дополнительная к нему область. Селберг (Selberg H., Avhandl. utg. Norske vidensk-akad. Oslo I, 1937, № 10) доказал, что существует в B функция $g(z)$, гармоническая в B, кроме $z = 0$, где она ведёт себя как $\ln|z|$, и стремящаяся к ∞, когда $z \to E$. Рассматривая семейство кривых уровня $g(z) = \lambda$, можно для однозначной аналитической в B функции $f(z)$ определить характеристическую функцию $T(\lambda)$ и ввести числа: $s = \overline{\lim} \ln T(\lambda)/\lambda$ и $S = \overline{\lim} \ln \ln T(\lambda)/\lambda$ — порядок и гиперпорядок соответственно. Эти определения, введенные автором еще в 1939 г. и применявшиеся в некоторых других работах, имеют тот недостаток, что зависят от выбора функции $g(z)$. Предлагается ввести главный порядок и главный гиперпорядок: $s_0 = \inf s$ и $S_0 = \inf S$, где нижние грани берутся по всевозможным $g(z)$ с описанными выше свойствами. С. Я. Хавинсон

2943. Логарифмические точки ветвления функций, обратных по отношению к аналитическим однозначным функциям. Данжуа (Points critiques logarithmiques des inverses des fonctions analytiques uniformes. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 1, 22—25 (франц.)

Изучаются аналитические функции, обратные по отношению к однозначным функциям, имеющим всюду разрывное множество особенностей.

Доказывается теорема: Пусть аналитическая функция $x = F(z)$ однозначна в плоскости z и множество E ее существенно особых точек всюду разрывно. Пусть точка $x = a$ есть особая точка ее обратной функции $z(x)$ и в окрестности точки a ни при каком целом $p > 0$ невозможно разложение

$$z(x) = \Sigma_{s=k}^{\infty} b_s [(x-a)^{1/p}]^s, \quad |k| < \infty, \quad a \neq \infty,$$

или

$$z(x) = \Sigma_{s=k}^{-\infty} b_s x^{s/p}, \quad a = \infty. \tag{1}$$

Тогда в плоскости z существует кривая Жордана Γ, $\Gamma E = 0$ такая, что при $z \to z_0$, $z_0 \in E$, $z \in \Gamma$, $F(z) \to a$.

Справедливо и обратное: если $F(z) \to a$ по кривой Γ, то a есть особая точка $z(x)$ указанного вида.

Доказывается, что, в условиях этой теоремы, из существования у функции $z(x)$ существенно особой точки, в окрестности которой $z(x)$ однозначна или конечнозначна, следует существование в плоскости z совершенного множества $Q \subset E$. Как следствие получается, что в случае мероморфности $F(z)$ для всякой особой точки $x = a$ функции $z(x)$ возможны лишь два случая: или в окрестности $x = a$ функция $z(x)$ бесконечнозначна, или имеет место разложение (1).

Н. В. Ламбин

2944. Одна нормальная форма римановых поверхностей с краем. Тиц (Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen. Tietz H.), Math. Ann., 1954, 129, 44—49 (нем.)

В работе Альфорса (Ahlfors L., Comment. math. Helv., 1950, 24, 100—134) доказывается, что риманова поверхность с краем может быть представлена в виде многолистного единичного круга. Однако при этом некоторые граничные контуры покрывают, вообще говоря, единичную окружность многолистно. Как показано в реферируемой работе, этого всегда можно избежать, если наряду с единичными кругами допустить для построения поверхности некоторое число полных плоскостей. В основе доказательства лежит удвоение поверхности с помощью принципа симметрии до замкнутой поверхности (РЖМат, 1955, 2646) и построение на ней некоторых абелевых интегралов 3-го рода. Л. И. Волковыский

2945. К реализации римановых поверхностей. Тиц (Zur Realisierung Riemannscher Flächen. Tietz Horst), Math. Ann., 1955, 128, № 5, 453—458 (нем.)

Под реализацией римановой поверхности F автор имеет в виду представление ее с помощью однозначной аналитической на ней функции в виде поверхности наложения расширенной комплексной плоскости. Ставится вопрос о существовании на F функций, обладающих заданным свойством на заданном множестве $\mathfrak{M} \subset F$ (например, однолистных или k-листных на $\mathfrak{M}$). Исследование автора существенно опирается на теорию об аппроксимировании регулярных однозначных функций, заданных на части F, функциями, регулярными и однозначными всей поверхности F, если она открытая, и имеющих дополнительный полюс, если она замкнута (РЖМат, 1955, 184; Röhrl H., Math. Nachr., 1952, 7, 65—84). Отметим некоторые результаты.

Пусть $E_{\mathfrak{M}}(F)$ — класс функций на F, обладающих на $\mathfrak{M}$ свойством E. Тогда класс $E_{\mathfrak{M}}(F)$ не пуст, если 1) $\mathfrak{M} \Subset F$ (т. е. $\mathfrak{M}$ лежит в компактной части F) и существуют две части F_0 и F_1 поверхности F такие, что $\mathfrak{M} \Subset F_0 \Subset F_1 \Subset F$ и $E_{F_0}(F_1)$ содержит регулярные функции; 2) свойство E непрерывно в том смысле, что для каждой регулярной функции $f \in E_{F_0}(F_1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f_\varepsilon \in E_{\mathfrak{M}}(F_0)$, если $|f_\varepsilon - f| < \varepsilon$ на F_0.

Если $\mathfrak{M} \Subset F_1 \Subset F$ и на F_1 существуют регулярные k-листные функции, то на F существуют функции, k-листные на $\mathfrak{M}$. Всякая риманова поверхность всегда может быть реализована так, чтобы заданная компактная ее часть $\mathfrak{M}$ рода нуль была представлена однолистно.

Если F рода $p < \infty$ и C — система жордановых контуров без общих точек, разбивающая F на $p-1$ части рода 1, то для всякого замкнутого множества $\mathfrak{M} \subset F - C$ существует реализация F, не более чем двулистная на $\mathfrak{M}$. Л. И. Волковыский

2946. Заметка о неразветвленных абелевых поверхностях наложения замкнутой римановой поверхности. Мори (A note on unramified abelian covering surfaces of a closed Riemann surface. Mori Akira), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 162—176 (англ.)

Регулярную поверхность наложения $\tilde{F}$ замкнутой римановой поверхности F автор называет неразветвленной абелевой поверхностью наложения, если ее группа преобразований наложения абелева. Примером такой поверхности может служить поверхность наложения, определяемая абелевым интегралом первого или второго рода. Пусть $\tilde{F}$ — неразветвленная абелева поверхность наложения замкнутой римановой поверхности F рода p, $\Gamma(\tilde{F})$ — ее группа преобразований наложения и r — ее ранг. Тогда (обозначения см. РЖМат, 1955, 3728): 1) $\tilde{F} \in O_G$ тогда и только тогда, когда $r \leqslant 2$; 2) $\tilde{F} \in O_{AD}$; 3) если образующие C_{2i-1}, C_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, p$) группы $\Gamma(\tilde{F})$ (преобразования наложе-

ния, получаемые, когда фиксированная точка $\tilde{P} \in \tilde{F}$ описывает кривые, проекции которых на F гомотопны паре сопряженных путей канонического базиса гомологий) линейно зависимы, то $\tilde{F} \in O_{AB}$.

Л. И. Волковыский

2947. О поверхностях нулей и полюсов функций двух комплексных переменных. Бергман (On zero and pole surfaces of functions of two complex variables. Bergman Stefan), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 3, 413—454 (англ.)

Рассматриваются специальные области $\mathfrak{B}$, ограниченные двумя кусками аналитических гиперповерхностей; одна из этих частей лежит на гиперповерхности $|z_2| = 1$. Для каждого $\overset{\circ}{z}_2$, $|\overset{\circ}{z}_2| \leqslant 1$, пересечение $\mathfrak{B}$ с плоскостью $z_2 = \overset{\circ}{z}_2$ является односвязной областью $\mathfrak{B}^2(\overset{\circ}{z}_2)$. Если $w(z)$, $w(0) = 0$, $w'(0) > 0$ конформно отображает последнюю область на единичный круг, то число $|(w(z) - w(Z))/(1 - \overline{w(Z)}\, w(z))|$ называется $C\mathfrak{B}^2(\overset{\circ}{z}_2)$-расстоянием точек z и Z области $\mathfrak{B}^2(\overset{\circ}{z}_2)$. Пусть (f_1, f_2) — пара функций, мероморфных в $\mathfrak{B}^2$. Для каждого z_2, $|z_2| \leqslant 1$ образуются 4 произведения $C(\mathfrak{B}^2(z_2))$-расстояний: $P_1(z_2)$ и $P_2(z_2)$ — произведения расстояний между нулями $f_1(z_1, z_2)$ и нулями, соответственно полюсами, $f_2(z_1, z_2)$; $P_3(z_2)$ и $P_4(z_2)$ — произведения расстояний между полюсами $f_1(z_1, z_2)$ и нулями, соответственно полюсами, $f_2(z_1, z_2)$. Далее вводятся исключительные точки $(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, пары функций (f_1, f_2); среди них — все точки пересечения нулевой и полюсной поверхностей f_1 с такими же поверхностями f_2, а также еще некоторые точки. Из проекции $|z_2| < 1$ области $\mathfrak{B}$ на плоскость z_2 исключаются проекции $|z_2 - z_2^{(\nu)}| < P$, где $P > 0$ достаточно мало, и оставшаяся часть единичного круга обозначается $\mathfrak{S}_P^2$.

Вводится среднее $\mathfrak{M}_1(P)$ по площади $\mathfrak{S}_P^2$ от логарифма обобщенного произведения Бляшке: $P_1(z_2) \times \times P_4(z_2)/P_2(z_2) P_3(z_2)$ и аналогичный функционал $\mathfrak{M}_2(P)$. В работе устанавливается верхняя грань для суммы $\mathfrak{M}_1(P) + \mathfrak{M}_2(P)$ в терминах количеств, связанных с ростом функций (f_1, f_2), и некоторых количеств, связанных с исключительными точками пары (f_1, f_2). Доказывается, что кернфункция функций расширенного класса, нормализованного в надлежащем образом выбранной метрике, конечна. Таким образом, в настоящей работе, как и в более ранней работе автора (Compositio math., 1939, 6, 305—335), устанавливаются границы для функционалов, характеризующих определенные свойства кусков поверхностей нулей и полюсов аналитической функции двух переменных.

А. А. Темляков

2948. К теории функций многих комплексных переменных. Об одной полной ортонормальной системе в гиперболическом пространстве симметрических и кососимметрических матриц. Хуа Ло-гэн, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 29—30

Реферируемая работа посвящена построению полной ортонормальной системы функций в двух пространствах: 1) в пространстве всех комплексных симметрических матриц Z, для которых эрмитова матрица $E - Z\overline{Z}$ положительно определена (это пространство названо Зигелем обобщенным единичным кругом); 2) в пространстве всех комплексных кососимметрических матриц Z, для которых эрмитова матрица $E + Z\overline{Z}$ положительно определена. Построение автора, основанное на теории представлений, заключается в следующем.

Рассмотрим пространство всех симметрических матриц. Известно представление групп всех унимодулярных матриц в этом пространстве, при котором каждой матрице ставится в соответствие преобразование

$$S \to USU'. \qquad (1)$$

Автор указывает, как разлагается пространство многочленов от элементов матрицы S на неприводимые относительно представления (1) подпространства. С помощью этого разложения он строит полную ортонормальную систему в пространстве всех комплексных симметрических матриц Z, для которых $E - Z\overline{Z}$ положительно определенная эрмитова матрица. Далее указана интегральная формула

$$f(Z) = \frac{1}{\lambda} \int_C \det(E - Z\overline{S})^{-1/2(n+1)} f(S)\, dS, \quad \lambda = \int_C dS,$$

где C означает множество всех комплексных симметрических унитарных матриц, а dS — инвариантная мера в C. Аналогичные результаты сформулированы в статье для пространства кососимметрических матриц Z, для которых $E + Z\overline{Z}$ — положительно определенная эрмитова матрица.

И. И. Пятецкий — Шапиро

2949. О гармонических функциях, положительных в полуплоскости. Цудзи (On a positive harmonic function in a half-plane. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 1, 76—78 (англ.)

Теорема. Пусть $u(z) = u(x + iy)$ — гармоническая функция, $u > 0$ при $x > 0$, C — кривая Жордана в плоскости $x > 0$ с концами в $z = 0$, заключенная в области Штольца с вершиной в $z = 0$. Если $u(z)$ ограничена на C, то она ограничена и в секторе $|z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \varphi_0 < \pi/2$. В основе вывода лежит представление функции u в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(x^2 + (y - t)^2)^{-1}\, d\chi(t) + cx, \quad c \geqslant 0,$$

где $\chi(t)$ — возрастающая функция $\chi(0) = 0$.

В. С. Рогожин

2950. Об одном обобщении теоремы Мандельбройта — Мак-Лана для гармонических и субгармонических функций. Видав (Sur une extension du théorème de Mandelbrojt — Mac-Lane aux fonctions harmoniques et sous-harmoniques. Vidav Ivan), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 26, 2483—2485 (франц.)

Обобщается классическая теорема Мандельбройта — Мак-Лана для гармонических и субгармонических функций. В частности, для гармонических функций доказывается теорема: Пусть $u \equiv u(x, y)$ — гармоническая в полосе $|y| < \pi/2$ и непрерывная при $|y| \leqslant \pi/2$ функция. Если существует некоторая неубывающая функция $N(x)$, определенная на всей оси x, такая, что $N(x_2) - N(x_1) > k(x_2 - x_1)$, $x_2 > x_1$, для любых $x_2 - x_1 \geqslant b$, где k и b — положительные постоянные; $\ln|u(x, y)| < < -N(x)$, $|y| \leqslant \pi/2$; $\int^{\infty} N(x)\, e^{-x}\, dx = \infty$, то $u(x, y) \equiv 0$.

М. Б. Гагуа

2951. Полупространственный аналог теоремы Фейера — Рисса. Плесси (Half-space analogues of the Fejér — Riesz theorem. Plessis N. du), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 296—301 (англ.)

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ — гармоническая функция в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве и пусть интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)|^r\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

где число $r > 1$, ограничен для $z > 0$. Тогда

$$M_r^r(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2 \ldots x_n)|^r\, dx_1, dx_2, \ldots dx_n < +\infty,$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{z \to 0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$.

Доказываются два неравенства:

1. $\int_0^\infty |f(x_1, x_2, \ldots, x_n z)|^r z^{n-1}\,dz \leqslant A^r_{r,n} M^r_r(f)$,

где $A_{r,n} = (\Gamma[(n+1)/2]\,\pi^{-(n+1)/2})(2\pi^{n/2}(\Gamma(n/2))^{-1})^{1/r'} \times \left(\int_0^\infty \frac{t^{n/r}}{(1+t^2)^{(n+1)/2}}\,dr\right)$, $1/r + 1/r' = 1$. Константа $A_{r,n}$ есть наилучшая.

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)|^r z^{m-2} dz\,dx_m \ldots dx_n \leqslant B_{r,n} \cdot M^r_r(f)$,

где $2 \leqslant m \leqslant n+1$ и $B_{r,n}$ зависит только от r и n.

Н. А. Давыдов

2952. Обобщенная квазианалитичность на ограниченном интервале. Малявин (La quasi-analyticité généralisée sur in intervalle borné. Malliavin Paul), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 1, 41—42 (фран.)

Автор исследует условия, при которых «удовлетворяется предложение $[L, M_n R, h]$», т. е. из того, что $|f^{(n)}(t)| \leqslant M_n (0 \leqslant t \leqslant R)$ и $f^{(n)}(0) = 0 (n \in L$, где L — некоторая последовательность натуральных чисел) следует, что $f(t)$ аналитична в круге $|t| < h$. Пусть $N(t)$ — число элементов L не больших i, $N^*(t)$ — наименьшая вогнутая функция такая, что $N^*(i) \geqslant N(t)$; $\ln T(r) = \sup_n (n \ln r - \ln M_n)$. Справедливы теоремы: 1) Если $\int^\infty (\ln T(r)/r^2)\,dr = +\infty$, $\lim N(t)/t = 0$ и $d^* = \overline{\lim} N^*(r)/\ln T(r) (0 \leqslant d^* < +\infty)$, то удовлетворяется предложение $[L, M_n, R, 4R/4 + R^2 d^2]$. 2) Если для последовательности L' ряд $\Sigma_{n \in L'} 1/n$ расходится, то из предложения $[L, M_n, R, h]$ следует предложение $[L \cup L', M_n, R, h]$. 3) Пусть $d = \lim N(r)/\ln T(r)$ $(0 < d \leqslant +\infty)$; тогда предложение $[L, M_n, +\infty, h]$ ложно при $h > 1/d$. Следствие. Если в условиях теоремы 1) $d = d^*$, то предложение $[L, M_n, +\infty, h]$ удовлетворяется тогда и только тогда, когда $h \leqslant 1/d$. Доказательства отсутствуют. Л. А. Маркушевич

2953. Классы полуаналитических функций. Сан-Хуан (Classes semianalytiques. San-Juan Ricardo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 165—167 (франц.)

Рассматривается множество функций $C(m_n, D)$, аналитических в области D, имеющей граничную точку 0, для которых выполняется условие

$|f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu| |z|^{-n} < Ck^n m_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, z \in D)$,

где $m_n > 0$ — заданная последовательность, C, k — константы, зависящие от $f(z)$. $C(m_n, D)$ называется полуаналитическим классом, если для всякой функции из $C(m_n, D)$ из условия $|f(z)| < Ck^n m_n |z|^n$ вытекает, что $f(z) \equiv 0$

Приводятся без доказательства некоторые теоремы, относящиеся к таким областям D_α, для которых условие полуаналитичности выражается расходимостью ряда $\sum_{n=1}^\infty (m_n^c)^{-1/\alpha n}$, где $\{m_n^c\}$ — логарифмическая регуляризация $\{m_n\}$ (примером D_α служат области: $|z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}$). Э. З. Шувалова

2954. Псевдоаналитические функции и псевдоконформные отображения римановых поверхностей. Каччопполи (Funzioni pseudo-analitiche e rappresentazioni pseudo-conformi delle superficte riemanniane. Caccioppoli Renato), Ricerche mat., 1953. 2, 104—127 (итал.)

Пусть A и S — две абстрактные римановы поверхности, на каждой из которых определена риманова метрика, и пусть $p = f(q)$ есть отображение точек $q \in A$ в точки $p \in S$. Обозначив $|q, q'|$ и $|p, p'|$ расстояния между парами точек, измеренные в метрике соответствующих поверхностей, определим функции

$$\varphi(q) = \underline{\lim}_{q' \to q} (|f(q), f(q')| / |q, q'|)$$

и

$$\Phi(q) = \underline{\lim}_{q' \to q} (|f(q), f(q')| / |q, q'|).$$

Если почти всюду на A $\varphi(q)/\Phi(q) \geqslant \mu$, автор называет отображение псевдоаналитическим с параметром μ. Даны различные критерии для того, чтобы семейство таких функций было нормальным. Важнейшим является следующий. Пусть $\psi(t)$ — непрерывная функция, которая монотонно растет вместе с t от 0 до ∞ и такая, что $\int_t^\infty \psi^{-2}\,dt$ сходится для $t > 0$. Предположим, что на S выполняется изопериметрическое неравенство $l > \psi(a)$, где a — площадь любой подобласти и l — длина ее границы. Если A накрывает комплексную z-плоскость, то каждое семейство псевдоаналитических функций с параметром μ, отображающих A в S, нормально.

Результаты применены к доказательству различных теорем типа Пикара и обобщены классические результаты Шоттки, Ландау и Монтеля. Основная идея доказательства заключается в использовании универсальных поверхностей наложения, на которых можно утверждать выполнение вышеуказанного изопериметрического неравенства. Ясно показан метрико-топологический характер теорем типа Пикара. Методы просты и элегантны и представляют интерес также в случае, когда A и S — области в комплексной z-плоскости (квазиконформный случай). Статья представляет собой обобщение и более подробное изложение четырех предшествовавших заметок автора (C. r. Acad. sci., 1952, 235, 116—118, 228—239; Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, 13, 197—204, 321—329). M. Schiffer

Перевод из Math. Revs, 1955, 16. № 1, 27

2955. Функции гиперкомплексной переменной в n-мерном пространстве. Рошкулец (Functions of a hypercomplex variable in the n-dimensional space. Roşculeţ Marcel N.), Rev. math. et phys. (Bucureşti), 1954, 2, 124—132 (англ.)

Изложение уже опубликованных работ автора (РЖМат, 1955, 186, 2649).

2956. Ассоциативные и коммутативные линейные алгебры и присоединенные к ним моногенные функции. Рошкулец (Aigebre liniare asociative şi comutative şi funcţii monogene ataşate lor. Roşculeţ Marcel N.), Studii şi cercetari mat., 1955, 6, № 1—2, 135—173 (рум.; рез русс., фран.)

Изучаются гиперкомплексные функции

$$f(\omega) = U_0 + \theta_1 U_1 + \ldots + \theta_n U_n$$

гиперкомплексной переменной $\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n$, значения которой — элементы ассоциативной и коммутативной линейной алгебры ранга $n+1$ с единицей обозначаемой 1) и с базой $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ (θ_i не являются делителями нуля, $i = 1, \ldots, n$) над полем действительных (комплексных) чисел. $U_0, U_1, \ldots, U_n$ — функции от $x_0, x_1, \ldots, x_n$. (Эти функции автор неявно предполагает имеющими непрерывные частные произвольные 1-го, а иногда и 2-го порядков в рассматриваемой области пространства $E(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *Реф.*). Автор отправляется от двух различных (по форме) опреде-

лений моногенной функции $f(\omega)$: 1) $f(\omega)$ — моногенная в односвязной области, если для всякой замкнутой спрямляемой кривой C в этой области $\oint_C f(\omega)\,d\omega = 0$; 2) $f(\omega)$ — моногенная в данной области, если в каждой точке этой области существует производная $df(\omega)/d\omega$ для $d\omega = \theta_k\,dx_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, независимая от направлений дифференцирования (за каковые автор принимает направления координатных осей Ox_k, $k = 0, 1, \ldots, n$). Каждое из этих определений приводит к признаку моногенности $f(\omega)$ вида:

$$\theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k} = \theta_k \cdot \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i}; \quad i, k = 0, 1, \ldots, n,$$

откуда выводится система дифференциальных уравнений 1-го порядка с частными производными для функций $U_0, U_1, \ldots, U_n$, называемых «сопряженными». Доказывается, что моногенная функция $f(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_0^n \alpha_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} = 0,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, β — постоянные уравнения $\alpha_0 + \alpha_1\theta_1^2 + \ldots + \alpha_n\theta_n^2 + \beta\theta_1 = 0$, имеющего место в алгебре чисел ω. Доказывается формула

$$\int_{\Omega_n} f(\omega)\,d\sigma_{1i} = 0,$$

где Ω_n — гиперповерхность, гомеоморфная n-мерной сфере и для которой применима формула Остроградского; $d\sigma_{1i}$ — направленный гиперкомплексный элемент этой гиперповерхности вида:

$$d\sigma_{1i} = a_{1i0}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n - a_{1i1}\,dx_0\,dx_2 \ldots dx_n + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n a_{1in}\,dx_0\,dx_1 \ldots dx_{n-1} +$$
$$+ (-1)^i \theta_1\,dx_0 \ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1} \ldots dx_n;$$

a_{ijk} — постоянные закона умножения элементов базы данной алгебры:

$$\theta_i\theta_j = \sum_{k=0}^n a_{ijk}\theta_k; \quad (\theta_0 = 1;\ i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

$f(\omega)$ — моногенная в области, содержащей $(n+1)$-мерную замкнутую область с границей Ω_n.

Доказывается, что если положить $a\omega = X_0 + \theta_1 X_1 + \ldots + \theta_n X_n$, где a — гиперкомплексная постоянная (не делитель нуля и отличная от нуля), то для моногенной $f(\omega)$ имеем:

$$\theta_k = \frac{\partial f(\omega)}{\partial X_i} = \theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial X_k}; \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n),$$

т. е. признак моногенности сохраняет свой вид для новых координат: $X_0, X_1, \ldots, X_n$, иначе для $n+1$ новых направлений моногенности функции $f(\omega)$, где каждое из этих направлений определяется системой линейных уравнений: $X_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$, а для всех направлений при данном числе a берем $k = 0, 1, \ldots, n$. Можно задать произвольно одно из этих направлений — тогда число a и все прочие направления однозначно определяются.

Исследуется точечное отображение данной области D пространства (x_0, x_1, x_2) в область пространства (X_0, X_1, X_2) посредством уравнения: $\Omega = f(\omega)$, где $\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$; $\Omega = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$, а функция $f(\omega)$ либо заранее предполагается моногенной в D, либо из поставленных геометрических условий указанного отображения выводится, что $f(\omega)$ должна быть моногенной в D.

Теорема А. Пуанкаре о двойном интеграле от аналитической функции двух комплексных переменных обобщается на случай p-кратного интеграла от функции $f(\omega_1, \ldots, \omega_p)$, моногенной по каждому гиперкомплексному переменному ω_k $(k = 1, \ldots, p)$ в отдельности, причем предполагается, что база алгебры имеет вид: $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^n$, $(\theta^{n+1} = 1)$ и что

$$\omega_k = x_{0k} + \theta x_{1k} + \ldots + \theta^n x_{nk}; \quad (k = 1, \ldots, p),$$

где x_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p)$ — действительные независимые переменные и, наконец,

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_p) = U_0 + \theta U_1 + \ldots + \theta^n U_n,$$

где функции U_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ имеют непрерывные частные производные 1-го порядка по всем x_{ij} в рассматриваемой области.

Из остальных результатов работы отметим аналоги интеграла Коши для некоторых замкнутых контуров и краткую теорию степенных рядов по степеням гиперкомплексной переменной. Встречаются опечатки. Библ. 6 назв. В. С. Федоров

2957 К. Элементы теории функций комплексного переменного. Соколов (Елементи теорії функцій комплексної змінної. Соколов Ю. Д. Київ, «Радянська школа», 1954, 202 стр., 4 крб. 45 к.) (укр.)

Учебник предназначен для физико-математических факультетов педагогических институтов и дополнительных курсов высшей математики для аспирантов и студентов высших технических учебных заведений. Содержит весь основной материал, но в кратком, конспективном изложении. Многие доказательства опущены. Наименования глав: 1) Комплексные числа. 2) Комплексная переменная. Функция. Производная. Рациональные и простейшие иррациональные функции. 3) Бесконечные ряды с комплексными членами. 4) Простейшие трансцендентные функции комплексной переменной. 5) Конформные отображения. 6) Интегрирование функций комплексной переменной. 7) Разложение голоморфных функций в степенные ряды. Особые точки. 8) Элементы теории интегральных вычетов. 9) Аналитическое продолжение. К каждой главе приложены упражнения и задачи. В конце учебника даны: 1) Краткий очерк развития основных понятий теории функций комплексной переменной. 2) Решения и ответы. 3) Список основных курсов (отечественных и зарубежных) по теории функций комплексной переменной. 4) Именной указатель. 5) Предметный указатель. Имеется значительное число подстрочных примечаний, дополняющих и углубляющих изложение, а также отсылающих читателя к основным курсам. Приложения к математатической физике затронуты мало.

В. А. Зморович

См. также: 2741, 2871, 2892, 2893, 2894, 2964, 3026, 3114, 3138, 3142

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2958. Об интегрировании уравнения $y' + P_{r_1}(x)\,y^{r_1} + P_{r_2}(x)\,y^{r_2} + \ldots + P_{r_t}(x)\,y^{r_t} = 0$. Капуто (Sull'integrazione dell'equazione... Caputo Michele), Period. mat., 1955, **33**, № 1, 45—48 (итал.)

Пусть числа $r_1, r_2, \ldots, r_t$ удовлетворяют неравенствам $r_1 < r_2 < \ldots < r_t$. Показано, что дифференциальное уравнение, приведенное в заглавии, интегрируемо в квадратурах, если существуют такие числа $m_1, m_2, \ldots, m_t$, что

$$(P'_{r_2}P_{r_1} - P'_{r_1}P_{r_2})^{r_1-r_2}P_{r_1}^{2r_2-r_1-1}P_{r_2}^{r_2-2r_1+1} = [m_1(r_1-r_2)]^{r_1-r_2}m_2^{1-r_1},$$

$$P_{r_j} = m_jP_{r_1}(P_{r_2}/m_2P_{r_1})^{(r_1-r_j)/(r_1-r_2)} \quad (j = 3, 4, \ldots, t).$$

Ю. В. Сидоров

2959. Об одном дифференциальном уравнении первого порядка. Митринович (Sur une équation différentielle du premier ordre. Mitrinovitch D. S.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 1. 2. Abt. (франц.)

При помощи замены переменных $(dy/dx)^\varkappa = u$, $y^n = v$ и затем $u/v = t$ дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^\varkappa + \alpha x y^{n-1}\frac{dy}{dx} + \beta y^n = 0, \qquad (1)$$

где α, β, $\varkappa$ и n — такие действительные числа, что $\alpha\beta \neq 0$, $\varkappa \neq n$, $\varkappa \neq 1$, сводится к уравнению с разделяющими переменными. Для $\beta = \alpha\dfrac{\varkappa-1}{n-\varkappa}$ дается общее решение уравнения (1):

$$y^{\varkappa-n} = c\alpha\left(\frac{\varkappa-n}{\varkappa-1}\right)^{\varkappa-1}(c+x)^{\varkappa-1}.$$

Ю. В. Сидоров

2960. Приведение систем дифференциальных уравнений к системам первого порядка. Хербст (Reduction of differential systems to first order. Herbst Robert Taylor), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 481—487 (англ.)

Решается задача о приведении определенного вида пассивных систем Рикье высшего порядка к пассивным системам Рикье первого порядка, что позволяет в ряде случаев доказывать для систем высшего порядка теорему существования. Метод автора позволяет кратко изложить этот вопрос. П. Д. Калафати

2961. Об одном способе интегрирования инволюционных канонических систем ранга, большего нуля. Аржаных И. С., Докл. АН УзССР, 1955, № 1, 3—6 (рез. узб.)

Рассматривается новый метод формального интегрирования системы

$$dx_\nu/dt = \partial H_0/\partial y_\nu + \sum_{\rho=1}^r F_\rho\partial H_\rho/\partial y_\nu,\quad dy_\nu/dt = -\partial H_0/\partial x_\nu - \sum_{\rho=1}^r F_\rho\partial H_\rho/\partial x_\nu \ (\nu = 1, \ldots, n),$$

исследованной автором ранее (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 4, 144—153), в предположении

$$\partial H_\rho/\partial t \equiv 0,\ \sum_{\nu=1}^n [(\partial H_\rho/\partial x_\nu)(\partial H_\sigma/\partial y_\nu) - (\partial H_\rho/\partial y_\nu)(\partial H_\sigma/\partial x_\nu)] \equiv 0 \quad (\rho, \sigma = 0, 1, \ldots, r).$$

Метод основан на решении вспомогательной системы в полных дифференциалах

$$dx_\nu = \sum_{\rho=0}^r(\partial H_\rho/\partial y_\nu)\,dt_\rho,\quad dy_\nu = -\sum_{\rho=0}^r(\partial H_\rho/\partial x_\nu)\,dt_\rho \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ t_0 \equiv t), \qquad (1)$$

позволяющем свести задачу к системе r обыкновенных уравнений с r искомыми функциями. К системе (1) можно применить метод Майера, дающий гамильтонову систему

$$dx_\nu/dt = \partial K/\partial y_\nu,\ dy_\nu/dt = -\partial K/\partial x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где $K = H_0 + \sum_{\rho=1}^r m_\rho H_\rho$, а $m_1, \ldots, m_r$ — вспомогательные параметры. Разобран пример. А. Д. Мышкис

2962. Уравнения Лагранжа, канонические и обобщенные. Манд (Equations de Lagrange, équations canoniques et généralisations. Mendes Marcel), J. math. pures et appl., 1955, **34**, № 2, 145—183 (франц.)

Работа состоит из трех частей. В первой части вводится постоянный параметр в формулы Якоби для канонических преобразований и обобщаются уравнения Делассю (Delassus, Bull. Sc. Math., 1925, **49**, 8). Ставится вопрос о совпадении двух систем подобного типа и выводятся соответствующие условия. Во второй части показано, что обобщенные уравнениям Мефруа (Meffroy, Bull. Astron., 1952, **16**, 213) с помощью линейного преобразования сводятся к уравнениям Гамильтона. Дается обобщение систем подобного рода за счет включения времени в формулы линейного преобразования. Третья часть посвящена системам канонических уравнений в дифференциалах, причем автор в некоторых пунктах повторяет результаты референта (РЖМат, 1954, 1650). Выводятся условия интегрируемости, приводится формулировка теоремы Якоби — Гамильтона и отмечается применимость канонических преобразований. Уравнения записаны также в форме Лагранжа. Устанавливаются интегралы типа интеграла энергии. Отмечается связь с вариационным исчислением и в заключение строятся линейные интегральные инварианты. И. С. Аржаных

2963. Относительно уравнения Риккати. Удреску (Asupra ecuației lui Riccati. Udrescu Valeriu), Gaz. mat. și fiz., 1954, **A6**, № 12, 545—546 (рум.)

Доказано, что уравнение Риккати $y^1 = f(x)\,y^2 + g(x)y + h(x)$ интегрируемо в квадратурах, если существуют такие действительные числа a, b, c, $ac = b^2$, что $af(x) + bg(x) + ch(x) = 0$. Ю. В. Сидоров

2964. О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в единичном круге. Хартман, Винтнер (On linear, second order differential equations in the unit circle. Hartman Philip, Wintner Aurel), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, № 2, 492—500 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$w'' + I(z)\,w = 0, \qquad (1)$$

в котором $I(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Уравнение (1) назовем типа A в круге $|z| < 1$, если каждое его нетривиальное решение имеет в этом круге не более одного нуля, и — неосциллирующим в круге $|z| < 1$, если никакое его нетривиальное решение не имеет бесконечного множества нулей в этом круге.

Свойство уравнения (1) быть типа A в единичном круге равносильно однолистности в нем отношения

$w_1(z)/w_2(z)$ двух любых линейно-независимых решений $w_1(z)$ и $w_2(z)$ уравнения (1). В силу этого достаточные признаки однолистности функции $f(z)$ в единичном круге являются вместе с тем и достаточными признаками для того, чтобы уравнение было типа A соответствующего уравнения (1), в котором $I(z) = \frac{1}{2}\{f(z), z\}$.

Как замечают авторы, теорема сравнения для уравнения вида (1) (Taam C. T., Amer. J. Math., 1952, 74, 317—324), а также результаты Нехари (Nehari Z., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 545—551) о достаточных условиях однолистности функции в единичном круге вытекают из следующего известного факта функционального анализа: Если A_1 и A_2 — самосопряженные (ограниченные или неограниченные) операторы в гильбертовом пространстве и $A_1 \geqslant \text{const} > 0$, то $\lambda = 0$ не принадлежит спектру $A_1 + iA_2$.

Устанавливаются некоторые достаточные признаки для принадлежности уравнения (1) в единичном круге к типу A. Вот один из них: Для того чтобы уравнение (1) было бы типа A в круге $|z| < 1$, достаточно, чтобы $\mu(1) \leqslant 4$, где $\mu(r) = \int_{|z|=r} |I(z)\,dz|$ и $\mu(1) = \lim_{r\to 1} \mu(r)$. Для частного решения $w(z)$ уравнения (1), подчиненного условию $w(0) = 0$, приводится условие отсутствия других нулей в единичном круге, а также устанавливается ряд свойств решения $w(z)$ в случае $\mu(1) < \infty$, из которых, в частности, вытекает теорема Нехари (РЖМат, 1955, 5010) о неосцилляции уравнения (1) в этом случае. Наконец, приводится оценка для числа нулей решения уравнения (1) в круге $|z| < r$ в указанном случае. В. В. Покорный

Примечание редакции. Авторы для характеристики принадлежности уравнения к типу A применяют не переводимый на русский язык термин disconjugate.

2965. **Об остаточных членах некоторых степенных рядов. Спитковская К. М.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954, **16**, 243—252

Приводятся полученные В. П. Ермаковым остаточные члены разложений в степенные ряды некоторых простейших функций. Как обобщение этих результатов, методом Ермакова выводятся остаточные члены степенных разложений функций $y = y(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} = P(x)\,y$, где $k = 1, 2$ и $P(x)$ — аналитическая функция, регулярная в некотором интервале $|x| < r$. Дается также метод нахождения остаточных членов степенных рядов, удовлетворяющих общему линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Б. П. Демидович

2966. **О теореме Каратеодори. Алексевич, Орлич** (On a theorem of C. Carathéodory. Alexiewicz A., Orlicz W.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 414—417 (англ.)

Функция, заданная на сегменте $[a, b]$ со значениями в пространстве Банаха, называется векторно-значной функцией. С помощью векторно-значных функций доказывается теорема Каратеодори (Carathéodory C., Reelle Funktionen, Leipzig — Berlin, 1927, 672) в усиленной форме. Пусть множество S плотно в $[\alpha, \beta]$ и функция $\varphi(t, u)$, определенная для $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, непрерывна при всяком фиксированном $u \in [a, b]$ и измерима при всяком фиксированном $u \in S$. Предположим также, что $|\varphi(t, u)| \leqslant s(t)$, где $s(t)$ суммируема. Тогда существует абсолютно непрерывная функция $y(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = \varphi(t, y)$ почти везде и проходящая через точку (τ, η), $\tau \in (a, b)$, $\eta \in (\alpha, \beta)$.

Функция $y(t)$ определена для $p < t < q$, где p, q выбраны так, что

$$\int_p^\tau s(t)\,dt < \min(\beta - \eta, \eta - \alpha),$$
$$\int_\tau^q s(t)\,dt < \min(\beta - \eta, \eta - \alpha).$$

В формулировке Каратеодори условия, налагаемые на функцию $\varphi(t, u)$, более ограничительные.

Ф. И. Харшиладзе

2967. **Об особых точках обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Сибуя** (Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Sibuya Yasutaka), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 2, 41—44 (франц.)

Пусть уравнение

$$xy' = y(\lambda + yf(x, y)), \qquad (1)$$

где λ — иррациональное число, допускает формальное решение вида:

$$y = Cx^\lambda\left(1 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty b_{mn} x^m (Cx^\lambda)^n\right), \qquad (2)$$

где C и b_{mn} — постоянные. В случае голоморфности функции $f(x, y)$ при $x = y = 0$ Дюлаком (Dulac H., J. L'Ec. Poly., 1904, II, **9**, 1—125) и Зигилем (РЖМат, 1955, 2667) было показано, что ряд (2) может оказаться как расходящимся, так и сходящимся.

Приводятся более простые, чем у Дюлака, примеры уравнений вида (1) с расходящимися формальными решениями. Таково уравнение

$$xy' = \lambda y + y^2 + p(x)\,y^3,\ p(x) = \sum_{i=0}^\infty a_i x^i, \qquad (3)$$

или уравнение более общего вида

$$xy' = \lambda y + \sum_{j=2}^n p_j(x)\,y^n;\ p_j(x) = \sum_{i=0}^\infty a_{ij} x^i,$$

где λ, a_i, a_{ij} $(i = 1, \ldots, \infty, j = 1, \ldots, n)$ определяются специальным образом. Голоморфную функцию $p(x)$ в (3) можно заменить рациональной функцией $ax/(1-x)$, где a — специально выбранная постоянная; при этом соответствующий ряд (2) останется расходящимся. Таким образом, если в (1) функция $f(x, y)$ рациональна относительно x, то в общем случае нельзя ожидать сходимости ряда (2). Г. Л. Мизернюк

2968. **Исследование траекторий системы трех дифференциальных уравнений в бесконечности. Минц Р. М.,** В сб.: Памяти А. А. Андронова, М., Изд-во АН СССР, 1955, 499—534

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = P(x_1, x_2, x_3),\ \frac{dx_2}{dt} = Q(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = R(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

где P, Q, R — многочлены по x_1, x_2, x_3 степени n. Состояния равновесия системы (1) предположены «грубыми» в том смысле, что корни характеристических уравнений в точках состояния равновесия имеют действительные части не равные нулю. Трехмерное пространство (x_1, x_2, x_3) отображается во внутренность сферы по закону: $x_i = x_i^0 / \sqrt{1 + x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + x_3^{0^2}}$, $i = 1, 2, 3$.

Асимптотическое поведение траекторий при $x_i \to \infty$ исследуется посредством преобразований

$$x_{i_1} = \frac{1}{u_{i_1}},\ x_{i_2} = \frac{u_{i_2}}{u_{i_1}},\ x_{i_3} = \frac{u_{i_3}}{u_{i_1}},\ i_k = 1, 2, 3, \qquad (2)$$

при которых $u_{i_1} = 0$ соответствуют точки сферы (x_1^0, x_2^0, x_3^0) радиуса, равного 1, а u_{i_2}, u_{i_3} могут быть истолкованы как координаты проекции из центра сферы точек ее на касательные плоскости в концах диаметров $x_{i_1} = \pm 1$, $x_{i_2} = 0$, $x_{i_3} = 0$.

После преобразования (2) в системе (1) автор приходит к уравнениям, полагая в которых $u_{i_1} = 0$, получает уравнения для траекторий в плоскости (u_{i_2}, u_{i_3}); исследование их дает возможность судить о траекториях на сфере, на которую отображаются бесконечно далекие точки пространства. Оказалось, что возможные грубые состояния равновесия в бесконечности — тех же типов, что и на конечном расстоянии, именно: узел, фокус, седло, седло-фокус. На поверхности сферы (в плоскостях (u_{i_2}, u_{i_3})) им соответствуют плоские состояния равновесия — узел, фокус, седло. На поверхности сферы возможны траектории следующих типов: 1) замкнутые траектории и состояния равновесия; 2) траектории, имеющие в качестве $\alpha(\omega)$-предельной точки узел или фокус в пространстве; 3) траектории, имеющие в качестве α- и ω-предельных точек седло или седло-фокус; 4) траектории, имеющие в качестве $\alpha(\omega)$-предельных точек замкнутый предельный контур, составленный из траекторий (или предельный цикл), а в качестве $\omega(\alpha)$-предельных точек — седло или седло-фокус; 5) траектории, имеющие в качестве-α- и ω-предельных точек замкнутые предельные контуры, составленные из траекторий (или предельные циклы).

Доказывается, что траектории типа 2) не могут входить во множество предельных точек тех траекторий, которые идут внутри сферы, и на примерах показывается, что траектории остальных типов могут входить в это множество. Вводится понятие абсолютной устойчивости (неустойчивости) бесконечности: так названа бесконечность, если ни одна траектория, проходящая внутри сферы, не имеет среди своих $\alpha(\omega)$-предельных точек — точек, лежащих на поверхности сферы. Доказывается необходимый и достаточный критерий устойчивости (неустойчивости) бесконечности. Дается исследование поведения траекторий системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений на конечном расстоянии и в бесконечности в предположении грубости их, результаты исследований сведены в таблицу.

М. И. Минкевич

2969. О проблеме нелокального существования первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись А., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 2, 63—67,

О проблеме нелокального существования первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись (On the problem of non-local existence for first integrals of a system of ordinary differential equations. Plis A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, **3**, № 2, 63—67 (англ.)

Приводится пример системы

$$dy_1 / dx = Q_1(x, y_1, y_2),\ dy_2 / dx = Q_2(x, y_1, y_2) \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми правыми частями, у которой всякий первый интеграл (непрерывная функция, постоянная вдоль решений) тождественно постоянен.

Точки A и B динамической системы называются непосредственно сопряженными, если существуют последовательности $A_n \to A$ и $B_n \to B$ такие, что A_n и B_n лежат на одной траектории. Точки P' и P'' называются сопряженными, если существует конечное множество точек $P' = P_1, P_2, \ldots, P_k = P''$, в котором P_i и P_{i+1} непосредственно сопряжены. Совокупность всех точек, сопряженных с P, называется интегралом разветвления точки P. Пример состоит в построении такой системы (1), у которой интеграл разветвления одной из точек всюду плотен во всем пространстве.

Р. Э. Виноград

2970. Об особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. III. Като (Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. III. Katô Tizuko), Natur. Sci. Rept., Ochanomizu Univ., 1954, 5, № 1, 1—4 (франц.)

Продолжение прежних исследований автора (РЖМат, 1955, 1194). Изучается уравнение

$$x\,dy / dx = P(x, y) / yQ(x, y) \quad (Q(x, 0) \not\equiv 0), \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы относительно y, без общих множителей, коэффициенты которых регулярны по x при $|x| < \Delta$, причем $y = 0$ является полюсом правой части уравнения (1). Пусть для вспомогательного уравнения

$$dy / dt = P_0(y) / yQ_0(y), \quad (2)$$

где $t = \ln x$, $P_0(y) = P(0, y)$, $Q_0(y) = Q(0, y)$, существует периодическое решение с действительным периодом $\omega > 0$, голоморфное при $0 < \operatorname{Im} t < \tau$ и имеющее при $\operatorname{Im} t = \tau$ критическую точку. Обозначим через $\varphi(t, t_0)$ ветвь этого решения, допускающую действительный период ω и такую, что $\varphi(t_0, t_0) = 0$, и пусть $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$, где $D_m = \{t_0 - (m+1)\omega + \delta < \operatorname{Re} t < t_0 - (m-1)\omega - \delta,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} t < \tau\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, \delta > 0)$. Тогда, если существует решение $y = y(t)$ уравнения (1) такое, что $y(t_0 - m\omega) = 0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и если $t_0 = \ln x_0 < 0$ достаточно велико по модулю, то справедливо равномерно сходящееся разложение

$$y(t) = \varphi(t, t_0)\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0)\, e^{jt}\right] \quad (t \in D), \quad (3)$$

где $p_j(t, t_0)$ — периодические функции с действительным периодом ω, голоморфные в D всюду, за исключением точек $t_0 - m\omega$, которые являются их критическими алгебраическими точками. Б. П. Демидович

2971. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или узел. Баутин (On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type. Bautin N. N.), Amer. Math. Soc. Translation № 100, 1954, 19 pp. (англ.)

Перевод с русского (Матем. сб., 1952, **30**, 181—196). Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 527.

2972. О топологическом методе исследования поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись А., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 9, 417—420

О топологическом методе исследования поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись (On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations. Plis A.), Bull. Acad. polon, sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 9, 415—418 (англ.)

Множество A называется квазиизотопическим деформационным ретрактом множества B в топологическом пространстве E, если существует непрерывная функция $G(P, s)$ $(P \in B;\ 0 \leqslant s \leqslant 1)$, такая что: 1) $G(P, 0) = P$ при $P \in B$; 2) $G(P, s) = P$ при $P \in A$, $0 \leqslant s \leqslant 1$; 3) $G(P, 1) \in A$ при $P \in B$; 4) $G(P, s)$ является гомеоморфизмом для $0 \leqslant s < 1$ (ср. Borsuk., Fundam. math., 1933, 20, 224—231). Обобщая топологический принцип Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, 20, 279—313) и теорему Альбрехта (РЖМат, 1956, 2185), автор доказывает следующую теорему: Пусть для системы $dx_i / dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$

в некоторой области $\Omega \subset E^{n+1}$ выполнены условия существования и единственности решений. Если для открытого множества $\omega \subset \Omega$ множество точек выхода $\{P\} = S \subset \bar{\omega} - \omega$ состоит исключительно из точек строгого выхода (см. статью Важевского) и существуют множества $S_1 \subset S$ и $Z \subset \omega + S_1$ $(Z \neq 0)$ такие, что S_1 не является квазиизотопическим деформационным ретрактом множества $Z + S_1$ в $\omega + S_1$, то найдется точка $P_0 \in \omega Z$ такая, что либо положительная полутраектория $L^+(P_0) \subset \omega$, либо первая точка выхода на границу $C(P_0) \in S - S_1$. Б. П. Демидович

2973. Топология колебаний бушующих систем. Фогель (Topologie des oscillations à déferlement. Vogel Théodore), Actes Colloq. Internat. Vibrations non linéaires. Ile de Porquerolles, 1951, pp. 237—256. Publ. Sci. Techn. Ministère le l'Air, Paris, 1953, № 281 (франц.)

Пара действительных, автономных, обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, заданная на плоскости вместе с законом скачков, который действует, когда траектория пересекает некоторую кривую разрывов, называется бушующей (déferlant) системой. Автор исследует вопрос о существовании и устойчивости периодического решения бушующей системы, когда кривая разрывов (обычно простая замкнутая кривая) и два дифференциальных уравнения имеют специальный простой вид. Изложение проводится наглядно без строгого разбора общего случая. Автор ссылается на пример электрического мультивибратора, фотографии осциллограмм сравниваются с соответствующим математическим исследованием. L. Markus

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 313

2974. Обзор математической теории последующего контроля с запаздыванием и вопросов наследственности. При участии Джона М. Данскина. Беллман (A survey of mathematical theory of timelag, retarded control, and hereditary processes. With the assistance of John M. Danskin Jr. Bellman Richard), Rand Corporation, Santa Monica, Calif., 1954, XI—107 pp. (англ.)

Часто в физических явлениях (в том числе в сервомеханизмах и других следящих устройствах) важно знать хотя бы часть предыдущей истории. Это приводит к рассмотрению систем вида

$$dy_i(t)/dt = G_i(y_1(t), \ldots, y_N(t)) + \int_{-\infty}^{t} F_i(y_1(s), \ldots, y_N(s))\, dK_i(s, t), \qquad (1)$$

которые иногда могут аппроксимироваться дифференциально-разностными системами вида

$$dy_i/dt = F_i(y_1(t), \ldots, y_N(t), y_1(t-\tau), \ldots, y_N(t-\tau)) \qquad (2)$$

(τ — запаздывание, $y_i(t) = \varphi_i(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\varphi_1(t)$ известны).

Автор подробно рассматривает системы типа (2) и систематически излагает теорию этих систем в форме, которая облегчает приложения к таким задачам, как задачи автопилотирования, предсказания курса самолета (имеющего сверхзвуковую скорость) и т. д. После изложения преобразования Лапласа, обратного преобразования и операции свертки идет изучение линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Получены некоторые теоремы существования и единственности для «уравнения возобновления»: $u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-t_1)\, dG(t_1)$, когда $dG = g dt_1$. Затем изучаются асимптотические свойства решений, связанные с тауберовыми теоремами Харди — Литтлвуда и Икехара. Переход к системам уравнений возобновления (связанный с положительными операторами) приводит к дальнейшим интересным математическим исследованиям. Рассматриваются нули экспоненциальных полиномов, после чего идет теория устойчивости для дифференциально-разностных уравнений (аналог классических результатов Пуанкаре и Ляпунова), которая связывается с работой Райта. Изучается общая задача о контроле, сводящаяся к дифференциально-разностным уравнениям; частично это основано на более ранних работах Минорского. Даются приложения к математической экономике (макродинамическая модель Калецкого). Приводится обширная библиография. Обзор является искуссным и полезным освещением области, содержащей значительные возможности для дальнейших исследований. W. J. Trjitzinsky

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 962

2975. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. Леонтович Е., Майер А., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 4, 557—560

Продолжение работы, помещенной в Докл. АН СССР, 1937, **14**, № 5, 251—254. Рассматривается разбиение на траектории, заданное системой $dx/dt = P(x, y)$, $dy/dt = Q(x, y)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{G}$. Предполагается, что число орбитно-неустойчивых (см. указанную работу) траекторий и полутраекторий конечно. Вводится понятие полной схемы разбиения на траектории и формулируется теорема: Для того чтобы топологическая структура двух разбиений на траектории, заданных двумя системами указанного вида, в областях $\bar{G}$ и $\bar{G}'$ была тождественна, необходимо и достаточно, чтобы полные схемы этих двух разбиений были изоморфны. И. Н. Врублевская

2976. Об интегралах с ответвлениями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Важевский (Sur les intégrals de branchement des systèmes des équations différentielles ordinaires. Ważewski T.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 338—345 (франц.)

Пусть правые части системы

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

определены и непрерывны в открытом множестве W и обеспечивают единственность решения начальной задачи. Проведем через любую точку $P \in W$ интегральную кривую $J(P)$, которую будем считать продолженной на максимально возможный интервал изменения t: $r(P) < t < s(P)$ $(-\infty \leqslant r(P) < s(P) \leqslant \infty)$. Проверено, что функции r и s полунепрерывны соответственно сверху и снизу. Назовем интегральную линию J имеющей ответвление, если найдутся интегральные линии $J' (\neq J)$, $J_1, J_2, \ldots$ и точки $Q \in J$, $Q' \in J'$, $P_i \in J_i$, $P_i' \in J_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, для которых $P_i \to Q$, $P_i' \to Q'$ (при $i \to \infty$). Доказано, что если $J(P)$ имеет ответвление, то по крайней мере одна из функций r и s имеет в P точку разрыва, и что множество всех точек всех интегральных линий с ответвлениями имеет первую категорию. (Ранее автором (Mathematica, 1933, 8, 103—116) было показано, что это множество может быть всюду плотным в W). Все рассмотрения элементарны. А. Д. Мышкис

2977. К теории второго метода А. М. Ляпунова. Зубов В. И., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 3, 341—344

Рассматривается система уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где f_i удовлетворяют условиям, гарантирующим существование единственного решения при любом выборе начальных значений в области $-\infty < x_i < \infty$, $-\infty < t < \infty$; $f_i(0, \ldots, 0, t) = 0$, и уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \left[1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2\right]^{\frac{1}{2}} (1 + V), \quad (2)$$

где φ — положительно определенная непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi(0, \ldots; 0) = 0$. Предполагается, что для любого δ существует такое число $l^2(\delta)$, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) > l^2 \text{ при } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \delta. \quad (3)$$

Высказываются утверждения: если существует функция V, удовлетворяющая при всех x_i, t уравнению (2), то множество $1 + V = 0$ состоит из целых траекторий системы (1), если существует $\gamma > 0$ и уравнение (2) имеет такое определенно отрицательное решение V, что $V(0, \ldots, 0, t) = 0$, $-1 < v < 0$, при $0 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \gamma$, то невозмущенное решение (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Связная компонента множества $-1 < v < 0$, содержащая начало координат, будет при этом областью притяжения нулевого решения. Всякое решение, начинающееся в области $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \gamma$, обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t) < L[B(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)(t - t_0)], \quad (4)$$

где L — строго убывающая функция, $L \to 0$ при $t \to \infty$; $B > 0$.

Далее предполагается, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и выполнено (4). Утверждается, что тогда существует такая функция φ, удовлетворяющая условиям (3), что уравнение (2) допускает единственное непрерывное решение, определенное условием $v(0, \ldots, 0, t) = 0$ и существующее во всей области притяжения нулевого решения системы (1).

Е. А. Барбашин

Примечание редакции. В теореме 2 не отмечено, что функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ принадлежит классу M. Говорят, что $V(x, t) \in M$, если существует такая функция $U(x, t) \leqslant \ln[1 + V(x, t)]$, обладающая свойствами: 1) $dU/dt \geqslant 0$, где полная производная dU/dt вычислена в силу системы (1). 2) функция $U(x, t)$ определенно-отрицательная и $\inf \delta(\tau, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ для всех $\tau \in [0, +\infty)$, $\delta(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon > 0$, где $\delta(\tau, \varepsilon)$ есть наибольшее число, обладающее свойством $U(x, \tau) > R(\tau, \varepsilon)$ при $x^2 < \delta(\tau, \varepsilon)$, где $R(\tau, \varepsilon) = \sup U(x, t)$ при $t \geqslant \tau$, $x^2 = \varepsilon$. (Сообщено автором)

2978. **Одна теорема об устойчивости движения в целом. Ершов Б. А.**, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 3, 381—383

См. РЖМех, 1955, № 6, 2841.

2979. **Об асимптотическом поведении интегралов некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений. Шмидт** (Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires. Szmydt Z.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 253—276 (франц.)

Рассматриваются системы

$$dx/dt = Ax + f(t, x), \; dy/dt = Ay,$$

x и y — векторы, A — постоянная матрица, $f(t, x)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условию $|f(t, x)| \leqslant h(t)|x|$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A и $(s_q + 1)$ — размер максимального ящика, отвечающего корню λ_q в канонической форме матрицы A. Пусть $0 \leqslant l \leqslant s_q$ и p — число линейно-независимых решений y для которых существует конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} [|y| / t^l \exp(\operatorname{Re} \lambda_q t)]. \quad (1)$$

Если сходится интеграл $\int_{t_0}^{\infty} t^{s_q} h(t)\, dt$, то каждому решению y, для которого существует конечный предел (1), отвечает решение x некоторого p-параметрического семейства такое, что

$$\lim_{t \to \infty} [|x - y| / t^l \exp(\operatorname{Re} \lambda_q t)] = 0.$$

Если сходится интеграл $\int_{t_0}^{\infty} t^m h(t)\, dt$, где $m + 1$ — размер максимального ящика канонической формы матрицы A, то каждому решению y отвечает решение x такое, что $x = y + O(|y|)$.

Доказываются также другие утверждения подобного типа, в частности для диагональной матрицы $A(t)$ с переменными коэффициентами. Доказательства проводятся топологическим методом Важевского (Ważewski T., Ann. polon. math., 1947, 20, 279—313).

В. А. Якубович

2980. **О характеристическом числе исчезающего решения уравнений возмущенного движения. Пожарицкий Г. К.**, Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 4, 481—484

Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$dx_s/dt = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

где $p_{sj}(t)$ — вещественные, ограниченные, непрерывные функции времени, X_s — голоморфные относительно x_i функции, разложения которых начинаются с членов порядка не ниже второго относительно x_i с коэффициентами того же вида, что и p_{sj}, система первого приближения

$$dx_s/dt = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n, \; s = 1, \ldots, n, \quad (2)$$

и система

$$dx_s/dt = (p_{s1} + \varphi_{s1}) x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn}) x_n, \quad s = 1, \ldots, n, \quad (3)$$

в которой $\varphi_{sj}(t)$ — функции того же вида, что и p_{sj}, кроме того, $\varphi_{sj}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема. Если система (1) имеет исчезающее решение $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, а система (2) — устойчивые характеристичные числа, то характеристичное число этого решения в точности равно одному из неотрицательных характеристичных чисел системы (2).

Лемма 1. Если система (2) правильная и имеет устойчивые характеристичные числа, то система (3) также правильная.

Лемма 2. Если $|y_{j1} - y_{j2}| \to 0$ при $t \to +\infty$, $j = 1, \ldots, n$, где $y_{ji}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n$ есть два частных решения системы

$$dy_s/dt = Y_s(y_1, \ldots, y_n, t), \quad s = 1, \ldots, n,$$

то

$$[\partial Y_s/\partial y_j]_{y_i = y_{j2}(t)} - [\partial Y_s/\partial y_j]_{y_i = y_{i1}(t)} \to 0$$

при $t \to \infty$ $i, j, s = 1, \ldots, n$.

Подробно разобран пример вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. В. И. Зубов

2981. **Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для системы n дифференциальных уравнений. Плисс В. А.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 1, 17—18

Рассматривается система уравнений:

$$dx_s/dt = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

где $X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны для всех действительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обеспечивают единственность решения задачи Коши при любых начальных условиях.

Теорема. Для того чтобы тривиальное решение системы (1) было асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) точка $(0, 0, \ldots, 0)$ — единственная точка покоя системы (1); 2) тривиальное решение устойчиво в смысле Ляпунова; 3) существует гиперплоскость L вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ такая, что: а) любое решение системы (1), не пересекающее L при всех $t \geqslant T$, где T — некоторое число, стремится к точке покоя при $t \to \infty$; б) на L существует непрерывная функция V, обладающая свойствами: $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$, $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \infty$ при $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \infty$; в) если какое-либо решение $M(t)$ системы (1) пересекает L при $t = t_1$ и $t = t_2$ и $t_1 < t_2$, то $V(M(t_1)) > V(M(t_2))$.

Теорема обобщает теорему Еругина об устойчивости в целом тривиального решения системы двух уравнений (Прикл. матем. и механика, 1950, **14**, № 5, 215—217). Д. М. Гробман

2982. **Полные семейства периодических решений дифференциальных уравнений. Лефшец** (Complete families of periodic solutions of differential equations. Lefschetz Solomon), Comment. math. helv., 1954, **28**, № 4, 341—345 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dy/dt = Y(y, \mu, t), \quad (1)$$

где y — n-мерный вектор, μ — малый параметр; причем предполагается, что матрица Y голоморфна по y и μ при $y = 0$, $\mu = 0$, и непрерывна и периодична по t с периодом 2π. Если при $\mu = 0$ система (1) обладает периодическим решением $\xi(t)$ периода 2π, то по теореме Пуанкаре система (1) при малых $|\mu|$ имеет в общем случае голоморфное по μ при $\mu = 0$ периодическое решение $\xi(t, \mu)$ периода 2π и такое, что $\xi(t, \mu) \to \xi(t)$ при $\mu \to 0$. Начальные условия $\xi(0, \mu) = \xi(0) + x$ (x — действительно) этого периодического решения определяются из уравнения вида

$$z(x, 2\pi, \mu) = 0, \quad (2)$$

где z — некоторая функция, голоморфная по x и μ при $x = 0$, $\mu = 0$, причем $z(x, 0, \mu) = 0$. Это уравнение было изучено Пуанкаре в простейших случаях. Применяя метод исключения Кронекера и используя теорему Вейерштрасса о неявных функциях, автор дает полный анализ случаев, которые могут представиться для уравнения вида (2), при достаточно малом $|\mu|$. В частности, устанавливается размерность множества решений и их некоторые аналитические свойства. Отмечается, что разыскание всех периодических решений системы (1) теоретически требует лишь конечного числа шагов. В заключение рассматривается пример, иллюстрирующий теорию.

Некоторые обобщения и дополнения результатов Пуанкаре были даны также И. Г. Малкиным (Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, ОГИЗ, М. — Л., 1949). Б. П. Демидович

2983. **Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.,** Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 889—891

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}^i &= f^i(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \quad j = 1, 2, \ldots, l, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε — малый параметр. В предположении, что «вырожденная» система, соответствующая $\varepsilon = 0$, имеет устойчивое периодическое решение z_0, определяется с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическое решение z системы (1), близкое к z_0. С этой же точностью вычисляется период T периодического решения z. Я. З. Цыпкин

2984. **О неосцилляторных линейных дифференциальных уравнениях с монотонными коэффициентами. Хартман, Винтнер** (On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 207—219 (англ.)

Рассматриваются вещественные решения дифференциального уравнения

$$y'' + q(t)\, y = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad (1)$$

где $q(t)$ — вещественная функция, непрерывная и монотонная в интервале $[0, \infty)$. Предполагается, что любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет конечное число нулей на полуоси $[0, \infty)$. В этом случае, как известно, существует так называемое «главное» решение уравнения (1) $y_0(t) \neq 0$, удовлетворяющее условию $\int^{\infty} (y_0(t))^{-2}\, dt = \infty$, в то время как $\int^{\infty} (y(t))^{-2}\, dt < \infty$ для любого решения уравнения (1) $y(t) \not\equiv \text{const} \cdot y_0(t)$ (Wintner A., Amer. J. Math., 1949, **71**, 633). Вводятся функции $h_0 = y_0'^2 + qy_0^2$ и $h = y'^2 + qy^2$, монотонные в силу монотонности q (y_0 и y — нетривиальные решения уравнения (1), y_0 — главное, y — неглавное).

Установлены следующие свойства функций $h_0(t)$ и $h(t)$: 1) если $dq(t) \leqslant 0$ и $q(\infty) = 0$, то $h_0(\infty) = 0$, а $h(\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда $\int^{\infty} tq(t)dt = \infty$; 2) если $dq(t) \geqslant 0$ и $q(\infty) = 0$, то $h_0(\infty) = 0$, $h(t) > 0$, причем $h(\infty) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\int^{\infty} tq(t)\, dt = -\infty$; 3) если $q(t) < 0$ и $q(\infty) = -\infty$, то $h_0(\infty) = 0$, $h(t) < 0$, $h(\infty) = -\infty$; 4) если $q(t) < 0$ и $q(\infty) = -\omega^2$ $(0 < \omega < \infty)$, то $h_0(\infty) = 0$, а $|h(\infty)| = \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\left| \int^{\infty} \left\{ \exp 2 \int^{t} (-q(s))^{1/2}\, ds \right\} dq(t) \right| = \infty.$$

Даны некоторые дополнительные замечания о свойствах решений дифференциального уравнения (1).

И. М. Рапопорт

2985. **Об уравнении $x^{(n)} + A(t)x = 0$. Микусинский** (Sur l'équation $x^{(n)} + A(t)\, x = 0$. Mikusiński J.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 207—221 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$x^{(n)} + A(t)\, x = 0 \quad (n \geqslant 2), \quad (1)$$

где $A(t)$ — непрерывная и неотрицательная в $[\alpha, \beta]$ функция; $\omega_i(t)$ — фундаментальная система решений; $\omega_i^{(j)}(\alpha) = \delta_{ij}$, $i,j = 0, 1, \ldots, n-1$. Доказан ряд теорем, обобщающих известные осцилляционные теоремы Штурма. В частности:

Теорема 1. Если $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta]$ — последовательные нули ω_p, то между t_1 и t_2 лежит один и только один нуль ω_q $(p \neq q)$.

Наряду с (1) рассмотрено уравнение

$$x^{(n)} + B(t)x = 0. \qquad (2)$$

Пусть y и z суть ненулевые решения соответственно (1) и (2).

Теорема 2. Если в $[\alpha, \beta]: 0 \leqslant A(t) < B(t)$, функция ω_{n-1} и хоть одна из функций y и z неотрицательны, то $y < z$ в $(\alpha, \beta]$.

Пусть T_A и T_B — точные верхние границы расстояний между последовательными нулями решений соответственно (1) и (2).

Теорема 3. Пусть $n = 3$, $0 \leqslant A(t) < B(t)$ в $[\alpha, \beta]$, $T_A \neq \beta - \alpha$. Тогда $T_A < T_B$. Если $T_A = \beta - \alpha$, то $T_A = T_B$.

Аналогичная теорема доказана для $n = 4$. Библ. 10 назв. В. П. Хавин

2986. Уравнение Ван-дер-Поля с гармоническим возмущением. Фуруя (Van der Pol's equation with harmonic disturbance. Furuya Shigeru), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1954, **3**, № 1, 7—13 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$d^2x/dt^2 + \varepsilon(-1 + x^2)\,dx/dt + x = F\cos\omega t$$

(ε мало́) в резонансном случае: $\omega = 3(1 + \varepsilon\sigma)$. Основываясь на теории Боголюбова — Крылова автор исследует характер особых точек и предельных циклов системы уравнений

$$dx_1/dt = P(x_1, y_1),\quad dy_1/dt = Q(x_1, y_1),$$

или в полярных координатах

$$d\rho/dt = R(\rho, \varphi),\quad d\varphi/dt = \Phi(\rho, \varphi),$$

соответствующей первому приближению решения уравнения (1). Для исследования используются классические результаты Пуанкаре и Бендиксона.

В. М. Старжинский

2987. Об одной теореме Г. Сансоне относительно уравнения Льенара. Массера (Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard. Massera J. L.), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 367—369 (франц.)

Г. Сансоне показал (Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1950—1951, **10**, 155—171), что уравнение Льенара

$$d^2i/dt^2 + \omega f(i)\,di/dt + \omega^2 i = 0,$$

где ω — постоянная, а $f(i)$ — непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$ функция, допускает одно и только одно периодическое решение, если выполняются следующие условия: 1) $f(i) < 0$ при $\delta_{-1} < i < \delta_1$, $\delta_{-1} < 0$, $\delta_1 > 0$; 2) $f(i) > 0$ при $i < \delta_{-1}$ и $i > \delta_1$; 3) $f(\delta_{-1}) = f(\delta_1) = 0$; 4) $|f(i)| < 2$; 5) $f(i)$ не возрастает, когда i изменяется от $-\infty$ до 0, и не убывает, когда i изменяется от 0 до $+\infty$.

Показано, что в этой теореме условие 4) является излишним, так что теорема остается справедливой и при невыполнении этого условия. И. Г. Малкин

2988. Об устойчивости нелинейных вынужденных колебаний. Зламал (Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen. Zlámal Milos), Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, № 1, 95—103 (нем.; рез. русс.)

Развиваются и дополняются результаты Левинсона, Картрайта и Литлвуда о том, что всякое решение уравнения типа

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t), \qquad (1)$$

где $p(t)$ — периодическая функция t с периодом T, при определенных условиях стремится при $t \to \infty$ к периодическому решению с периодом T.

Доказывается теорема: Пусть $p(t)$ — периодическая функция с периодом T и существует такая постоянная $\omega > c > 0$, что функции $\varphi(x) = f(x) - 2c$, $\psi(x) = g(x) - \omega^2 x$ удовлетворяют неравенствам $|\varphi(x)| \leqslant L_1$, $|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqslant L_2 |x_2 - x_1|$, причем $\omega L_1 + L_2 = L < c\sqrt{\omega^2 - c}$. Тогда уравнение (1) имеет периодическое решение с периодом T, к которому все другие решения экспоненциально сходятся при $t \to \infty$ (и их производные к производной этого периодического решения). Ю. А. Митропольский

2989. Вынужденные колебания с вязким и сухим трением. Рейссиг (Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1954, **11**, № 6, 345—384 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + \mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + x = \Phi(t),$$

где $D > 0$, $\mu > 0$ — постоянные, $\Phi(t)$ — периодическая функция, $\Phi'(t)$ существует и ограничена, в любой точке $\Phi(t)$ имеет хотя бы одну отличную от нуля производную. Доказывается, что при условии $\max\Phi - \min\Phi > 2\mu$ уравнение имеет одно периодическое решение, а все другие решения стремятся к нему при $t \to +\infty$. Период решения равен периоду $\Phi(t)$ или меньше его в целое число раз (последнее возможно лишь тогда, когда имеются интервалы, на которых это решение постоянно). Случай $\max\Phi - \min\Phi \leqslant 2\mu$ разобран автором ранее (РЖМат, 1955, 3751).

Примечание референта. Вместо ограничений на производные функции $\Phi(t)$ достаточно требовать непрерывность $\Phi(t)$. А. Ф. Филиппов

2990. Период и амплитуда предельного цикла уравнения Ван-дер-Поля. Фишер (The period and amplitude of the Van der Pol limit cycle. Fisher Edward), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 3, 273—274 (англ.)

Вычисляется амплитуда и период предельного цикла уравнения Ван-дер-Поля

$$d^2y/dt^2 + \nu(y^2 - 1)\,dy/dt + y = 0 \qquad (1)$$

для всех значений ν путем графического соединения результатов, полученных для малых и больших ν. Для малых ν получены следующие формулы для периода и амплитуды:

$$T = 2\pi + \pi\nu^2/8 - (5\pi/1536)\,\nu^4 \ldots,$$
$$A^2 = \frac{1 + \nu^2/12 + 0{,}0001049\,\nu^4 \ldots}{\frac{1}{4} + 7\nu^2/384 + 0{,}0002965\,\nu^4 \ldots} \qquad (2)$$

Для больших ν принимаются асимптотические формулы Дородницина (Прикл. матем. и механика, 1947, **11**, 313). Значения T и A в зависимости от ν согласно формулам Дородницина и (2) наносятся на график, причем графики (2) и формул Дородницина для T от

$\nu = 3$ до $\nu = 7$ соединяют плавной линией, соответственно для A от $\nu = 2$ до $\nu = 5$.

Ю. А. Митропольский

2991. Влияние кулонова трения на процесс колебания. Шаблевский (Einfluß der Coulombschen Reibung auf Schwingungsvorgänge. Szablewski Witold), Math. Nachr., 1954, 12, № 3/4, 183—207 (нем.)

В общем виде рассматривается влияние кулонова трения на колебания линейной системы с одной степенью свободы и затуханием, пропорциональным скорости, описываемой дифференциальным уравнением

$$x'' + 2Dx' + x + \mu \operatorname{sgn} x' = \Phi(\tau), \qquad (1)$$

где D — коэффициент затухания, μ — коэффициент кулонова трения, $\Phi(\tau)$ — возбуждающая функция. Рассматривается периодическое решение системы, описываемой уравнением (1), имеющее два экстремума (максимум и минимум) в интервале периода.

Для уравнения (1) решаются следующие задачи: а) вычисляется периодическое решение $x(\tau)$ при данной периодической возбуждающей функции $\Phi(\eta\tau)$ и б) обратная задача — по известной периодической функции $x(\tau)$ определяется периодическая возбуждающая функция $\Phi(\eta\tau)$. Находятся явные выражения для $x(\tau)$ соответственно для $\mu > 0$ и $\mu < 0$, а также приближенные формулы для предельных случаев — для малого отношения частот ($\eta \ll 1$) и очень большого отношения частот ($\mu \gg 1$). Решается задача исключения влияния кулонова трения на периодическое колебание. Приводится система формул для периодических колебаний с четырьмя экстремумами в интервале периода. Рассмотрен случай, когда внешняя возбуждающая сила удовлетворяет функциональному уравнению: $\Phi(\eta\tau + \pi) = -\Phi(\eta\tau)$.

Подробно разобран случай нестационарного колебательного процесса, описываемого уравнением (1), и решена важная для измерительной практики задача определения возбуждающей функции $\Phi(\eta\tau)$, исходя из известных измеряемых колебаний $x(\tau)$. Для решения этой задачи указана простая вычислительная схема, позволяющая исключить влияние кулонова трения из измеряемых кривых нестационарных колебаний. Приведен ряд примеров. Ю. А Митропольский

2992. Об асимптотическом поведении решений дифференциального уравнения второго порядка. Татаркевич (Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953 (1954), **A7**, 19—81 (франц.; рез. русс.)

В уравнении

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t) \qquad (1)$$

функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ определены и непрерывны для всех $t \geqslant 0$; $f(t)$ ограничена; существуют постоянные $A > 0$, $B > 0$ такие, что

$$|a(t)| \leqslant A, \; b(t) \geqslant B. \qquad (2)$$

Тогда имеется однопараметрическое семейство ограниченных при $t \to \infty$ решений уравнения (1), производные которых также ограничены. Все решения x, не принадлежащие этому семейству, и их производные не ограничены; более того, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что функции $x(t)e^{-\varepsilon_0 t}$ и $\dot{x}(t)e^{-\varepsilon_0 t}$ не стремятся к нулю.

Если для всякого $\varepsilon > 0$ $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\varepsilon t} = 0$, то для семейства ограниченных решений

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\varepsilon t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)e^{-\varepsilon t} = 0.$$

Аналогичная теорема доказывается при разнообразных предположениях относительно функций $a(t)$ и $b(t)$, заменяющих условия (2). Все результаты обобщаются на нелинейные уравнения $\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$, где функция g удовлетворяет условию

$$|g(x, y, t)| \leqslant g_1(t)\sqrt{x^2 + y^2}, \; \lim_{t\to\infty} g_1(t) = 0.$$

В. А. Якубович

2993. Субгармоническая синхронизация вынужденных колебаний, подчиняющихся уравнению Ван-дер-Поля. Коэн (Synchronisation sous-harmonique dans le cas d'oscillations forcées conformes à l'équation de Van der Pol. Subharmonic synchronization for the forced Van der Pol equation. Cohen Hirsh G.), Actes du Colloque International des Vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, pp. 169—187; discussion, p. 186, Publ. Sci. Techn. Ministère de l'Air, Paris, 1953, № 281 (франц., англ.)

Методом возмущений вычисляется решение с периодом $2\pi/\omega$ уравнения $\ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u} + \omega_0^2 u = A\cos(3\omega t + \varphi)$, где ε мало, $\omega^2 = \omega_0^2 = c\varepsilon$. Полученная диаграмма амплитуд показывает устойчивость субгармоник третьего периода. G. E. H. Reuter

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 313.

2994. О нелинейных дифференциальных уравнениях 2-го порядка с интегрируемой правой частью. Антосевич (On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term. Antosiewicz H. A.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 64—67 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \Phi(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = e(t) \qquad (1)$$

в предположении достаточной гладкости функций $\Phi(x, \dot{x})$ и $h(x)$ для всех значений их переменных и интегрируемости непрерывной функции $e(t)$ на всей полуоси $t \geqslant 0$. Расширяя результат Сестини (РЖМат, 1955, 736), автор устанавливает:

Теорема 1. Если $\Phi(x, \dot{x}) \geqslant 0$ для всех x, $\dot{x}$, $H(x) = \int_0^x h(u)\,du > 0$ для всех $x \neq 0$, $H(x) \to \infty$ вместе с $|x|$ и $\int_0^\infty |e(t)|\,dt < \infty$, то каждое решение (1) удовлетворяет $|x(t)| < c_1$, $|\dot{x}(t)| < c_2$ при $t \to \infty$.

В случае, если $\Phi(x, \dot{x}) = f(x) + g(x)\dot{x}$, справедлива

Теорема 2. Если $a(x) = \exp\left[\int_0^x g(u)\,du\right] \leqslant \alpha$ $(\alpha \geqslant 1)$ для всех x, $h(x) \cdot \int_0^x a(u)f(u)\,du \geqslant 0$ и $H^*(x) = \int_0^x a^2(u)h(u)\,du > 0$ для всех $x \neq 0$, $H^*(x) \to \infty$ вместе с $|x|$ и $\int_0^\infty |e(t)|\,dt < \infty$, то каждое решение (1) удовлетворяет $|x(t)| < c_1$, $|\dot{x}(t)| < c_2$ при $t \to \infty$.

Наконец, если $\Phi(x, \dot{x}) = f(x)$, то имеет место

Теорема 3. Если или $f(x) \geqslant 0$ для всех x, или $h(x) \cdot \int_0^x f(u)\,du \geqslant 0$ для всех $x \neq 0$ и если $H(x) = \int_0^x h(u)\,du > 0$ для всех $x \neq 0$, $H(x) \to \infty$ вместе с $|x|$ и $\int_0^\infty |e(t)|\,dt < \infty$, то каждое решение уравнения (1) удовлетворяет $|x(t)| < c_1$, $|\dot{x}(t)| < c_2$ при $t \to \infty$.

Н. Я. Лященко

2995. Об устойчивости вынужденных колебаний с трением и линейной возвращающей силой. Рейссиг (Über die Stabilität gedämpfter erzwungener

Bewegungen mit linearer Rückstellkraft. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1955, **13**, № 3—4, 231—245 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$u'' + g(u') + \mu \operatorname{sgn} u' + u = \Phi(\tau), \qquad (1)$$

где $\max \Phi = M$, $\min \Phi = m$, $M - m > 2\mu > 0$, $|\Phi'(\tau)| \leqslant M_1$, $g(0) = 0$, $g'(x) > 0$. Пусть существуют такие $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$, что $\tau_{2n+2} - \tau_{2n} \leqslant T$, $\Phi(\tau_{2n}) = m$, $\Phi(\tau_{2n+1}) = M$, и такое $X > 0$, что

$$\min_{|x| \leqslant X} g'(x) > 2D(N), \qquad (2)$$

где $D(X)$ — введенная автором функция, зависящая от X и от параметра $\Delta = (M - m)/2 - \mu$ (для функции, обратной к $D(X)$, приведено явное выражение). Тогда: 1) любое решение, уравнения (1) ограничено при $\tau \geqslant 0$: $|u| \leqslant K_0$, $|u'| \leqslant K_1$; 2) для любых решений u_1 и u_2 $u_1 - u_2 \to 0$, $u_1' - u_2' \to 0$ при $\tau \to +\infty$; 3) если $\Phi(\tau)$ имеет период T, то существует только одно периодическое решение, его период равен T (иногда T/n, n — целое).

Функция $D(X)$ в (2) такова, что уравнение, получаемое из (1) заменой $g(u')$ на $2D(X)u'$, имеет периодическое решение, для которого $|u'(\tau)| \leqslant X$.

А. Ф. Филиппов

2996. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке. Дикий Л. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 4, 187—200

Рассматривается задача

$$d^2u/dx^2 + p(x)u + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \qquad (1)$$

с бесконечно дифференцируемым коэффициентом $p(x)$.

Пусть λ_n — собственные значения задачи (1) и $\varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции. Изучаются функции

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}, \quad Z(s;\ x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$$

для комплексных s. Эти функции естественно назвать дзета-функциями оператора (1). Доказывается, что дзета-функции оператора (1) могут быть аналитически продолжены во всю комплексную s-плоскость, причем $Z(s, x, y)$ при $x \neq y$ есть целая функция, а $Z(s)$ и $Z(s; x, x)$ имеют простые полюсы в точках $s = {}^1/_2, -{}^1/_2, -{}^3/_2, \ldots$. Дается способ для вычисления вычетов этих функций, а также способ для вычисления $Z(-k)$ и $Z(-k; x, y)$, т. е. сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k \varphi_n(x) \varphi_n(y)$. Оказывается, что эти суммы (в смысле аналитического продолжения, можно понимать как суммы сходящихся рядов, которые получаются, если у λ_n и $\varphi_n(x)$ отбросить те члены асимптотики, которые мешают сходимости. При $k = 1$ получается результат референта и И. М. Гельфанда (РЖМат, 1953, 239).

Б. М. Левитан

2997. О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций. Глазман И. М., Наймарк М. А., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 445—448

Изучается строение совокупности всех спектральных функций дифференциальной системы

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = 0, \ y'(0) = hy(0) \quad (0 \leqslant x \leqslant \infty) \qquad (1)$$

как выпуклого множества. Пусть V есть множество всех спектральных функций $\sigma(\lambda)$ системы (1), N — класс всех комплексных функций $\tau(z)$, регулярных в верхней полуплоскости и имеющих там неотрицательную мнимую часть. Множество V выпукло; ортогональные спектральные функции системы (1) являются экстремальными точками множества V. Доказаны теоремы:

1. Замкнутая выпуклая оболочка ортогональных спектральных функций системы (1) порождается по формуле М. Г. Крейна (РЖМат, 1953, 238) совокупностью функций $\tau(Z) \in N$ вида $\tau(z) = \tau^*[u(z)]$, где τ^* — произвольная функция класса N и $u(z) = Q_0(z)/Q_1(z)$.

2. Выпуклое множество V является замыканием множества своих экстремальных точек.

Из теоремы 1, в частности, следует, что экстремальные точки V не исчерпываются ортогональными спектральными функциями. В связи с этим дается характеристика экстремальных точек V, отличных от ортогональных спектральных функций.

Б. М. Левитан

2998. Нелинейная краевая задача для дифференциальной системы второго порядка. Уайберн (A nonlinear boundary value problem for second order differential systems. Whyburn William M.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 147—160 (англ.)

Рассматривается система уравнений:

$$dy/dx = K(x, y, z; \lambda)z, \ dz/dx = H(x, y, z; \lambda)y \qquad (1)$$

при граничных условиях:

$$\psi(a, \lambda) = 0, \ \varphi(a, \lambda) = \varphi(b, \lambda), \qquad (2)$$

где $\psi(x, \lambda) = \gamma(x, \lambda)z(x, \lambda) - \delta(x, \lambda)y(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda) = \alpha(x, \lambda)z(x, \lambda) - \beta(x, \lambda)y(x, \lambda)$; а $K(x, y, z; \lambda)$ и $-H(x, y, z; \lambda)$ — вещественные, положительные функции, непрерывные относительно y, z и λ при любом фиксированном x ($a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < y, z < +\infty$, $L_1 < \lambda < L_2$), ограниченные некоторой функцией $M(x)$, суммируемой по Лебегу. Кроме того, $\alpha(x, \lambda)$, $\beta(x, \lambda)$, $\gamma(x, \lambda)$ и $\delta(x, \lambda)$ непрерывны ($a \leqslant x \leqslant b$; $L_1 < \lambda < L_2$), $\beta(x, \lambda)$ не меняет знака, $\delta(a, \lambda) \neq 0$ и $\alpha(a, \lambda)\delta(a, \lambda) - \beta(a, \lambda)\gamma(\alpha, \lambda) \neq 0$ ($L_1 < \lambda < L_2$). Исследуя заменой переменных $y(x, \lambda) = u(x, \lambda)\sin v(x, \lambda)$; $z(x; \lambda) = u(x, \lambda) \times \cos v(x, \lambda)$ разность $q(x, \lambda) = v(x, \lambda) - \tau(x, \lambda)$, где $\tau(x, \lambda) = \operatorname{arctg}[\alpha(x, \lambda)\beta^{-1}(x, \lambda)]$, автор обозначает через μ_n число, удовлетворяющее уравнению $q(b, \mu_n) = (n - {}^1/_2)\Pi$, а через ν_n число, удовлетворяющее уравнению $q(b, \nu_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Pi$. При известных условиях между этим числами лежат собственные числа задачи {(1), (2)}, которые автор называет ρ_n. Для соответствующих собственных функций $y(x, \rho_n)$ и $z(x, \rho_n)$ задачи {(1), (2)} устанавливаются осцилляционные теоремы.

П. Д. Калафати

2999. Обобщенные интегральные формулы Фурье. Черчилл (Generalized Fourier integral formulas. Churchill R. V.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 133—139 (англ.)

Рассматривается вопрос о разложении «произвольной» функции $f(x)$ по решениям $y(x, \lambda)$ уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$, удовлетворяющим граничному условию $hy - ky' + my'' = 0$ при $x = 0$ (h, k, m — неотрицательные постоянные, не все равные нулю). При $m \neq 0$ граничное условие явно содержит параметр λ. Обобщенная интегральная формула Фурье (при $k \neq 0$) имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos[\lambda x - \alpha(\lambda)] \int_0^{\infty} f(\mu)\cos[\lambda\mu - \alpha(\lambda)]\, d\mu d\lambda, \qquad (1)$$

где $\alpha(\lambda) = \operatorname{arctg}\dfrac{h - m\lambda^2}{k\lambda}$. Формула (1) справедлива для всякой ограниченной на каждом конечном интервале и абсолютно интегрируемой на полуоси $x \geqslant 0$ функции, представимой обычным интегралом Фурье. При некоторых дополнительных предположениях доказывается взаимная к (1) формула:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos[\lambda x-\alpha(x)]\int_0^\infty f(\mu)\cos[\lambda\mu-\alpha(\mu)]\,d\mu\,d\lambda+$$
$$+\frac{2m}{\pi k}\cos\alpha(x)\int_0^\infty f(\mu)\cos\alpha(\mu)\,d\mu.$$

А. А. Чудов

3000. О некотором дифференциальном уравнении. К у б о (Sur une certaine équation différentielle. K u b o O s u k e), Sci. Repts Saitama Univ., 1954, 1, № 3, 105—109 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$dy/dx=(1-y^2)/(y+p(x))\equiv F(x,y) \qquad (1)$$

и эквивалентное ему уравнение в частных производных

$$\partial z/\partial x+F\,\partial z/\partial y=0. \qquad (2)$$

Пусть $M(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения $dy-F\,dx=0$, $y=g(x)\neq -p(x)$ — корень уравнения $M(x,y)=0$ и $y=\varphi(x)$ — корень уравнения $1/M(x,y)=0$. Показано: 1. $y=g(x)$ и $y=\varphi(x)$ есть решения уравнения (1). 2. Если решение уравнения (2) есть рациональная функция от y:

$$z=u(x)\frac{(y-a_1)\dots(y-a_k)}{(y-b_1)\dots(y-b_k)},$$

где $u, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ — действительные или комплексные функции от x, то $u(x)$ должна быть постоянной, а $p(x)$ должна выражаться через a_i и b_i из уравнения

$$\sum_{i=1}^k\frac{1}{a_i+p}-\sum_{i=1}^k\frac{1}{b_i+p}=0.$$

Ю. В. Сидоров

3001. «Новая» задача о собственных значениях. Ц в а л ь е н (Ein «neues» Eigenwertproblem. Z w a h l e n R o b e r t), Actes Soc. Helv. Sci. Nat., 1954 (1953), 133, 60—65 (нем.)

Рассматриваются примеры дифференциальных уравнений с параметром, «собственные решения» которых можно получить последовательно, расширяя операционный процесс Дирака. W. Leighton

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 959

3002. Роль функции Коши для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. К и м Ю. Ц., Науч. тр. Казан. ин-та инженеров-строит. нефт. пром-сти, 1954, № 2, 133—141

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L_n(y)=y^{(n)}+\sum_{i=1}^n P_i(x)\,y^{(n-i)}=0. \qquad (1)$$

Функция $H(x,t)$ называется функцией Коши для уравнения (1), если $L[H(x,t)]=0$ и

$$H^{(s)}(x,x)\begin{cases}0 \text{ при } s=0,1,2,\dots,(n-2),\\ 1 \text{ при } s=n-1.\end{cases}$$

Доказана теорема: Если $H_1(x,t)$ и $H_2(x,t)$ — соответственно функции Коши для уравнений $L_n(y)=0$ и $L_m(y)=0$ с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ в интервале (a,b) и $P_i(x)$ имеет производные порядка m, то $\int_t^x H_1(x,\xi)H_2(\xi,t)\,d\xi$ будет функцией Коши для уравнения $L_m[L_n(y)]=0$.

Опираясь на эту теорему, автор установил, что можно: 1) понизить порядок уравнения (1) на m единиц, если известны его m первых интегралов; 2) образовать решение интегро-дифференциального уравнения

$$L_n(y)-\lambda\int_a^b K(x,t)/(x-t)^{-\alpha}\,L_m(y)\,dt=f(x),\quad \alpha>1,$$

если удастся найти резольвенту ядра

$$R(x,t)=\sum_{s=0}^m Q_s(x)\frac{d^s}{dx^s}\int_0^x\frac{H(x,\xi)\,K(\xi,t)}{(\xi-t)^\alpha}\,d\xi.$$

М. И. Розовский

3003. Одноточечная краевая задача для некоторых уравнений в вариациях. С а х р и с с о н (Problème aux limites posé à une seule extrémité dans quelques équations aux variations. The onepoint boundary problem of some variation equations. Z a c h r i s s o n L.E.), Actes du Colloque International. Vibrations non linéaires. Ile de Porquerolles, 1951, pp. 31—43, Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, Paris, 1953, № 281 (франц., англ.)

Исследуются различные свойства функции Коши $u=u(t,\tau)$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu(t)\,d^\nu u/dt^\nu=0, \qquad (1)$$

определенной одноточечными условиями $\partial^i u(t,\tau)/\partial t^i=\delta_{i,n-1}\,(i=0,1,\dots,n-1)$ при $t=\tau$. Особое внимание уделено случаям, когда (1) имеет простую особую точку при $t=0$ и когда (1) имеет особую точку единичного ранга при $t=\infty$. W. T. Reid

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 530

3004. К теории асимптотических представлений интегралов линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. М о и с е е в Н. Н., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, 32, № 4, 131—134

Дается асимптотическое представление решения уравнения

$$y''+\lambda^2[a^2(x)+\lambda^{-1}b(t\lambda)]\,y=0$$

с помощью асимптотических представлений решений уравнения

$$y''+\lambda^2a^2(x)\,y=0.$$

Имеются ошибки, однако если следовать ходу рассуждений автора и исправить ошибки, то получится уже известный результат (РЖМат, 1955, 201).

В. И. Бурдина

3005. Применение матрицанта в задачах с собственными значениями. Х е л ь м а н (Die Anwendung des Matrizanten bei Eigenwertaufgaben. H e l l m a n O.), Z. angew Math. und Mech., 1955, 35, № 8, 300—315 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка или система таких уравнений заменяется эквивалентной системой 1-го порядка $dx/dt=A(t)\,x$, где $A(t)$ — матрица. Решение такой системы, записанное при помощи матрицанта

$$I+\int_0^t A\cdot d\tau_0+\int_0^t A\,d\tau_1\int_0^{\tau_1}A\,d\cdot\tau_0+\dots,$$

подставляется в краевые условия. Получается уравнение для определения собственных значений.

Многие краевые задачи математической физики (крутильные колебания, колебания при изгибе, задачи, приводящиеся к уравнению Штурма — Лиувилля общего вида, и др.) сводятся к простому частному случаю, когда в каждой строке и в каждом столбце матрицы A имеется лишь один отличный от нуля элемент. В этом случае элементы матрицанта могут быть вычислены и изложенный метод становится эффективным для приближенного вычисления собственных значений. Приведены примеры. Ф. Р. Гантмахер

3006 Д. **Об устойчивости решений систем уравнений в конечных разностях. Скалкина М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3007. **О разрывах в решениях квазилинейных уравнений. Яненко Н. Н.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 195—202

Рассматривается задача Коши для квазилинейной системы

$$A_i(u, v)\frac{\partial u}{\partial x} + B_i(u, v)\frac{\partial u}{\partial y} + C_i(u, v)\frac{\partial v}{\partial x} + D_i(u, v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

гиперболического типа, причем автор переносит сюда некоторые методы, применявшиеся ранее при исследовании плоской задачи газовой динамики. Замена искомых функций на основе уравнений характеристик приводит к системе

$$\partial r/\partial y + f_1(r, s)\,\partial r/\partial x = 0,\ \partial s/\partial y + f_2(r, s)\,\partial s/\partial x = 0.$$

Автор допускает, что при достаточно больших y волны r и s разойдутся (т. е. при $y \geqslant y_0$ в области изменения r будет $s = \text{const}$, а в области изменения s будет $r = \text{const}$) и показывает, как с ростом y (играющего роль времени) меняется вид волны и решение обязательно претерпевает разрыв, за исключением случая, когда $\partial f_1/\partial r \equiv \partial f_2/\partial s \equiv 0$. Этот последний случай рассматривается более подробно: приводится необходимое и достаточное условие его осуществления; автор находит первый интеграл $x = h(\alpha) + k(\beta)$, $y = \alpha + \beta$, $f_2(r) = k'(\beta)$, $f_1(s) = h'(\alpha)$ (функции h и k произвольны) и показывает, что особенности передаются вдоль характеристики и имеются в решении тогда и только тогда, когда они имеются в начальных данных. К тому же результату автор приходит (нестрого), заменяя в системе уравнений, которым удовлетворяют $\partial r/\partial x$ и $\partial s/\partial x$, коэффициенты на постоянные; этот метод применим для любого числа аргументов.

В соответствии с пропедевтическим, вводным характером работы формулировки не имеют окончательного вида и не всюду достаточно точны; некоторые утверждения обоснованы не полностью. А. Д. Мышкис

3008. **Об одной теореме типа Фрагмена — Линделёфа для систем линейных уравнений с частными производными. Шилов Г. Е.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 207

Изучается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t), \qquad (1)$$

где x — точка N-мерного пространства, $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ — система m неизвестных комплекснозначных функций, $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная матрица порядка m, элементами которой являются многочлены относительно операторов $i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ с постоянными коэффициентами.

Приводится без доказательства следующая теорема, которая является аналогом теоремы Фрагмена — Линделёфа: Если при всех вещественных $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ характеристические корни матрицы $P(s)$ вещественны, то любое решение системы (1), удовлетворяющее условиям: а) при каждом $\varepsilon > 0$ и всех значениях t и x $|u(x, t)| \leqslant C_\varepsilon \exp(\varepsilon|t| + A|x|^\gamma)$, $\gamma < 1$, $C_\varepsilon > 0$, $A > 0$; б) $|u(x, 0)| < C(1 + |x|)^q$, $q \geqslant 0$, целое, является многочленом относительно t:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{r} u^{[k]}(x)\,t^k,\ r \leqslant q + [N/2] + m + 1,$$

причем вектор-функции $u^{[k]}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{[r]}(x) = 0,\quad P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{[k-1]}(x) = ku^{[k]}(x)\ (k \leqslant r).$$

Б. М. Левитан

3009. **Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Житомирский Я. И.,** Матем. сб., 1955, **36**, № 2, 299—310

Подробное изложение опубликованных ранее без доказательств результатов (РЖМат, 1955, 5167).

Б. М. Левитан

3010. **Область существования интегралов уравнений с частными производными высшего порядка. Салтыков** (Област егзистенције интеграла парцијалних једначина вишег реда. Салтиков Н.), Глас Српске акад. наука, 1953, **206**, Од. прир.-матем. наука, 5, 31—38 (серб.; рез. франц.)

Уточняется область сходимости степенного ряда, полученного при решении задачи Коши для линейного уравнения второго порядка на плоскости. Для этого находится (в виде формулы) решение задачи $\partial Z/\partial x =$

$$= M(1 - x/a)^{-1}(1 - y/b)^{-1}(2\partial Z/\partial y + 3Z + 1),\ Z|_{x=0} = 0.$$

При аналогичном уточнении для нелинейного уравнения автор не следит за мажорированием начального условия и потому функция, которая должна служить мажорантой (стр. 36, строка 2 сверху), получается имеющей коэффициенты разложения обоих знаков.

Имеются опечатки: заключение на стр. 34, строки 15—13 снизу не обосновано. А. Д. Мышкис

3011. **Об интегрировании одной системы дифференциальных уравнений. Смирнов М. М.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 1, 127—128

Задача

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = a(T - \theta),\ \frac{\partial T}{\partial y} = -b(T - \theta), \qquad (1)$$
$$\theta(x, y)|_{x=0} = 0,\ T(x, y)|_{y=0} = 1$$

(a, b — постоянные) была решена Нуссельтом (Nußelt W., Techn. Mech. und Thermodynamik, 1930, **1**, № 2). Автор предлагает более простой способ решения (1); исключая θ и полагая $T = e^{-ax-by}u$, $\xi = ax$, $\eta = by$, он сводит (1) к задаче $\partial^2 u/\partial\xi\,\partial\eta = u$, $u|_{\xi=0} = 1, u|_{\eta=0} = e^\xi$, обобщенное решение которой получено Н. П. Еругиным.

А. Ф. Андреев

3012. **Периодические колебания нелинейных систем с бесконечным числом степеней свободы. Стокер** (Oscillations périodiques des systèmes non linéaires ayant une infinité de degrés de liberté. Periodic oscillations of nonlinear systems with infinitely many degrees of freedom. Stoker J. J.), Actes du Colloque International. Vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, pp. 61—74; discussion, p. 75, Publ. Sci. Techn. Ministère de l'Air, Paris, 1953, № 281 (франц., англ.)

Метод малого параметра Пуанкаре в теории периодических решений предлагается распространить на уравнения в частных производных вида

$$u_{xx} - u_{tt} = \varepsilon f(u, x, t).$$

Автор указывает, что здесь могут быть трудности (например, «малые делители») при доказательстве соответ-

ствия возмущенных схем. В качестве примера вычисляется (эвристически) первое приближение решения периода $2\pi/\omega$ для уравнения типа Доффинга

$$u_{xx} - u_{tt} + \varepsilon(u + \beta u^3) = \varepsilon F \sin x \cos \omega t,$$

когда $\omega - 1 = O(\varepsilon)$. G. E. H. Reuter

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 313.

3013. Лиевы интегралы уравнений с каноническими переменными второго класса. Салтыков (Интеграли S. Lie-a једначина са каноничким променљивим друге класе. Салтиков Н.), Глас Српске акад. наука, 1953, 206, Од. прир.-матем. наука № 5, 71—78 (серб.; рез. франц.)

Для того чтобы уравнение $p_1 + H(p_2, \ldots, p_n) = 0$ ($p_i = \partial z/\partial x_i$) имело лиев полный интеграл q-го класса

$$z = V(x_1, \ldots, x_{n-q}, G_1, \ldots, G_{n-1}) + C_n,$$

$$x_{n-q+j} = \varphi_j(x_1, \ldots, x_{n-q}, C_1, \ldots, C_{n-1}) \quad (j = 1, \ldots, q),$$

нужно, чтобы оно имело вид

$$p_1 + \sum_{j=1}^{q} \Theta_j(p_2, \ldots, p_{n-q}) p_{n-q+1} + \Theta(p_2, \ldots, p_{n-q}) = 0$$

(Θ_j и Θ — произвольные функции). Тогда полный лиев интеграл образуется соотношениями

$$z = -\Theta(C_1, \ldots, C_{n-q-1}) x_1 + \sum_{k=1}^{n-q-1} C_k x_{k+1} + C_{n-q},$$

$$x_{n-q+j} = \Theta_j(C_1, \ldots, C_{n-q-1}) x_1 + C_{n-q+j} \quad (j = 1, \ldots, q).$$

C_i — произвольные постоянные; при $q = 0$ получается полный лагранжев интеграл. А. Д. Мышкис

3014. Геометрический смысл характеристических функций интегралов характеристик уравнения с частными производными и двумя независимыми переменными. Рашайский (Геометриско значење карактеристичних функција интеграла карактеристика парцијалних једначина са две независно променљиве количине. Рашајски Боривоје), Глас Српске акад. наука, 1953, 206, Од. прир.-матем. наука, № 5, 3—16 (серб.; рез. франц.)

Для уравнения $F(x, y, z, p, q) = 0$ дается геометрическое истолкование двух способов получения полного интеграла, в одном из которых интегральные поверхности получаются из характеристик, имеющих постоянные x_0, q_0 и $z_0 - y_0 q_0$, а в другом — постоянные x_0, y_0 и z_0. Выводятся простейшие соотношения, которым удовлетворяют элементы этих поверхностей. В заключение приводится известное построение решения задачи Коши при помощи характеристик. Изложение формальное (не уточняются предположения об участвующих функциях, их области определения и т. д.), имеются опечатки, отметим, что вместо знака $\neq$ автор применяет обозначение $\gtrless$. А. Д. Мышкис

3015. Об аналитических решениях уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right).$$

Киро С. Н., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 29—46

Доказывается теорема: Пусть в названном уравнении и в начальных условиях

$$u(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n),$$

$$u(x_1, x_2^0, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_3, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

f, φ, ψ аналитичны в какой-либо окрестности точки

$$x_1^0, \ldots, x_n^0; u^0; \frac{\partial u^0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u^0}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_{n-1} \partial x_n}. \qquad (2)$$

Тогда, если в этой окрестности $\varphi(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_n) = \psi(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_n)$ и выражение $4 \dfrac{\partial f}{\partial u_{x_1 x_1}} \dfrac{\partial f}{\partial u_{x_2 x_2}} - 1$ принимает в точке (2) значение, не являющееся вещественным положительным числом, то в некоторой окрестности точки (2) уравнение имеет единственное аналитическое решение, удовлетворяющее условиям (1).

Для случая двух независимых переменных эта теорема была доказана Н. М. Гюнтером (Матем. сб., 1924, 32, № 1, 26—42).

Автор использует метод Гюнтера, но вместо численных неравенств применяет функциональные неравенства подобно тому, как это делается в работе референта (Матем. сб., 1948, 22, № 2, 205—266). Н. А. Леднев

3016. О существовании аналитических интегралов дифференциальных уравнений в частных производных анормального типа. Асадуллин Э. А., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 169—179

Указываются условия, которые следует наложить на многочлены $B_k(y)$ и $\varphi_s(y)$ для того, чтобы уравнение

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = \sum_{k=1}^{r} B_k(y) \frac{\partial^{q_k} u}{\partial y^{q_k}} \quad (0 \leqslant q_1 < q_2 \ldots < q_r)$$

с начальными условиями $\partial^s u/\partial x^s\big|_{x=0} = \varphi_s(y)$, $s = 0, \ldots, p-1$, допускало аналитическое относительно x решение в окрестности $x = 0$. Задача автора примыкает к общей задаче, которая была сформулирована референтом (Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ. матем. и техн. н., 1948, № 1, 63—74). Доказательство теорем и формулировка основных результатов не везде проведены четко. Г. С. Салехов

3017. Соотношение между частного вида линейными интегральными уравнениями первого и второго рода и решение задачи Дирихле при помощи потенциала простого слоя. Блюмер (Beziehungen zwischen speziellen linearen Integralgleichungen erster und zweiter Art und Lösung des Dirichletschen Problems durch das Pontential einer einfachen Schicht. Blumer Hans), Comment. math. helv., 1954, 28, № 3, 197—224 (нем.)

Рассматривается вопрос о сведении интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_\Omega K(p, q) g(q)\, dq = f(p) \qquad (1)$$

к интегральному уравнению 2-го рода. Здесь p, q — точки поверхности Ω, $0 < \rho < 2$, B_1 — регулярная дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$K(p, q) = r^{-\rho} + B_1(p, q). \qquad (2)$$

Доказывается, что если $f(p) \in C^2$, а уравнение поверхности Ω дифференцируемо шесть раз, то такое сведение возможно. В качестве аппарата для сведения используется функция Грина уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$; автор строит оператор, применение которого к обеим частям уравнения (1) приводит его к интегральному уравнению 2-го рода.

Известно, что отыскание решения задачи Дирихле в трехмерном пространстве в виде потенциала простого

слоя приводит к решению интегрального уравнения 1-го рода $\int r^{-1}\mu(p,q)\,dq = f(q)$. Используя указанные выше результаты, автор доказывает, что задача Дирихле допускает решение в виде потенциала простого слоя, если уравнение поверхности 6 раз непрерывно дифференцируемо и граничное значение $f(p) \in C^2$.

Примечание референта. Вопрос о представимости решения задачи Дирихле потенциалом простого слоя в пространственном случае был решен А. М. Ляпуновым (Избранные труды, Изд. АН СССР, 1948, 158—173) при меньших ограничениях, чем в реферируемой работе. Тот же вопрос для логарифмического потенциала решен Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, ГТИ, 1946, 187—194) при меньших ограничениях, чем в работе Бертрана (Bertrand G., Bull. sci. math. 1923, **47**, sér. 2, 282), на которую ссылается автор. Ф. Д. Гахов

3018. О краевых задачах для сильно эллиптических систем. Гусева О. В., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 6, 1069—1072

В пространстве $L_2(D)$ рассматривается эллиптическое уравнение

$$Au = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=k} A_k^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} = f(x).$$

Предполагается, что коэффициенты достаточно гладкие, а область D конечная, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S, на которой обращается в нуль искомая функция и все ее производные порядка $\leqslant n-1$. Оператор A положительно определенный на функциях, удовлетворяющих в среднем перечисленным краевым условиям и имеющих квадратично суммируемые в D производные порядка $\leqslant 2n$; множество таких функций обозначено через $\overset{0}{W}{}_2^{2n}$.

Основной результат: Теорема 3. Если граница S непрерывно дифференцируема $2n + \max\{m, n\} + 1 + l$ раз и $A_k^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x) \in C^{\gamma(k,m)+l}(\overline{D})$, то при $f(x) \in W_2^l(D)$ решение $u(x) \in W_2^{2n+l}(D)$ и допускает оценку $\|u\|_{W_2^{2n+l}(D)} \leqslant c_5 \|f\|_{W_2^{(l)}(D)}$, $c_5 = \text{const}$. Здесь $\gamma(k,m) = k+m$ при $k < 2n$, $\gamma(k,m) = 2n + \max\{m,n\}$ при $k = 2n$.

Аналогичная теорема сформулирована и для сильно эллиптических систем. Подробные доказательства отсутствуют, однако намечена схема доказательства теоремы 2, которая представляет собой частный случай теоремы 3 при $l = 0$. Именно оператор $\tilde{A}$ задается на $D(\tilde{A}) = \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)$ дифференциальным выражением A. Формулируются два утверждения, из которых вытекает теорема 2: 1) область $R(\tilde{A})$ значений оператора $\tilde{A}$ замкнута; 2) $P = L_2(D) \ominus R(\tilde{A}) = 0$. Утверждение 1) доказывается, 2) вытекает из лемм: а) $P \subset W_2^{2n}(D)$; б) $P \cap \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D) = 0$, приводимых без доказательства. Библ. 10 назв. С. Г. Михлин

3019. Единственность задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа. Зайдман, Бобок (Unicitatea problemei lui Dirichlet pentru ecuaţii de tip eliptic. Zaidman S., Boboc N.), Bul. stiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 4, 839—846 (рум.; рез. русс., франц.)

Примечание редакции. По просьбе авторов, отмечаем, что доказательство изложенных в статье утверждений ошибочно.

3020. О неравенстве, относящемся к собственным значениям мембраны. Хун (On an inequality concerning the eigenvalue problem of membrane. Hong Imsik), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 4, 113—114 (англ.)

Доказывается теорема: Нижняя грань вторых собственных значений закрепленной мембраны площади A равна наименьшему собственному значению закрепленной круглой мембраны площади $A/2$ (которое равно $2\pi j^2/A$), где $j = 2{,}4048$ — первый нуль функции Бесселя $J_0(x)$. Доказательство опирается на известный результат Пойа и Сегё о наименьшем собственном значении закрепленной мембраны площади A. Б. М. Левитан

3021. О спектрах дифференциальных операторов второго порядка. Рей (On spectra of second-order differential operators. Ray Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 292—321 (англ.)

Рассматривается дифференциальный оператор $L = -\Delta - V(x)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\overline{\Omega})$, где Ω — область в N-мерном евклидовом пространстве R^N, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω; в качестве краевого условия берется условие обращения функции в нуль на границе Ω. Предполагается, что для каждой граничной точки Ω существует шар с центром в этой точке, некоторый сектор которого находится целиком вне $\overline{\Omega}$, $V(x)$ неотрицательна, измерима по Борелю на $\overline{\Omega}$, ограничена на каждом ограниченном множестве в $\overline{\Omega}$ и для почти каждой точки $x \in \Omega$ $|V(x) - V(x')| < M(x)|x - x'|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ для всех x' из некоторой окрестности точки x. Доказываются следующие теоремы, обобщающие известные результаты Вейля, Карлемана и Титчмарша.

Если Ω ограничена или если Ω не ограничена и $\lim_{|x|\to\infty, x\in\overline{\Omega}} V(x) = \infty$, то спектр L дискретен и состоит из отрицательных собственных значений $-\lambda_n$ с собственными функциями $\varphi_n(x)$, образующими полную ортогональную систему в $L^2(\overline{\Omega})^n$. Кроме того, при $\lambda \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\sum_{\lambda_n<\lambda} \varphi_n^2(x) \sim (\lambda/2\pi)^{N/2}\,\Gamma^{-1}(N/2+1), \qquad (1)$$

$$N(\lambda) \equiv \sum_{\lambda_n<\lambda} 1 \sim (\lambda/2\pi)^{N/2}\mu(\overline{\Omega})\,\Gamma^{-1}(N/2+1),$$

где μ — лебегова мера в R^N.

Если при неограниченной Ω, кроме того:

1) $\mu\{x \in \overline{\Omega} \mid V(x) < \lambda\} \sim \lambda^\alpha F(\lambda)$

при $\lambda \to \infty$, где $\lim_{\lambda\to\infty} F(\mu\lambda)F^{-1}(\lambda) = 1$ для всех $\mu > 0$, 2) для некоторого $\delta > 0$

$$\mu\{x \in \overline{\Omega} \mid \max_{|y|<\delta, |x+y|\in\overline{\Omega}} V(x+y) < \lambda\} \sim \lambda^\alpha F(\lambda),$$

то при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\lambda_n<\lambda} 1 \sim (2\pi)^{-N}\mu\{x, y \mid |y|^2/2 + V(x) < \lambda,\ x \in \overline{\Omega}\}.$$

Примененный автором метод доказательства основан на результатах Каца (Kac M., Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, Univ. California Press, 1951, pp. 189—215) и Розенблатта (Rosenblatt M., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **71**, 120—135) о явном выражении для функции Грина дифференциального уравнения $2^{-1}\Delta\varphi - V\varphi = \partial\varphi/\partial t$ ($x \in \Omega$, $t > 0$, $\varphi = 0$ на границе Ω) при помощи винеровского интеграла в пространстве непрерывных функций. Из этого выражения автор получает асимптотические формулы для функции Грина, к которым он затем применяет тауберовские теоремы Харди — Литтльвуда —

Карамата. В примечании к корректуре автор указывает, что близкие результаты были недавно получены Титчмаршем.

Примечание референта. Формула (1) получена также Б. М. Левитаном (РЖМат, 1956, 44), который, кроме того, нашел оценку для остаточного члена в этой формуле. М. А. Наймарк

3022. Некоторые вопросы спектральной теории уравнений в частных разностях и частных производных. Березанский Ю. М. Успехи матем. наук., 1955, 10, № 2, 203—205

В первой части работы изучается спектральное разложение для уравнения в конечных разностях, аналогичного уравнению Шредингера без времени. Основные результаты были ранее опубликованы автором (РЖМат, 1954, 5659; 1956, 603). Исправляются некоторые ошибки, которые имелись в цитированных заметках. Во второй части рассматривается обратная задача для уравнения

$$-\Delta u + c(x, y)\, u = \lambda u$$

с кусочно-аналитическим вещественным коэффициентом c в некоторой области G, с кусочно-аналитической границей Γ и граничным условием вида

$$\partial u / \partial n + \sigma(p)\, u|_\Gamma = 0,$$

$\sigma(p)$ — непрерывная функция точки на границе. Пусть $\theta(p, q; \lambda)$ — спектральная функция этой задачи и граница Γ содержит прямолинейный участок I, на котором граничное условие имеет вид $\partial u / \partial n = 0$. Тогда коэффициент уравнения $c(x, y)$ и функция $\sigma(p)$ определяются однозначно по граничному значению $\theta(p, q; \lambda)$ на I. Этот результат обобщает ранее опубликованный результат автора (РЖМат, 1955, 1233). Б. М. Левитан

3023. Решение некоторых проблем деления. Часть II. Деление на «точечные» распределения. Эренпрейс (Solution of some problems of division. Part II. Division by a punctual distribution. Ehrenpreis Leon), Amer. J. Math., 1955, 77, № 2, 286—292 (англ.)

Результаты, полученные в части I (РЖМат, 5805, 1955) для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, распространяются на системы дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть D — распределение, представляющее собой линейную комбинацию производных от распределений типа меры, соответствующей массам, сосредоточенным в одной точке («точечное» распределение), S — распределение конечного порядка; тогда уравнение $D*T = S$ имеет решение T, являющееся распределением конечного порядка. При $S = \delta$ (δ — функция Дирака) получается существование элементарного решения для уравнений (систем) рассматриваемого типа. Если S — бесконечно дифференцируемая функция, то T — также бесконечно дифференцируемая функция. Вид полученных решений не приводится. В. М. Борок

3024. Дифференцируемость некоторого класса функциональных операторов. Кошелев А. И., Тр. Ленингр. текстильн. ин-та, 1955, № 6, 152—162

Изучается квазилинейный оператор

$$P(u) \equiv \sum_{\substack{i+k=2 \\ i,\, k \geqslant 0}} A_{ik}(x, p, u)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i \partial x_2^k} + B(x, p, u),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$, $p_i = \partial u / \partial x_i$. Оператор $P(u)$ переводит элемент некоторого пространства X типа B в элемент пространства Y того же типа. Устанавливаются условия, обеспечивающие наличие у $P(u)$ первой и второй производных Фреше, что накладывает ограничения на A_{ik} и B (требуется, грубо говоря, двух- или трехкратная дифференцируемость по p и u), а также на характер пространств X и Y. В качестве примеров пар пространств, удовлетворяющих соответствующим требованиям, рассмотрены пространства $W_p^{(2)}$ и L_p ($p > 2$); $C^{(2)}$ и C; $\Lambda_\alpha^{(2)}$ и Λ_α ($\Lambda_\alpha^{(m)}$ — пространство функций, для которых производная порядка m удовлетворяет условию Липшица с показателем α), с надлежащим образом определенными нормами. А. А. Дезин

3025. Бигармоническая задача в математической физике. Алач (Problema biarmonică în fizica matematică. Alaci V.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. R.P.R. Baza Timişoara, 1955, 1, № 1—4, 11—18 (рум., рез. русс., франц.)

Рассматривается задача изгиба равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, свободно опертой по краю. Эта задача сводится к интегрированию бигармонического уравнения

$$\partial^4 u / \partial x^4 + 2\, \partial^4 u / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 u / \partial y^4 = p / N$$

в области $|x| < a/2$, $0 < y < b$ при краевых условиях $u = 0$, $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ при $y = 0$, $y = b$; $u = 0$, $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ при $x = a/2$, $x = -a/2$. Здесь N — жесткость пластинки при изгибе, $p = \text{const}$ — нагрузка на единицу площади пластинки.

Подробно излагается, со ссылкой на источник, решение, данное в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова (Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949). То же решение автор получает несколько иным путем, исходя из известной формулы Гурса, выражающей любую бигармоническую функцию через две аналитические функции комплексного переменного; автор дает для этой формулы свой вывод.

Для однородного бигармонического уравнения решается задача Коши, с заданными на оси x значениями неизвестной функции и ее трех первых производных по y. Полученное решение имеет смысл, если указанные данные аналитически продолжимы за ось x, что не оговорено. С. Г. Михлин

3026. Метод решения фундаментальной бигармонической задачи для круга при помощи аналитических функций. Дрэгану (O metodă de rezolvare a problemei biarmonice fundamentale pentru cerc cu ajutorul funcţiilor analitice. Drăganu Mircea), Bul. ştiinţ. Sec. mat. şi. fiz., 1953, 5, № 4, 517—525 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается задача: найти бигармоническую в круге $x^2 + y^2 < 1$ функцию $U(x, y)$ по заданным на границе частным производным $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$. (Как известно, к этой задаче легко сводится основная бигармоническая задача.) При решении задачи автор пользуется формулами Н. И. Мусхелишвили. Заданные на границе функции разлагаются в ряды Фурье; искомые голоморфные функции, при помощи которых выражается U, разлагаются в степенные ряды; коэффициенты находятся из граничных условий; суммы рядов представляются интегралами типа Коши.

Решение указанной задачи (при помощи степенных рядов или применением интегралов типа Коши) известно (см., например, Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.—Л., 1954). Г. Ф. Манджавидзе

3027. Об одной задаче теории полигармонических функций. Ким Юн Цан; Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, № 10, 109—112

Используя известный пример Адамара, автор строит пример регулярной в единичном круге и непрерывной вплоть до контура n-гармонической функции (т. е. функции, удовлетворяющей уравнению $\Delta^n u = 0$) с расходящимся интегралом Дирихле. В работе содержатся

ошибочные утверждения. Например, на стр. 109 утверждается, что полигармоническую функцию порядка k можно представить в виде $w_k = r^{2k-2}u$, где u — гармоническая функция. А. И. Каландия

3028. Решения третьей краевой задачи теории потенциала и интегро-дифференциального уравнения Прандтля. Шинке (Lösungen des dritten Randwertproblems der Potentialtheorie und der Prandtlschen Integrodifferentialgleichung. Schincke Erich), Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle — Wittenberg, 1953/1954, 3, Math.-naturwiss. Reihe, № 2, 483—505 (нем.)

Вне единичного круга ищется гармоническая функция $\varphi(r, \vartheta)$, удовлетворяющая при $r = 1$ условию $k\varphi - t(\vartheta)\,\partial\varphi/\partial r = g(\vartheta)$. Здесь $k = \text{const} > 0$; $g(\vartheta)$ — нечетная функция ограниченной вариации, имеющая конечное число точек разрыва ϑ_k ($\vartheta_k \neq 0, \pi$) и аналитическая в любом интервале непрерывности; $t(\vartheta) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \tau_{2\nu} \cos 2\nu\vartheta$ ($\tau = \sum_{\nu=1}^{n} |\tau_{2\nu}| < 1$, $\tau_{2n} \neq 0$). Ставится требование непрерывности $\varphi(r, \vartheta)$ и ограниченности $r\,\partial\varphi/\partial r$ при $r \geqslant 1$. Решение интегро-дифференциального уравнения Прандтля

$$k\Gamma(\vartheta) = t(\vartheta)\sin\vartheta\left[a(\vartheta) - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{(d\Gamma/d\vartheta^*)}{\cos\vartheta - \cos\vartheta^*}\,d\vartheta^*\right] \quad (1)$$

при соответствующих предположениях о коэффициентах сводится при помощи замены $g(\vartheta)t(\vartheta)\sin\vartheta\, a(\vartheta)$, $\Gamma(\vartheta) = \varphi(1, \vartheta)$ ($0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$) к поставленной выше задаче. Показано, что $\varphi(r, \vartheta) = \operatorname{Re} F(\zeta)$, $\zeta = re^{i\vartheta}$, где $F(\zeta)$ — регулярное в области $|\zeta| > 1$ решение дифференциального уравнения

$$kF(\zeta) - \left[1 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \tau_{2\nu}\left(\zeta^{2\nu} + \frac{1}{\zeta^{2\nu}}\right)\right]\zeta F'(\zeta) =$$

$$= i\left[g_0 + \sum_{\nu=1}^{2n-1} g_\nu\left(\zeta^\nu + \frac{1}{\zeta^\nu}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta^*)\frac{\zeta + e^{i\vartheta^*}}{\zeta - e^{i\vartheta^*}}\,d\vartheta^*\right].$$

Здесь числа $g_0, g_1, \ldots, g_{2n-1}$ однозначно определяются требованием регулярности $F(\zeta)$. Решение уравнения (2) в квадратурах практически неприемлемо из-за значительных вычислительных трудностей при определении величин g_ν. Заменяя уравнение (2) интегральным, автор применяет метод последовательных приближений, отыскивая, по существу, коэффициенты разложения $F(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \zeta^{-\nu}$. При этом величины g_ν выбираются на каждом шаге заново из условия регулярности вычисляемого приближения $F_k(\zeta)$. Доказано, что $\lim_{k\to\infty} F(\zeta) = Fk(\zeta)$ при $|\zeta| > 1$, причем $\varphi(r, \vartheta) = \operatorname{Re} F(\zeta)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям. При дополнительном условии $\bar{\tau} = \tau + \sum_{\nu=1}^{n} 2\nu|\tau_{2\nu}|/(k+1) < 1$ доказано, что при $k \to \infty$ $\operatorname{Re} F_k(\zeta) \to \varphi(r, \vartheta)$ равномерно при $r \geqslant 1$, и проведена оценка погрешности приближенного решения. Рассмотрен числовой пример. М. Ш. Бирман

3029. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. Каролль И. Л., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 5, 793—936

Рассматривается уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \quad (1)$$

($\alpha > 0$ — вещественная постоянная) в области Ω, ограниченной: 1) конечным числом простых кривых $\{\Gamma_k\} = \Gamma$ ($k = 0, \ldots, n$), лежащих целиком в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $P_i(x_i, 0)$ ($i = 0, \ldots, 2n+1$) оси Ox (Γ_0 лежит вне кривых Γ_k), 2) в полуплоскости $y < 0$ отрезками характеристик уравнения (1):

$$x - 2\sqrt{-y} = x_{2k},\ x + 2\sqrt{-y} = x_{2k+1},$$

$$\{(x_{2k}, x_{2k+1})\} = L.$$

При помощи результатов Келдыша (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 2, 181—183) доказывается, что при $0 < \alpha < 1$ в Ω существует и единственна функция $u(x, y)$, непрерывная в $\bar{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (1) при $y \neq 0$, причем в точках $\bar{\Gamma} = \Gamma + \{P_i\}$ u принимает заданные непрерывные краевые значения и существуют

$$\lim_{P\to(x,0)} u_{xx}(P) = \tau''(x), \quad \lim_{P\to(x,0)} u_y(P) = \nu(x),$$

где $x \in L$, τ и ν непрерывны на L, $\tau'' + \alpha\nu = 0$. При $\alpha \geqslant 1$ в Ω существует и единственна ограниченная $u(x, y)$, непрерывная в $\bar{\Omega}$, кроме, может быть, точек $\{P_i\}$, удовлетворяющая непрерывному краевому условию $u|_\Gamma = \varphi$ и приведенным выше условиям на u_{xx} и u_y.

Если Γ_k составляют с осью Ox в точках $\{P_i\}$ углы, отличные от 0 и π, то u непрерывна в $\bar{\Omega}$.

Рассматривается еще краевая задача с условием на Γ: $\partial u/\partial\gamma + \mu u = \varphi$, где направление γ составляет острый угол с внутренней нормалью к Γ. При помощи результатов О. А. Олейник (Докл. АН СССР, 1952, 87, № 6, 885—888) доказывается существование и единственность решения этой задачи. М. М. Смирнов

3030. Представление динамического вектора поля запаздывающими потенциалами. Аржаных И. С., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 202—204

3031 Д. Интегральное преобразование Лапласа и решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Халлер (Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom parabolischen Typus. Diss. Haller Jakob, Zürich, Art. Inst. Orell. Füssli, 1953, 44 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1595 (нем.)

3032 Д. О вынужденных периодических колебаниях струн (о периодических решениях некоторых нелинейных уравнений гиперболического типа). Карп В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Узб. ун-т, Самарканд, 1955

3033 Д. Некоторые оценки решений уравнений эллиптического типа и их применение к исследованию точности метода ЭГДА. Остапенко В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1955

3034 Д. О первой краевой задаче для некоторых квазибигармонических дифференциальных уравнений. Гусейнов М. Г., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1955

3035 Д. Решение смешанной задачи для гиперболических систем на плоскости методом сеток. Лепин А. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Минск., 1955

3036 Д. Решение смешанной задачи для общего одномерного гиперболического уравнения обобщенным методом Фурье. Мамедов (Хайями) К. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т физики и матем. АН АзССР, Баку, 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3037. Об устойчивости механических систем. Стокер (On the stability of mechanical systems. Stoker J. J.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 133—141 (англ.)

Рассматриваются различные определения понятия устойчивости с точки зрения их физического смысла, практической применимости и математической строгости. (Определение устойчивости, данное А. М. Ляпуновым, не упоминается.) Автор приходит к выводу, что в большинстве случаев наиболее пригодным является понятие орбитальной устойчивости (движение устойчиво орбитально, если возмущенные траектории при $t>0$ лежат в окрестности невозмущенной траектории для всех достаточно малых начальных возмущений).

Рассматривается вопрос о критериях устойчивости, указывается, что удовлетворительно эти вопросы решены лишь в некоторых случаях, к числу которых относится известная теорема об устойчивости равновесия в случае минимума потенциальной энергии. Критикуется несостоятельность в общем случае критериев устойчивости по первому приближению как нуждающихся в экспериментальной проверке. Указывается, что в ряде случаев исследование устойчивости по первому приближению может быть строго обосновано, причем дается высокая оценка исследованиям А. М. Ляпунова в этой области.

Показывается, что увеличение сил сопротивления (трение, вязкость) не является универсальным средством стабилизации. На примере вертикального стержня, со свободно закрепленным нижним концом, демонстрируется метод стабилизации действием внешней периодической силы. Указывается возможность приложения той же идеи периодического воздействия для создания острой фокусировки потока частиц в синхротроне. Предварительные расчеты дают здесь хорошие результаты, но точный анализ уравнений провести не удалось вследствие их нелинейности. Н. Н. Красовский

3038. О теории малых колебаний и устойчивости движения систем с неголономными связями. Кухтенко (Про теорію малих коливань і стійкість руху систем з неголономними зв'язками. Кухтенко О. І.), Прикл. мех., 1955, **1**, № 2, 205—223 (укр.; рез. русс.)

Уиттекер (Аналитическая динамика, 1938), исследуя устойчивость положения равновесия механической системы со стационарными связями, среди которых r неголономных, действовал в следующей последовательности: проводил линеаризацию уравнения связей; для малых колебаний рассматривал линеаризованные неголономные связи как дифференциальные интегрируемые связи; проводил интегрирование уравнений этих связей; в полученных интегралах уравнений связей полагал произвольные постоянные равными нулю; после этого рассматривал систему в малых колебаниях как голономную.

Боттема (Bottema O. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., V, 1949, **52**, 8) указал, что такой ход выкладок неверен и что необходимо сначала составить уравнения движения (например, воспользовавшись уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями), используя при этом нелинеаризованные уравнения связей, а затем проводить линеаризацию выведенных уравнений движения обычным путем. При этом Боттема показал, что характеристическое уравнение, решающее вопрос об устойчивости положения равновесия, всегда имеет r нулевых корней, а остальные корни этого уравнения отличны от корней характеристического уравнения, полученного Уиттекером.

Автор реферируемой работы, излагая эти результаты, замечает, что при исследовании устойчивости установившегося движения, отличного от равновесия, характеристическое уравнение, решающее вопрос об устойчивости, может не иметь нулевых корней. В этих случаях не приходится обращаться к теории особых случаев Ляпунова.

Примечание референта. Чтение работы крайне затруднено неправильной терминологией. Автор не включает в установившиеся (в его терминах — стационарные) движения наиболее распространенный тип этих движений — равновесия. М. А. Айзерман

3039. Установившееся периодическое колебание в линейных системах с постоянными коэффициентами. Кожешник (Az állandósult periódikus végállapot állandó együtthatós lineáris rendszerekben. Kozšesnik J.), Magyar tud. akad. müsz. tud. oszt. közl., 1954, **14**, № 1—3, 295—301 (венг.)

3040. О динамике нитей. Манакорда (Una osservazione sulla dinamica dei fili. Manacorda Tristano), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 385—390 (итал.)

Рассматривается задача о движении абсолютно-упругой весомой нити, находящейся под действием вертикальной нагрузки, изменяющейся вдоль нити и зависящей от времени, а также возможного сопротивления среды. Концы могут перемещаться по двум вертикальным прямым. Ищутся условия, при которых поставленная задача может быть сведена к квадратурам.

Определив с помощью квадратур перемещения точек нити в предположении чисто вертикальных колебаний ее, автор показывает, что условия на контуре и распределение нагрузки будут выражаться через две произвольные функции времени. В заключение приведено несколько примеров, — случаев, когда имеют место только вертикальные колебания нити без ограничения величины амплитуды. Г. Н. Савин

3041. Инварианты бесконечно малых преобразований и их приложения в биоматематике и в теории земного магнетизма. Глени (Invariants when the transformation is infinitesimal, and their relevance in bio-mathematics and in the theory of terrestrial magnetism. Glenn Oliver E.), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1954, **8**, № 1—2, 1—42 (англ.)

Автор указывает на наличие связи между устойчивостью наследственных признаков и быстротой роста организмов, ссылаясь на известные факты из теории контактных преобразований. При этом используется некоторая геометрическая схема наследственных связей. Далее, тот же математический метод применяется для рассмотрения движения отброшенных от Солнца отрицательно заряженных частиц в поле земного тяготения и земного магнетизма и обосновывается расположение изодинамических линий, полученных ранее в результате экспериментальных исследований.

С. А. Стебаков

3042. Об одном виде квазиклассического приближения для уравнения Шрёдингера. Миллер, Гуд (A WKB-type approximation to the Schrödinger equation. Miller S. C., Jr, Good R. H., Jr), Phys. Rev., 1953, **91**, № 1, 174—179 (англ.)

См. РЖФиз, 1954, 11059.

3043. Об устойчивости состояния равновесия свободной поверхности жидкости в вертикальном периодическом движении. Бенджамин, Эрселл (The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. Benjamin T. B., Ursell F.), Proc. Roy. Soc., 1954, **A225**, № 1163, См. РЖМех, 1955, 4338, 505—515 (англ.)

3044. Критерий устойчивости сервосистем. Кубичек (Kriterium stabilitý pro servosystémy. Kubiček Zdeněk), Slaboproudý obzor, 1954, **15**, № 4, 155—160 (чеш.; рез. русс., нем., франц.)
См. РЖМех, 1955, 4135

3045. Устойчивость движения автоматически регулируемой врубовой машины с плавной подачей. Кухтенко (Стійкість руху автоматично регульованно врубов машини з плавною подачею. Кухтенко О. І.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 4, 300—304 (укр.; рез. русс.)
См. РЖМех, 1955, 2844

3046. Устойчивость в большом стационарных режимов гидростанций с уравнительными резервуарами. Картвелишвили Н. А., Инженерный сб., 1954, **20**, 25—30
См. РЖМех, 1955, 4946

3047. К устойчивости движения некоторых механических систем. Аминов М. Ш., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1953, **28**, 61—65
См. РЖМех, 1955, № 6, 2839

3048. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. II. Теория регулятора прямого действия при наличии кулоновского и вязкого трения. Андронов А. А., Майер А. Г., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 5, 505—530
См. РЖМех, 1955, № 3, 1187

3049. Об устойчивости в сжимаемом потоке вихревой дорожки Бенара — Кармана. II. Кшивоблоцкий (On the stability of Bénard — Kármán vortex street in compressible fluids. II. Krzywoblocki M. Z. v.), Acta phys. austriaca, 1954, **8**, № 4, 370—378 (англ.)

В ч. I (Acta phys. austriaca, 1953, **7**, № 3, 283—298) исследовалась устойчивость вихревой дорожки Бенара — Кармана в сжимаемой невязкой жидкости. Было показано, что явление сжимаемости приводит к неустойчивому состоянию вихревой дорожки. В ч. II метод Кочина (Докл. АН СССР, 1939, **24**, № 1, 19—23) обобщается на устойчивость в смысле Ляпунова обычной дифференциальной системы и показывается, что явление сжимаемости определенно действует на устойчивость. Для исследования устойчивости вихревой дорожки автор получает систему уравнений

$$d(\overline{\alpha}l)/d\tau = 4Al\sin(\beta+\overline{I}_0)\{[\cos(\alpha+\overline{I}_0)+$$
$$+\cos(\beta+I_0)]^{-1} - [\cos(\beta+\overline{I}_0) - i\,\mathrm{sh}\,(2H-i\overline{I}_0)]^{-1}\} +$$
$$+2(M_3-M_1)l,$$
$$d(\beta\cdot l)/d\tau =$$
$$= 4Al\,\sin(\alpha+\overline{I}_0) = \{[\cos(\alpha+\overline{I}_0)+\cos(\beta+\overline{I}_0)]^{-1} - \quad (1)$$
$$-[\cos(\alpha+\overline{I}_0)+i\,\mathrm{sh}\,(2H-i\overline{I}_0)]^{-1}\} +$$
$$+2(M_4-M_1)l,$$

которая для несжимаемой жидкости ($I_0=0$, $M_1=0$, ($i=1, 2, 3, 4$)) обращается в систему, полученную Кочиным. Для исследования системы (1) применяется метод Ляпунова. Вместо системы (1) рассматриваются уравнения первого приближения (линейные, с переменными коэффициентами), решение которых определяется методом последовательных приближений, причем неустойчивость в смысле Ляпунова является следствием наличия в решении расходящихся интегралов. Появление расходящихся интегралов вызвано наличием членов, связанных с сжимаемостью жидкости. Этот результат подтверждает выводы автора, сделанные в ч. I.
Ю. А. Митропольский

3050. Диффузия от источника в потоке с линейным профилем скоростей. Ловерьер (Diffusion from a source in a skew velocity field. Lauwerier H. A.), Appl. Scient. Res., 1953, **A4**, 153—156 (англ.)

Определяется установившаяся концентрация $c(x, y)$ некоторого вещества в потоке, скорость которого $v=v_0(1+ay)$ направлена по оси x; в начале координат имеется источник диффундирующего вещества и $c=0$ при $y=-1/a$. Предполагается, что уравнение диффузии имеет вид $Dc_{yy}=vc_x$. (Условия, при которых уравнение диффузии имеет принятый вид, не указываются; не разъясняется, какие граничные условия вводятся для учета источника в начале координат. Автор формально применяет двустороннее преобразование Лапласа, но затем использует формулу обращения одностороннего преобразования). R. V. Churchill
Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 533.

3051. Решения задачи теплопередачи методом инверсии. Уэйниг (Solutions of heat-conduction problem with the aid of the inverse method. Weinig F. S.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, 489—496 (англ.)

Рассматривается уравнение $\Delta t=0$ с краевым условием $t+r\partial t/\partial n=T$, где $r=\mathrm{const}$, T — заданная температура. В предельных случаях $r\to 0$, $r\to\infty$ границей может быть всякая потенциальная линия или линия тока. Автор показывает, что в случае конечных r границы могут быть выбраны так, что будет выполнено краевое условие. Приведен ряд частных случаев, из которых отметим случай, когда границей являются радиальные ребра цилиндра. H. A. Lauwerier
Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 961

3052. Движение вибратора под поверхностью жидкости. Сретенский Л. Н., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 3—14

Рассматривается задача о движении пульсирующего источника под поверхностью тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая для пространственного и плоского случаев рассматривалась в работах референта (Прикл. матем. и механика, 1946, **10**, № 1, 33—66; Тр. ЦАГИ, 1947, № 603; РЖМат, 1955, 809). Автор для пространственного случая более детально выясняет асимптотический вид взволнованной поверхности жидкости на больших расстояниях от источника.
М. Д. Хаскинд

3053. Об одном критерии для проверки интерпретации гравитационных наблюдений. Ляпунов А. А. Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 265—266

Пусть $U(x, y)$ есть логарифмический потенциал массы плотности $\gamma\rho(x, y)$ (γ — физическая константа), расположенной в конечной области D в полуплоскости $y>0$; $\varphi(x, y)$ — угол, под которым виден из точки (x, y), $(y>0)$ отрезок $a\leqslant x\leqslant b$, $y=0$. Доказывается формула

$$\int_a^b U_y(x, 0)\,dx = \gamma\iint_D \rho\varphi\,d\sigma,$$

которая может служить критерием для контроля интерпретации гравитационных наблюдений, в которых $U_y(x, 0)=g(x)$ — наблюдаемое аномальное отклонение силы тяжести. Если $a\to-\infty$, $b\to\infty$, то получается формула, предложенная ранее Г. А. Гамбурцевым (Рейх Г., Юнг К., Прикладная геофизика, 1936, в. 1) для вычисления аномальной массы по аномалии силы тяжести.
Х. Л. Смолицкий

3054. Прямые вариационные методы в смешанной задаче теории упругости для полупространства. Розенберг Л. А., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, № 13, 71—91

Рассматривается смешанная задача теории упругости для полупространства $z>0$.

$$A\mathbf{u} = (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{u}|_\omega = \varphi(x, y), \quad \mathbf{t}^\nu|_{s-\omega} = \Psi(x, y), \qquad (2)$$

ω и s — ω — части плоскости $z = 0$, на которых заданы соответственно вектор смещений $\mathbf{u}$ и вектор поверхностных сил $\mathbf{t}^{\nu}$, $\mathbf{K}$ — вектор объемных сил. Вводится скалярное произведение $(f_1, f_2) = \int_\tau f_1 f_2 \, d\tau$ и рассматривается вопрос о положительной определенности оператора A на линеале функций β, удовлетворяющих однородным условиям (2) и условию на бесконечности $|\beta| < r^{-1}$. Следуя методу доказательства положительной определенности A для первой и второй основных задач теории упругости, когда на поверхности тела заданы смещения или усилия (Friedrichs K., Ann. Math., 1947, **48**, № 2; Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, ГТТИ, 1950), автор вводит обозначения:

$$H(\beta) = \int_\tau (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau;$$

$$\Omega(\beta) = 2\int_\tau (\omega_{xy}^2 + \omega_{xz}^2 + \omega_{yz}^2)\, d\tau,$$

$$D(\beta) = \int_\tau \{(\operatorname{grad} u)^2 + (\operatorname{grad} v)^2 + (\operatorname{grad} w)^2\}\, d\tau,$$

$$\Gamma(\beta) = \int_\tau \{\gamma_{xx}^2 + \gamma_{yy}^2 + \gamma_{zz}^2 + 2\gamma_{xy}^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{zx}^2\}\, d\tau,$$

где u, v, w — компоненты $\mathbf{u}$, $\gamma_{xx}, \ldots$ — компоненты деформации, $\omega_{xy}, \ldots$ — вращений, и доказывает неравенства (см. цит. литер.) $H(\beta) \leqslant D(\beta)$, $\Omega(\beta) \leqslant \Gamma(\beta)$. (При доказательстве первого неравенства допущена погрешность. Полагая

$$u = fq, \quad f = r^{-1/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} \ln r, \tag{3}$$

автор находит $\Delta f = -f$ (формула 3.11), между тем как $\Delta f = -fr^{-2}$, и тогда в неравенстве (3.12)

$$\int_\tau |\operatorname{grad} u|^2\, d\tau \geqslant \int_\tau u^2\, d\tau \tag{4}$$

в правой части должно быть $\int_\tau r^{-2}u^2\, d\tau$. Для получения неравенства (4) надо вместо (3) положить $f(r) = r^{-1}\cos r$. Кроме того, требует более детального рассмотрения неравенство (3.9) при $r \to 0$. *Прим. реф.*)

Далее рассматривается вопрос о построении минимизирующей последовательности для решения смешанной задачи (1) — (2) вариационным методом (принцип минимума потенциальной энергии). Автор строит цилиндр L с основанием ω и образующей параллельной оси z и полагает $\tilde{u}_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ внутри L; $u_n = \sum_{k=1}^n b_k \Psi_k$ вне L, a_k, b_k — постоянные, φ_k, Ψ_k — функции, удовлетворяющие первому и второму условиям (2) соответственно, причем на поверхности цилиндра L условие $\tilde{u}_n = u_n$ заменено более слабым: $\int_L h_m (\tilde{u}_n - u_n)\, ds = 0$, $m = 1, \ldots,$ где h_m — полная и ортонормированная система функций. М. Г. Слободянский

3055. Исследования по расчету изгиба пластин. Леви (Ensayo sobre el cálculo de la deflexión de las placas degladas. Levi Beppo), Math. notae, 1954, **12—13**, № 2—4, 79—193 (исп.)

Некоторые элементарные соображения относительно построения частного решения неоднородного бигармонического уравнения $\Delta^2 w = p(x, y)$. Такие частные решения строятся в виде двойного ряда Фурье или в виде полинома, если $p(x, y)$ — также полином. Указывается, что если $p(x, y)$ можно в том или ином смысле аппроксимировать полиномом, тогда можно построить полином, приближенно удовлетворяющий уравнению. Новых по существу результатов нет. С. Г. Михлин

3056. Приложение линейных интегральных уравнений Вольтерра к численному решению задач о колебаниях балки. I. Богданов, Гольдберг, Ло (Application of Volterra linear integral equations to the numerical solution of beam vibration problems. I. Bogdanoff J. L., Goldberg J. E., Lo H s u), Proceedings of the First Midwestern Conference on Solid Mechanics, April, 1953, 81—88 p., The Engineering Experiments Station, University of Illinois, Urbana, Ill., 1954 (англ.)

Большинство задач о колебаниях балки сводится к задаче о собственных значениях для уравнений вида $L(\lambda)\, w(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $w(x)$ определяет амплитуду колебаний, λ — собственное значение, $L(\lambda)$ — линейный дифференциальный оператор. При $x = 0$ и $x = 1$ задаются значения w или ее производных. Авторы главным образом касаются случая, когда плотность и жесткость балки не постоянны. Задача сводится к интегральному уравнению

$$w(x) = \int_0^x K(x, s, \lambda)\, w(s)\, ds + F, \quad F = \sum_{k=1}^n C_k f_k(x, \lambda), \tag{1}$$

где C_k — константы интеграции. Решение (1) при произвольных фиксированных C_k удовлетворяет краевым условиям в $x = 0$. Задаются примерные значения λ; решение интегрального уравнения вычисляется для специальных $F = f_k$; общее решение получается линейными комбинациями этих частных решений. Краевые условия при $x = 1$ дают систему однородных уравнений для C_k. λ подбирают при этом так, чтобы детерминант системы стал равным нулю.

Для численного отыскания частного решения интегрального уравнения применяется метод Хабера, по которому интервал $\langle 0,1 \rangle$ разбивается на m равных интервалов и интегральное уравнение выписывается для середины этих интервалов x_i; w аппроксимируется функцией, линейной на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$. Для $w(x_i)$ получается система линейных уравнений с треугольной матрицей. Для сравнения с точными решениями приведено несколько численных примеров для случая однородной балки. H. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 993.

3057. О разделении сферических координат в теории упругости. Цай И. П., Докл. АН УзССР, 1955, № 4, 3—6 (рез. узб.)

При помощи метода разделения переменных находятся некоторые частные решения уравнений статики упругого тела в сферических координатах. А. И. Каландия

3058. Интегральные уравнения основных задач теории поля. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, № 13, 19—41

В области Q трехмерного пространства, лежащей вне или внутри замкнутой поверхности S, ищется вектор $\mathbf{v}$ по уравнениям $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = \theta$ и граничным условиям: а) задана составляющая в касательной плоскости к S (задача I); б) задана проекция на нормаль (задача II). Указаны методы решения этих задач в предположении, что известны некоторые функции Грина и резольвенты ряда интегральных уравнений теории потенциала. Получены также интегральные уравнения, которым удовлетворяют решения задач I и II.

Примечание референта. Несобственный интеграл в интегральном уравнении (5.7) расходится при условии (5.6). Этот интеграл, повидимому, должен рассматриваться как сингулярный в некотором смысле, на что в статье нет указания; ссылка, указывающая на существование этого интеграла, неверна. Х. Л. Смолицкий

3059. Представление электромагнитного поля запаздывающими потенциалами. Аржаных И. С., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 6, 1053—1056

В § 1 рассматриваются векторы **E** и **H**, которые удовлетворяют в области, лежащей вне или внутри замкнутой поверхности S, однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{E}=0.$$

Доказывается, что они представимы через запаздывающие значения на S векторов **E** и **H** и их первых производных по t (скорость запаздывания $a=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$).

Пусть $\xi=\mathbf{nE}$, $\eta=\mathbf{nH}$, $\mathbf{e}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{h}=\mathbf{n}\times\mathbf{H}$. На S получены интегро-дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами (дифференцирование лишь по t) для значений: а) **e** и **h** при заданных ξ и η (I задача), б) для **e** и η при заданных ξ и **h** (II задача), в) для ξ и **h** при заданных **e** и η (III задача). Полученные уравнения не исследуются. Решена задача определения ξ и η, если заданы **e**, **h** и значения ξ и η при $t=0$.

В § 2 рассматривается задача движения электронного газа в вакууме.

Примечание референта. Полученные в § 1 интегро-дифференциальные уравнения должны быть сингулярными в некотором смысле, так как несобственные интегралы, содержащие некоторые неизвестные элементы поля, являются расходящимися при обычном определении несобственного интеграла по S. Поскольку в статье нет указания на сингулярность интегралов, их смысл не ясен. Х. Л. Смолицкий

3060. О дифракции плоской волны на бесконечной плоской решетке. Болдуин, Хейнс (On the diffraction of a plane wave by an infinite plane grating. Baldwin George L., Heins Albert E.), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 103—118 (англ.)

Рассматривается плоская монохроматическая электромагнитная волна, нормальная к дифракционной решетке, расположенной в плоскости $x=0$. Решетка состоит из бесконечного ряда одинаковых идеально проводящих полос, параллельных оси z, расстояние между которыми $2b$ равно их ширине. Рассмотрен случай, когда магнитный вектор параллелен сторонам полос. Пользуясь периодичностью задачи, отыскание компоненты напряжения магнитного поля $H_z(x,y)=\varphi(x,y)$, авторы приводят к следующей задаче. Ищется функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0 \text{ в } \Omega,\ \partial\varphi/\partial n|_s=0,\ \varphi(x,y)=e^{ikx}+\psi(x,y),$$

где

$$\Delta\psi+k^2\psi=0 \text{ в } \Omega;\ \partial\psi(0,y)/\partial x=-ik,\quad 0<y<b;$$

$$\partial\psi(x,0)/\partial y=\partial\psi(x,2b)/\partial y=0,\quad -\infty<x<\infty;$$

$$\psi(x,y)=O(e^{-q|x|}),\ \partial\psi(x,y)/\partial x=O(e^{-q|x|}),\quad |x|\to\infty;$$

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu+i\omega\sigma\mu,\ k=p+iq,\ p>0,\ q\geqslant 0.$$

(Ω — область, граница которой S состоит из прямых $y=0$, $y=2b$ и отрезка $x=0$, $0\leqslant y\leqslant b$). С использованием теоремы Грина доказывается, что φ определяется единственным образом для комплексного k; ψ — нечетная функция x. Сначала допускается, что φ удовлетворяет всем требуемым условиям и ищутся выражения для φ^α, φ^β, φ^γ в разных областях: (α) $x<0$, $0\leqslant y\leqslant b$; (β) $x>0$, $0\leqslant y\leqslant b$, (γ) $-\infty<x<\infty$, $b\leqslant y\leqslant 2b$. Для этого, так же как и в работе Карлсона и Хейнса (Carlson J. F., Heins A. E., Quart. Appl. Math., 1947, **4**, 313—329), строится функция Грина для областей (α) и (β), удовлетворяющая условиям: $\partial G/\partial y=0$ при $y=0$, $y=b$, $\partial G/\partial x=0$ при $x=0$, а для области (γ), удовлетворяющая условиям: $\partial G/\partial y=0$ при $y=b$, $y=2b$. Затем используется теорема Грина в прямоугольнике: $-L\leqslant x'\leqslant L$, $b\leqslant y'\leqslant 2b$ и дается интегральное представление для φ^γ и φ^β. Из непрерывности φ при $y=b$ для случая $L\to\infty$ получается интегральное уравнение

$$e^{ikx}-2\int_0^\infty\chi(x-x')\,[\partial\varphi(x',b)/\partial y']\,dx'=0,\ x>0, \quad (1)$$

где

$$\chi(x-x')=-\sum_0^\infty(2-\delta_{0n})/2ib\Gamma_{2n}e^{i\Gamma_{2n}|x-x'|},$$

$\Gamma_\nu^2=k^2-(\nu\pi/2b)^2$, $\operatorname{Im}\Gamma_\nu>0$, $\nu=0,1,\ldots,\delta_{0n}$ — символ Кронекера. Благодаря нечетности $\partial\varphi(x',b)/\partial y'$ относительно x', для $x<0$ получается то же уравнение (1), которое является уравнением типа Винер-Хопфа, и решается известным методом (Carlson J. T., Heins A. E., Quart. Appl. Math., 1947, **4**, 313—329; Paley R. E., Wiener N., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 19, New York, N. Y., 1934), что позволяет получить окончательное выражение для решения в виде разложения в ряд:

$$\varphi=e^{ikx}+R_0e^{-ikx}+\sum_{\nu=1}^\infty R_\nu\cos(\nu\pi y/2b)\,e^{-i\Gamma_\nu x},$$

здесь $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y\leqslant 2b$. Для коэффициентов R_0 и R_ν получены явные выражения. Исследуются полученные результаты. Доказывается, что φ^γ, φ^β и φ^α удовлетворяют требуемым условиям. Отдельно рассматривается случай, когда k — действительное число. Рассматриваются примеры и строятся соответствующие графики. В конце дается преобразование этих результатов для случая рассеянных полей.

Примечание референта. Подобные задачи были рассмотрены Рэлеем (Rayleigh, Philos. Mag., 1897, **43**, 259—272) и Ламбом (Lamb H., Proc. London Math. Soc., 1898, **29**, 523—544) в случае, когда отношение ширины щелей к длине волны в свободном пространстве значительно меньше единицы; благодаря специальному подбору промежутка, авторы все вычисления проводят в замкнутом виде без этого допущения.

Д. З. Авазашвили

3061. Поглощение солнечной энергии в атмосфере при наличии облаков. Фейгельсон Е. М., Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 23, 1954, 65—91

Рассматривается задача о распределении и поглощении солнечной энергии в атмосфере при наличии однородного и бесконечного в горизонтальном направлении облачного слоя, содержащего водяной пар и капельную воду. Вводя оптическую толщину $\tau=\int_0^z(\alpha+\sigma)\,dz$ и отделяя восходящее излучение $I_1(\theta>0)$ от нисходящего $I_2(\theta<0)$, автор переходит от общего уравнения переноса лучистой энергии заданной длины волны к системе уравнений

$$\begin{aligned}\cos\theta\,\partial I_2/\partial\tau&=K_1(\tau,r)-I_1(\tau,r),\\ -\cos\theta\,\partial I_-/\partial\tau&=K_2(\tau,r)-I_2(\tau,r),\end{aligned} \quad (1)$$

где

$$K_i(\tau,r)=(g(\tau)/4\pi)\int_+I_1(\tau,r')\gamma_{1i}(r',r)\,d\omega'+$$

$$+(g(\tau)/4\pi)\int_+I_2(\tau,r')\gamma_{2i}(r',r)\,d\omega',\quad i=1,2, \quad (2)$$

$\alpha(z)$ и $\sigma(z)$ — коэффициенты поглощения и рассеяния, рассчитанные на единицу объема, $\gamma(r',r)$ — индикатриса рассеяния; r', r — направления падающего и рассеянного лучей. Интегрирование производится по поверхности положительной полусферы.

Решение системы (1) — (2) ищется отдельно для трех слоев: подоблачного ($0 \leqslant z \leqslant z_1$), облачного ($z_1 \leqslant z \leqslant z_2$) и надоблачного ($z_2 \leqslant z \leqslant \infty$); граничные условия:

$$F_1^{(1)}(0, r) = AF_2^{(1)}(0) \text{ при } z = 0,$$

$$I_2^{(2)}(\tau_2, r) = \pi S\delta(r - r_0) \text{ при } z = \infty,$$

$$F_1^{(1)}(\tau_1) = F_1^{(0)}(0); \quad F_2^{(1)}(\tau_1) = F_2^{(0)}(0) \text{ при } z = z_1,$$

$$F_1^{(0)}(\tau_0) = F_1^{(2)}(0); \quad F_2^{(0)}(\tau_0) = F_2^{(2)}(0) \text{ при } z = z_2.$$

Здесь $F_i^{(j)}(\tau) = \int_+ I_i^{(j)}(\tau, r)\cos\theta\, d\omega$ — поток энергии, πS — солнечная постоянная, r_0 — направление распространения солнечной энергии, A — альбедо земной поверхности (для простоты выкладок принято $A = 0$), δ — функция Дирака. Предполагается, что излучение, выходящее с нижней границы облака наружу и внутрь и с верхней границы наружу, не зависит от направления. Решая систему (1) — (2) и ограничиваясь во внеоблачных слоях учетом рассеяния только первого порядка, автор получает систему уравнений, выражающих интенсивности излучения во всех трех слоях через величины $K_1^{(0)}(\tau, \theta)$ и $K_2^{(0)}(\tau, \theta)$ в подоблачном слое. Рассмотрены случаи сферической и предельно вытянутой индикатрисы рассеяния, а также и несколько более общий случай. На основе найденного решения для предельно вытянутой индикатрисы и без учета рассеяния вне облака проведен расчет количества поглощенной солнечной энергии в атмосфере при наличии облаков. В заключение предложен приближенный, но значительно менее трудоемкий метод расчета, основанный на использовании интерполяционных формул для суммарных функций пропускания, соответствующих всей коротковолновой части спектра. А. А. Пивоваров

3062. Дифференциальная структура нелокальных теорий. II. Жевуский. (Differential structure of non-local theories. II. Rzewuski Jan), Acta phys. polon., 1955, 14, № 1—2, 121—134 (англ.; резюме русс.)

Нелокальная теория элементарных частиц в общем трехмерном случае описывается уравнением

$$(\Box - x^2)\, q(x) = \lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} K(x, x')\, q(x')\, dx, \qquad (1)$$

где x — точка четырехмерного пространства (пространство — время). В ч. I для одномерного случая автор доказал (РЖМат, 1955, 2687), что можно устранить интегральный член и свести уравнение задачи к чистому дифференциальному уравнению того же порядка.

В рассматриваемом здесь общем случае в интегральном члене уравнения (1) удается исключить только время и привести уравнение к такому виду, когда интеграл в правой части берется по трехмерной пространственной области. Отсюда делается физическое заключение, что всякое движение с нелокальной теорией равносильно некоторому движению с локальной теорией. Метод иллюстрируется примером уравнения с постоянным внешним полем. В заключение подобного рода преобразование проводится также в нелинейном случае.

Примечание референта. Русское резюме не соответствует содержанию статьи. Оно должно быть отнесено к ч. I работы. Ф. Д. Гахов

3063 К. Применение операционных методов к решению некоторых задач математической физики. Агранович З. С., Повзнер А. Я. Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1954, 56 стр., 1 р. 25 к.

Книга состоит из следующих параграфов: Введение; О резольвентном ядре полуограниченного дифференциального оператора (РЖМат, 1953, 263); Решение задач, связанных с волновым уравнением; Решение задач, связанных с уравнением теплопроводности.

Дан способ решения дифференциальных уравнений в частных производных при помощи преобразования Лапласа — Карсона, отличный от общепринятого (см., например, Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, 1951, 78). Этот способ основан на спектральной теории линейных операторов в пространстве Гильберта и известном представлении резольвенты оператора посредством интеграла Лапласа — Карсона. Приведены примеры решения задач, связанных с волновым уравнением и уравнением теплопроводности. Четкого алгоритма этого применения преобразования Лапласа — Карсона не дано. П. И. Кузнецов

3064 К. Дифференциальные уравнения в задачах техники. Сальвадори, Шварц (Differential equations in engineering problems. Salvadori Mario George, Schwarz Ralph J., New York, Prentice-Hall, London, Bailey and Swinfen, 1954, XIII + 432 p., ill., 69.6 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 267, 10 (англ.)

См. также: 2860, 2903, 2906Д, 2911, 2913, 2914, 2949, 2951, 3074, 3075, 3118, 3125, 3155, 3323, 3330, 3381

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3065. О некоторых парных интегральных уравнениях. Нобл (On some dual integral equations. Noble B.), Quart. J. Math. Oxford., 1955, **6**, № 22, 81—87 (англ.).

Рассматривается пара интегральных уравнений

$$\int_0^\infty t^\alpha \varphi(t) J_\nu(\rho t)\, dt = f(\rho) \quad (0 < \rho < 1),$$

$$\int_0^\infty \varphi(t) J_\nu(\rho t)\, dt = g(\rho) \quad (\rho > 1),$$

которую известным приемом можно свести к другой аналогичной паре с $g(\rho) = 0$. Такая приведенная пара рассматривалась в ряде работ и, в частности, в недавней статье Гордона (РЖМат, 1955, 2246), которую автор не цитирует. В реферируемой статье рассматривается случай $f(\rho) = 0$ и для $-2 < \alpha < 0$ дается следующее решение

$$\varphi(t) = \frac{2^{1+\alpha/2} t^{1-\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha/2)} \int_1^\infty u^{1-\nu}(u^2 - 1)^{-1-\alpha/2}\, du \times$$

$$\times \int_1^\infty y^{1-\alpha/2} g(yu) J_{\nu+\alpha/2}(ty)\, dy.$$

Затем указываются два метода распространения решения на больший интервал значений α. Все преобразования носят чисто формальный характер. Результат иллюстрируется на простых примерах, для которых решение было получено ранее другими авторами.

Н. И. Ахиезер

3066. Об оценке ошибки в методе последовательных приближений. Мышкис А. Д., Эгле И. Ю., Матем. сб., 1954, 35(77), № 3, 491—500

Дается оценка точности приближенного метода решения интегральных уравнений типа Вольтерра

$$y(x) = \varphi(x) + \int_{x_0}^{x} F(x, s, y(s))\, ds$$
$$(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h;\ \ h > 0), \qquad (1)$$

где функция $F(x, s, y)$ определена при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $x_0 \leqslant s \leqslant x_0 + h$, $-\infty < y < \infty$, непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет по y условию Липшица с постоянной $K \geqslant 0$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Строятся итерации по формуле

$$y_n(x) = \varphi(x) + \int_{x_0}^{x} F(x, s, y_{n-1}(s))\, ds$$
$$(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h;\ n = 1, 2, \ldots),$$

где $y_0(x)$ — произвольная непрерывная на $[x_0, x_0 + h]$ функция. Оценка точности дается в следующем виде:

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant KA \frac{(x - x_0)^{p+1}}{p+1}\left[1 + K\frac{x - x_0}{p+2} + \right.$$
$$\left. + K^2 \frac{(x - x_0)^2}{(p+2)(p+3)} + \cdots\right] \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h),$$
$$A \geqslant 0,\ p > -1.$$

Приводится общая схема оценки для случая непустого множества R, каждой паре элементов a, b которого поставлен в соответствие элемент $j = j(a, b)$ из Γ (Γ — непустая полуупорядоченная абелева полугруппа). Пусть f — отображение пространства R в себя, а f^* — соответствующее отображение f^* полугруппы Γ в себя, причем

$$j(f(a), f(b)) \leqslant f^*(j(a, b)) \quad (a \subset R,\ b \subset R).$$

Если $j_1 < j_2$, то $f^*(j_1) \leqslant f^*(j_2)$ ($j_1 \subset \Gamma$, $j_2 \subset \Gamma$). Строятся итерации $a_n = f(a_{n-1})$ ($n = 1, 2, \ldots$) для решения уравнения $f(a) = a$ ($a \subset R$) и приводится общая схема вывода оценки точности при $n = 1, 2, \ldots$.

М. А. Мертвецова

3067. Разрешимость бесконечной системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом редукции. Гехт Б. И., Тр. Новочеркас. политехн. ин-та, 1955, 28, 13—15

Рассматривается бесконечная система нелинейных сингулярных интегральных уравнений

$$u_\nu(s) = \lambda\Phi_\nu\left[s, u_1(s), u_2(s), \ldots;\right.$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma,$$
$$\left. -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_2(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma, \ldots\right] \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (1)$$

На основании принципа сжатых отображений доказывается, что если функции Φ_ν имеют период 2π по первому аргументу и подчиняются условиям:

$$|\Phi_\nu(s; \alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots) - \Phi_\nu(\sigma; \gamma_1, \gamma_2, \ldots; \delta_1, \delta_2, \ldots)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} C_i |\alpha_i - \gamma_i| + \sum_{i=1}^{\infty} C_i |\beta_i - \delta_i| + D|s - \sigma|^\mu,$$
$$|\Phi_\nu(s; \sigma_1, \sigma_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots) - \Phi_\nu(s; \gamma_1, \gamma_2, \ldots; \delta_1, \delta_2, \ldots)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} B_i^2 |\alpha_i - \gamma_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i^2 |\beta_i - \delta_i|^2,$$

где

$$|\alpha_i|, |\gamma_i| \leqslant M;\ |\beta_i|, |\delta_i| \leqslant L;\ |s|, |\sigma| \leqslant \pi,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i = C \leqslant \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} B_i^2 = B^2 < \infty,$$

то система (1), для достаточно малого $|\lambda|$ имеет единственное решение в классе периодических функций, с периодом 2π. Далее рассматривается система вида

$$u_\nu^{(n)}(s) = \lambda\Phi_\nu\left[s; u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), \ldots, u_n^{(n)}(s), 0, 0, \ldots;\right.$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1^{(n)}(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma, \ldots$$
$$\left. \ldots, -\frac{4}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n^{(n)}(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma, 0, 0, \ldots\right] \qquad (2)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и доказывается, что решение системы (1) (для малого $|\lambda|$) является пределом последовательности решений систем (2).

Н. П. Векуа

3068. О некоторых нелинейных интегральных уравнениях, встречающихся в теории динамического программирования. Беллман, Гликсберг, Гросс (On some nonlinear integral equations occurring in the theory of dynamic programming. Bellman Richard, Glicksberg Irving, Gross Oliver), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, 41, № 4, 227—229 (англ.)

Без доказательства приводятся результаты исследования нелинейного интегрального уравнения

$$f(x) = \min_{y \geqslant x}\left\{k(y - x) + a\left[\int_y^{\infty} p(s - y)\, dG(s) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f(0)\int_y^{\infty} dG(s) + \int_0^y f(y - s)\, dG(s)\right]\right\}. \qquad (1)$$

Как указывают авторы, эти результаты основаны на следующем простом соображении: если $\min_{y \geqslant x} v(x, y)$ достигается при $y > x$, то уравнение $u(x) = \min_{y \geqslant x} v(x, y)$ равносильно двум уравнениям: $v_y(x, y) = 0$, $u'(x) = v'_x(x, y)$. Основной результат:

Теорема 1. Пусть выполнены условия: $k(z) = kz$, $p(z) = pz$, $k, p \geqslant 0$; $dG(s) = \varphi(s)\, ds$, $\varphi(s) > 0$; $0 < a < 1$, $ap > k$, и пусть $\bar{x}$ — единственный корень уравнения

$$k = ap\int_y^{\infty} \varphi(s)\, ds + ak\int_0^y \varphi(s)\, ds. \qquad (2)$$

Тогда решение уравнения (1) дается соотношениями

$$y = \bar{x},\ \ 0 \leqslant x \leqslant \bar{x};\ \ y = x,\ \ x > \bar{x}.$$

Если $ap \leqslant k$, то $y = x$ при $x \geqslant 0$. Если вместо $p(z) = pz$ имеем $p(z) = pz + q$, $q > 0$, то вместо уравнения (2) надо рассмотреть уравнение

$$F'(y) = k + a\left[-p\int_y^{\infty} \varphi(s)\, ds - q\varphi(y) - k\int_0^y \varphi(s)\, ds\right] = 0.$$

Если это уравнение имеет только один корень $y = \bar{x}$ при $0 \leqslant y < \infty$, то утверждения теоремы 1 остаются в силе. Они остаются в силе и тогда, когда корней

более одного, но наибольший из них, $y = x$, сообщает абсолютный минимум функции

$$F(y) = ky + a\left\{\int_y^\infty [p(s-y)+q]\,\varphi(s)\,ds - k\int_0^y (y-s)\,\varphi(s)\,ds\right\}.$$

Теорема, аналогичная теореме 1, сформулирована для уравнения типа (1), но содержащего функции двух переменных и соответственно двойные интегралы. Другие приведенные в статье теоремы сформулированы не вполне отчетливо. С. Г. Михлин

3069. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений с ядром, имеющим особенности. Ким Ю. Ц., Научн. тр. Казан. ин-та инженеров-строит. нефт. пром-сти, 1955, № 3, 109—116

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$L(y) - \lambda \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b \frac{k(x,y)\,L_1[y(t)]}{(b-t)^\alpha}\,dt = f(x),$$

где $L(y)$ и $L_1(y)$ — линейные дифференциальные операторы, $\alpha < 1$; после дифференцирования по параметру b интеграл понимается в смысле Адамара. При помощи некоторых преобразований получается интегральное уравнение Фредгольма относительно $L_1(y)$ с интегралом в смысле Адамара. Используя для этого уравнения результаты, полученные референтом (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1940, 7), автор строит решение рассматриваемого уравнения.

Далее рассматривается уравнение вида:

$$L(y) - \lambda\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\,\beta_i(t)}{(b-t)^{1+\alpha}}\,L_1[y(t)]\,dt = f(x),$$

где интеграл понимается опять в смысле Адамара, и при некоторых предположениях указывается алгоритм построения решения этого уравнения. Н. П. Векуа

3070. Об отображении, которое относит к кривой семейство кривых. Сато (Sur l'application qui fait correspondre à une courbe une famille des courbes. Sato Tokui), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 1, 1—4 (франц.)

Пусть C — пространство непрерывных вектор-функций $\mathbf{f} = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathfrak{F}$ — компактное множество в C; $\mathbf{K}(x, t, \mathbf{u})$ — система n непрерывных и ограниченных функций от $2+n$ действительных переменных $x, t, \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ в области $D: 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, $|u_j| < \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Рассматривается система интегральных уравнений Вольтерра

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) + \int_\lambda^x \mathbf{K}(x, t, \mathbf{u}(t))\,dt, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \qquad (1)$$

Множество ее решений для данных $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}$, $\lambda \in [0,1]$ обозначается $(\mathbf{f}, \lambda)K$.

Основной результат (аналог теоремы Кнезера в теории дифференциальных уравнений): множество $(\mathbf{f}, 0)K$ есть континуум в пространстве C. Доказательство проводится в общих топологических терминах, характеризующих свойства отображения K, которое паре величин $\mathbf{f}, \lambda$ ставит в соответствие множество $(\mathbf{f}, \lambda)K$. Эти свойства: 1) K компактно, т. е. $U_{0<\lambda<1} U_{\mathbf{f}\in\mathfrak{F}} (\mathbf{f}, \lambda)K$ есть компакт, если $\mathfrak{F}$ — компакт; 2) K полунепрерывно сверху, т. е. из $\mathbf{u}_m \in (\mathbf{f}_m, \lambda_m)K$, $\mathbf{f}_m \to \mathbf{f}$, $\lambda_n \to \lambda$, $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ при $m \to \infty$ следует $\mathbf{u} \in (\mathbf{f}, \lambda)K$; 3) K кнезерово, т. е. для любых $\mathbf{f}, \lambda$ $(\mathbf{f}, \lambda)K$ есть континуум в C. Метод доказательства состоит в аппроксимации ядра $\mathbf{K}$ ядрами $K_m(x, t, \mathbf{u})$, непрерывными в D и удовлетворяющими по $\mathbf{u}$ условию Липшица; при этом характер аппроксимации также истолкован в общих терминах.

М. К. Фаге

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3071. Применение функций Грина к плоским задачам статики теории упругости. Христофоров В. В., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, № 15, 131—141

Пусть u_1, u_2 — проекции вектора упругих смещений на оси x и y; $\theta = \partial u_1/\partial x + \partial u_2/\partial y$, $\omega = \partial u_2/\partial x - \partial u_1/\partial y$; предполагается, что упругая среда заполняет конечную область Σ. Доказывается, что в случае заданных на границе упругой среды смещений контурные значения функций θ и ω удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\theta(t) = \theta^* - \frac{\lambda+\mu}{\pi(5\lambda+9\mu)}\int_L \left[(x_s - x_t)\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right) + (y_s - y_t)\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)\right]\theta(s)\,ds,$$

$$\omega(t) = \omega^* - \frac{\lambda+\mu}{\pi(\lambda-3\mu)}\int_L \left[(x_s - x_t)\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right) + (y_s - y_t)\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)\right]\omega(s)\,ds.$$

Здесь λ и μ — постоянные Ляме, Γ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, t и s — дуговые координаты точек контура L, θ^* и ω^* — функции, известные в силу краевых условий. В случае заданных на границе напряжений θ и ω удовлетворяют системе уравнений

$$2\pi(\lambda+2\mu)\,\theta(q) = \theta_* - \lambda\iint_\Sigma \theta(p)(\nabla_q \nabla_p)\varphi\,dp + \mu\iint_\Sigma \omega(p)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_q \partial x_p} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_q \partial y_p}\right)dp$$

$$2\pi\mu\omega(q) = \omega_* - \lambda\iint_\Sigma \theta(p)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_q \partial x_p} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_q \partial y_p}\right)dp + \mu\iint_\Sigma \omega(p)(\nabla_q\nabla_p)\varphi\,dp,$$

в которых φ — компенсирующая часть функции Неймана для уравнения Лапласа, а функции θ_* и ω_* известны в силу краевых условий. Свойства ядер и условия разрешимости построенных интегральных уравнений не исследуются.

Примечание референта. Интегральное уравнение для $\omega(t)$ теряет смысл при физически допустимом значении $\lambda = 3\mu$. С. Г. Михлин

3072. Регулярные интегральные уравнения динамики упругого тела. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, № 15, 79—85

Для упругой однородной изотропной среды, заполняющей конечную область с достаточно гладкой границей, ставится задача интегрирования уравнения упругих колебаний

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} = \mathbf{f}$$

при обычных начальных условиях; на границе тела считается заданным либо вектор упругих смещений (первая задача), либо выражение

$$2\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu [\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + h\mathbf{v}$$

(вторая задача), в котором $\mathbf{n}$ — нормаль к границе и h — постоянная, характеризующая реакцию окружающей среды. Вводятся лапласовы изображения вектора смещений, его вихря и расходимости; эти изображения обозначаются соответственно через $\mathbf{u}$, ω и ϑ. Доказывается, что $\mathbf{u}$ связано с ω и θ некоторым интегральным соотношением, содержащим произвольную постоянную c. Применяя к обеим частям указанного соотношения операции div и rot, автор получает интегральные уравнения для ω и θ в случае как первой, так и второй задачи. Форма этих уравнений несколько упрощается, если положить $c = (\lambda + 2\mu)/\rho$ или $c = \mu/\rho$.

Вопросы о структуре ядер и о разрешимости построенных интегральных уравнений, а также о возможности восстановления вектора смещений по его изображению, полученному с помощью этих уравнений, не исследуются.

С. Г. Михлин

3073. О параметрическом резонансе упругих пластин. Лейдерман Ю. Р., Докл. АН УзССР, 1955, № 3, 9—13 (рез. узб.)

С помощью уравнений равновесия пластин, выведенных автором ранее (Докл. АН УзССР, 1948, № 11), рассматриваются колебания при заданных продольных силах, зависящих от времени в виде

$$N_x = F_1(x, y) f(t), \; N_y = F_2(x, y) f(t),$$

где f — периодическая функция. Получено интегро-дифференциальное уравнение для прогиба и с помощью разделения переменных составлена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения зависимости прогиба от времени. Рассмотрен пример прямоугольной пластины, опертой по контуру. Обсуждается приближенная постановка вопроса о построении областей неустойчивости.

И. С. Аржаных

См. также: 3002, 3017, 3028, 3056, 3326, 3327, 3328

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3074. О решении одной граничной задачи прямым вариационным методом. Бурчуладзе (ერთი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ პირდაპირი ვარიაციული მეთოდით. ბურჭულაძე ა.), თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სტუდენტთა სამეცნიერო შრომების კრებული, (Сб. науч. работ студ. Тбилис. ун-та), 1953, № 6, 1—5 (груз.)

Автор считает, что исследование в книге Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики» (т. II, гл. VII, М.—Л., 1951) прямым вариационным методом краевой задачи для дифференциального уравнения $(pu_x)_x + (pu_y)_y - qu = -f$ содержит неточности. Разлагая эту задачу на две квазиоднородные, автор дает решение их прямым вариационным методом.

Э. С. Цитланадзе

3075 К. Лекции по вариационному исчислению (Учебник для гос. ун-тов). **Ахиезер Н. И.**, М., Гостехиздат, 1955, 248 стр. с черт., 4 р. 40 к.

Книга состоит из четырех глав и раздела «Различные дополнения и упражнения».

В гл. 1 «Уравнения вариационного исчисления» введены основные понятия вариационного исчисления и получены основные необходимые условия экстремума в задаче с неподвижными границами для функционалов вида $\int_a^b F(x, Y(x), Y'(x))\,dx$ в классе кусочно-гладких вектор-функций $Y(x)$, а также рассмотрена простейшая вариационная задача в параметрической форме. Попутно доказываются инвариантность уравнений Эйлера, теорема Гильберта о существовании второй производной в неособых точках экстремали, теорема С. Н. Бернштейна о существовании и единственности решения простейшей граничной задачи для уравнения $y'' = F(x, y, y')$.

В гл. 2 «Теория поля» изложены достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными границами для функционалов вида $\int_a^b F(x, Y(x), Y'(x))\,dx$ и для простейшего функционала, заданного в параметрической форме. Довольно подробно изложена также теория Гамильтона — Якоби.

В гл. 3 «Различные обобщения основной задачи» изложены основные необходимые условия экстремума в простейшей задаче с подвижными граничными точками, в задаче об экстремуме функционала, зависящего от производных n-го порядка, а также в задаче об экстремуме двойного интеграла с закрепленной границей. Весьма подробно рассмотрены основные задачи на условный экстремум.

В гл. 4 «Прямые методы вариационного исчисления» подробно рассмотрен вопрос о существовании абсолютного минимума функционала $\varphi(y(a)) + \int_a^b F(x, y, y')\,dx$, $y(b) = b_1$ при изопериметрических связях и аналогичный вопрос для простейшего функционала, заданного в параметрической форме в задаче на безусловный экстремум. Кратко изложен метод Ритца в применении к простейшему функционалу.

В разделе «Различные дополнения и упражнения» рассмотрен ряд задач, иллюстрирующих и несколько дополняющих основной текст книги; кроме того, изложены некоторые дополнения теоретического характера: вариационные принципы механики, обобщение основной леммы вариационного исчисления, теорема Хаара о функционалах $\iint_D F(x, y, u, u'_x, u'_y)\,dx\,dy$ (A), теорема Хаара о регулярных функционалах вида $\iint_D f(x, y, p, q)\,dx\,dy$, аналог условия Лежандра для функционалов вида (A), вариационная теория собственных значений, некоторые замечания о задачах на условный экстремум.

Книга допущена Главным управлением университетов в качестве учебника по вариационному исчислению, однако, по мнению референта, как по содержанию, так и по стилю изложения она трудна для лиц, впервые знакомящихся с вариационным исчислением, к тому же книга содержит материал, значительно выходящий за рамки действующих в настоящее время программ.

Л. Э. Эльсгольц

См. также: 2908, 2914, 2917, 2918, 2921, 2962, 3003, 3054, 3130, 3308

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3076. Вычисление некоторого среднего арифметического. Сибирани (Calcolo di una media aritmetica. Sibirani F.), Period. mat., 1954, 32, № 5, 302—304 (итал.)

Требуется найти среднее арифметическое значений функции $y=f(x)$ в промежутке $[a, b]$, если ее аналитическое выражение неизвестно, но зато известно аналитическое выражение обратной функции $x=\varphi(y)$ и даны конечные значения $f(a)$, $f(b)$ функции f. Из простых геометрических соображений получается формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} \varphi(y)\,dy.$$

(очевидно, она легко получается и аналитически). Функция $\varphi(y)$ при этом предполагается возрастающей или убывающей. Г. М. Фихтенгольц

3077. Асимптотика II. Элементарные методы. Корпут (Asymptotics II. Elementary Methods. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 2, 139—150; Indagationes math., 1955, 17, 139—150 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 520. Формальный ряд $\Sigma_0^\infty a_n$ называется обволакивающим (enveloping) число s, если на замкнутой дуге окружности E_ζ, $-\pi<\zeta<\pi$, опирающейся на отрезок (0, 1) действительной оси и образующей в начале координат угол $-\zeta$ с положительной действительной полуосью, для каждого $n\geqslant 0$ найдется такая точка $\theta_n \in E_\zeta$, что $s=a_0+\ldots+a_{n-1}+\theta_n a_n$; тогда автор пишет:

$$s \propto \sum_0^\infty a_n (E_\zeta).$$

Доказывается ряд теорем, например:

$$\frac{1}{1+z} \propto \sum_0^\infty (-z)^n (E_\zeta),\quad -\pi<\arg z=\zeta<\pi,$$

(теорема 1.2),

$$\operatorname{arctg} z \propto \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}(E_{2\zeta}),\quad -\frac{\pi}{2}<\arg z=\zeta<\frac{\pi}{2},$$

(теорема 1.6),

$$F(z) \propto \sum_0^\infty (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)z^{2n+1}}(E_{2\zeta}),$$
$$-\frac{\pi}{2}<\arg z=\zeta<\frac{\pi}{2},$$

где

$$F(z)=2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt =$$
$$=\ln\Gamma(z)-(z-1/2)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln 2\pi$$

(теорема 2.1). Из последней теоремы выводятся оценки остаточного члена в асимптотическом разложении $\ln\Gamma(z)$. Указывается вывод некоторых асимптотических разложений из формулы Маклорена в комплексной области (теорема 3.1), например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega+z)^s e^{-z^2}\,dz \sim \sum_{k=0}^\infty \binom{s}{2k}\Gamma(k+1/2)\,\omega^{s-2k},$$

если путь интегрирования проходит над точкой $-\omega$, s — произвольное фиксированное комплексное число и $\operatorname{Im}\omega$ ограничено снизу. Далее формулируются теоремы, позволяющие получать асимптотические разложения интегрированием по частям (теоремы 4.1 и 4.2), и в качестве примера приводятся первые 4 члена асимптотического разложения

$$\int_0^\infty \{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{-1/2} e^{-\omega x(x+1)^{1/3}}\,dx$$

для $\operatorname{Re}\omega\geqslant 0$. В случае абсолютной монотонности функций, фигурирующих под знаком интеграла, уточняется оценка остаточного члена разложения. В теореме 6.3 метод суммирования Абеля применяется к нахождению некоторых пределов. В частности,

$$\lim_{h\to\infty} h^{1-\lambda}(x+\sqrt{x^2-1})^{-h-\lambda}P_h^{(\lambda)}(x)=\frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)}(x^2-1)^{-\lambda/2}$$

(при $\lambda=1/2$ эта формула дает формулу Лапласа — Гейне из теории полиномов Лежандра $P_h(x)=P_h^{(1/2)}(x)$).

Примечание референта. Результаты, аналогичные оценкам остаточного члена некоторых асимптотических разложений, в частности, получаемых в статье из теоремы 2.1, получены также референтом (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 1, 13—16; см. также РЖМат, 1953, 177). В формуле (3.1), стр. 143, верхний предел суммирования должен быть $n-1$. В. И. Левин

3078. Дискретный аналог неравенства Виртингера. Фань Цюй, Тауски, Тодд (Discrete analogs of inequalities of Wirtinger. Fan Ky, Taussky Olga, Todd John), Monatsh. Math., 1955, 59, № 2, 73—90 (англ.)

Если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ суть n произвольных вещественных чисел, то справедливы неравенства:

1) $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2 \geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{2(2n-1)}\sum_{i=2}^{n}x_i^2$ при $x_1=0$,

2) $\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_{i+1})^2 \geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{i=0}^{n}x_i^2$ $(x_0=x_{n+1}=0)$,

3) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2 \geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, при $x_{n+1}=x_1$, если $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$,

4) $\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-2x_{i+1}+x_{i+2})^2 \geqslant$
$$\geqslant 16\sin^4\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{i=0}^{n}x_i^2,\ (x_0=x_{n+1}=0),$$

5) $\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-2x_{i+1}+x_{i+2})^2 \geqslant 16\sin^4\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ при $x_0=x_1$,
$$x_{n+1}=x_n,\ (n\geqslant 3),\ \text{если}\ \sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

Они обращаются в равенства соответственно только при

$$x_i=A\sin\frac{i-1}{2n-1}\pi,\ x_i=A\sin\frac{i\pi}{n+1},\ x_i=A\cos\frac{2\pi i}{n}+$$
$$+B\sin\frac{2\pi i}{n},\ x_i=A\sin\frac{i\pi}{n+1},\ x_i=A\cos\frac{2i-1}{2n}\pi.$$

Неравенство 3) является дискретным аналогом известного неравенства Виртингера для интегралов (Хар-

ди С., Литлвуд Д., Полиа Г., Неравенства, Изд-во ин. лит., 1948). Остальные суть аналоги примыкающих к нему интегральных неравенств для первой и второй производной. Все они непосредственно вытекают из соответствующего неравенства для наименьшего характеристического числа эрмитовых матриц.

Даны также дискретные аналоги интегральных неравенств Беллмана и Нордкотта (Bellman R., J. London Math. Soc., 1943, **18**, 140—142; Northcott D. G., J. London Math. Soc., 1939, **14**, 198—202). Так, например, если $n \geqslant 2$ вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям $\Sigma_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$, то наименьшее возможное значение $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - x_{j+1}|$, $(x_{n+1} = x_1)$ равно $4/n$, когда n четно, и $4n/(n^2-1)$, когда n нечетно. А. Ф. Тиман

3079. Об одном приложении символического анализа к решению функционального уравнения. Пародн (Sur une conséquence de l'emploi de l'analyse symbolique à la résolution d'une équation fonctionnelle. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 2, 144—145 (франц.)

Посредством преобразования Лапласа решается функциональное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(s)$ от действительного переменного s

$$s\varphi(s) + \lambda[\varphi(s-\alpha) + \varphi(s+\alpha)] = d, \qquad (1)$$

λ, α и d — действительные; $\alpha, \lambda > 0$. Показывается, что решение уравнения (1) выражается через функции Ангера J_ν и Бесселя J_ν:

$$\varphi(s) = \frac{\pi d}{\alpha} \frac{J_{s/\alpha}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) - J_{s/\alpha}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)}{\sin\frac{\pi s}{\alpha}}.$$

Выводится известное (Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 1, Изд-во ин. лит., Л., 1949, стр. 340) рекуррентное соотношение для функций Ангера

$$J_\nu(u) - \frac{u}{2\nu}[J_{\nu-1}(u) + J_{\nu+1}(u)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}.$$

П. И. Кузнецов

3080. Об ортосимметрических определителях, содержащих тригонометрические и гиперболические функции. Кошмидер (Sui determinanti ortosimmetrici di funzioni trigonometriche e iperboliche. Koschmieder Lothar), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 266—270 (итал.)

Показывается, что для $m > 3$ определители $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$, где $a_{ij} = \sin[\alpha + (i+j-2)\beta]x$, и определители, в которых вместо синусов стоят косинусы, равны нулю. В. И. Левин

3081. Задача о моментах. Сингал, Бхатнагар (A problem on moments. Singal M. K., Bhatnagar P. L.), Math. Student, 1954, **22**, № 4, 167—174 (англ.)

Пусть плотность в каждой точке n-мерного симплекса меняется, как p-я степень ее расстояния от некоторой гиперплоскости E_{n-1}, и пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ — расстояния вершин этого симплекса до E_{n-1}. Тогда расстояние $\bar{z}$ центра тяжести симплекса до E_{n-1} находится по формуле

$$\bar{z} = A_{n+1,\,p+1} / A_{n+1,\,p},$$

где $A_{n+1,\,p+1}$ обозначает среднее арифметическое всех различных однородных произведений $p+1$-го измерения, составленных из $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$. Эта же формула записывается в виде:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{r=0}^{n} u_{r+1} \frac{\partial S_{n+1,\,p+1}}{\partial u_{r+1}}}{\sum_{r=0}^{n} \frac{\partial S_{n+1,\,p+1}}{\partial u_{r+1}}},$$

где $S_{n+1,\,p+1}$ — сумма различных однородных произведений $p+1$-го измерения, составленных из $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$. В тех же предположениях выводится формула для квадрата радиуса инерции симплекса относительно E_{n-1}:

$$k^2 = A_{n+1,\,p+2} / A_{n+1,\,p}.$$

Приведено несколько примеров, в частности вычисляется положение центра давлений на треугольную пластинку, погруженную в жидкость. А. А. Нудельман

3082. Расстояние до начала некоторого множества точек в E^n. Каруш, Вулфсон (The distance to the origin of a certain point set in E^n. Karush W., Wolfsohn N. Z.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 323—332 (англ.)

Устанавливается следующее выражение для минимального значения функции $f(a) = \Sigma_{i=1}^{m+1} a_i^2$ при связях $\Sigma_{i=1}^{m+1} i^k a_i = 1$, $k = 0, 1, \ldots, q$ $(0 \leqslant q < m)$:

$$f_{\min} = 1 - \frac{m(m-1)\ldots(m-q)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+q+1)},$$

и показывается, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f_{\min}}{(q+1)^2/m} = 1.$$

Поясняется, что эта задача минимизации возникает в связи с проблемой линейного сглаживания статистических данных. Ф. Р. Гантмахер

3083. Задача о взвешиваниях. Девиде (Ein Problem über Wägen. Devidé Vladimir), Elem. Math., 1955, **10**, № 1, 11—15 (нем.)

Имеется $(3^n-1)/2$ монет. Допускаются два случая: 1) среди монет нет фальшивых, все монеты равного веса; 2) одна монета фальшивая, по весу она отличается от остальных.

Требуется при помощи n взвешиваний на чашечных весах установить, какой случай имеет место, и если есть фальшивая монета, то выделить ее и определить, легче она или тяжелее настоящей.

В качестве гири употребляется только одна дополнительная нефальшивая монета того же достоинства. Обоснована схема решения задачи для любого целого положительного n. Б. А. Кордемский

3084. Математические заметки (о задачах Ноде и др.). Хазанов М. Б., Уч. зап. Кабардинск. пед. ин-та, 1955, № 6, 24—25

В первой заметке отмечаются две формулы, содержащие числовую функцию Ноде $\lambda(n, m)$. Во второй заметке формулируется необходимый и достаточный признак эквивалентности бесконечно малых $f(x)$ и Cx^k. В. Д. Подсыпанин

3085. Замечание о формуле Стирлинга. Роббинс (A remark on Stirling's formula. Robbins Herbert), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 1, 26—29 (англ.)

Приводится доказательство формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\cdot\pi n}\, n^n e^{-n} e^{r_n}$, из которого следует, что r_n

удовлетворяет неравенству $(2n+1)^{-1} < r_n < (2n)^{-1}$.

Г. П. Сафронова

3086. Одна теорема о неподвижных точках. Борсук (A theorem on fixed points. Borsuk K.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 1, 17—20 (англ.) См. РЖМат., 1955, 2145.

3087. Физическое представление математических функций. Атен (Physikalische Darstellung mathematischer Funktionen. Athen H.), Math. Naturwiss., Unterricht, 1954, **7**, 9—14 (нем.)

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 902.

3088. Доказательство теоремы о монотонности обратной функции. Сикорский (Pewien dowód twierdzenia o monotoniczności funkcji odwracalnej. Sikorski R.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, **1**, ser. 2, № 1, 126 (польск.)

3089. Об одном достаточном условии гомеоморфизма непрерывно дифференцируемого отображения. Мышкис А. Д., Бунт А. Я., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 139—142

А. М. Фомин показал (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 5, 198—199), что система непрерывно дифференцируемых функций $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, определенных в выпуклой области R евклидова пространства, отображает область $S \subset R$ взаимно однозначно на $\varphi(S)$, если выполнены следующие условия: а) $J = \det |\partial\varphi_i / \partial x_j| \neq 0$ в S; б) матрица $M = \left\| \frac{1}{2} (\partial\varphi_i / \partial x_j + \partial\varphi_j / dx_i) \right\|$ является всюду в R неотрицательно определенной; в) пересечение S с множеством K точек, где M не является положительно определенной, нигде не плотно в S.

Пример референта (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 5, 163—164) показывает, что условие выпуклости R существенно для справедливости теоремы.

В реферируемой работе выясняется геометрический смысл условия Фомина (б): Для любой гладкой кривой $x = x(t) \subset R$, $x'(t) \neq 0$, $y(t) = \varphi[x(t)]$ скалярное произведение $x'(t) \cdot y'(t) \geqslant 0$.

Отсюда получаются выводы цитированной теоремы и примера, а также более общие условия, обеспечивающие взаимную однозначность отображения φ на множестве $S \subset R$.

А. И. Фет

3090. Об одном обобщении идеи дифференциала высшего порядка. Романовский П. И., Игнатьев У. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **21**, 35—48

Авторы вводят понятия правой φ-производной и правого φ-дифференциала, являющиеся обобщениями понятий правой промежуточной производной и правого дифференциала.

Если для функции $F(x)$ возможно представление

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = c_1\varphi_1(h) + c_2\varphi_2(h) + \ldots + c_n\varphi_n(h) + o[\varphi_n(h)],$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянные числа, а $\{\varphi_i(h)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — система непрерывных функций, удовлетворяющих условиям: а) $\varphi_i(h) > 0$ $(h > 0)$, б) $\varphi_{i+1}(h) = o[\varphi_i(h)]$, $(h > 0,\ h \to 0)$, то число c_n называется n-й правой φ-производной, а выражение $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$ — правым φ-дифференциалом функции $F(x)$ в точке x_0. Определяется континуальный аналог φ-производной. Пусть $\varphi(h, t)$ — непрерывная функция от $h \in (0; l)$ и $t \in (0; D)$ и обладающая свойствами: 1) $\varphi(h, t) > 0$ для любых h и t; 2) если $\alpha > \beta$, то $\varphi(h, \alpha) = o[\varphi(h, \beta)]$, $(h \to 0)$; 3) для $0 < \alpha < \alpha_1 \leqslant D$ существуют такие постоянные $H(\alpha; \alpha_1) > 0$ и $K(\alpha; \alpha_1) > 0$, что при $h < H$ выполняется для всех $t \in (\alpha, \alpha_1)$ неравенство $\varphi(h; t) \leqslant K(\alpha, \alpha_1)\varphi(h, \alpha)$. Если для $F(x)$ найдется непрерывная справа и ограниченной вариации на $(0, \alpha]$ функция $\psi(t)$ такая, что

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_0^\alpha \varphi(h, t)\, d\psi(t) + \varepsilon(h), \qquad (1)$$

где $\varepsilon(h) = o[\varphi(h, t)]$ $(h > 0,\ h \to 0)$, а интеграл берется в смысле Лебега—Стилтьеса, то говорят, что функция $F(x)$ φ-дифференцируема порядка α в точке x_0, а величину $\int_0^\alpha \varphi(h, t)\, d\psi(t)$ называют правым φ-дифференциалом в этой точке.

Доказано существование функций, дифференцируемых в указанном смысле, любого порядка α $(0 < \alpha < \infty)$ и что из φ-дифференцируемости порядка α в некоторой точке следует φ-дифференцируемость любого порядка $\gamma < \alpha$ в этой точке. Приведено применение введенных понятий в теории экстремума функции; указано на возможность перенесения их на функционалы и операторы в действительных банаховых пространствах и установления с помощью их некоторых новых достаточных условий экстремумов функционалов. В статье имеются опечатки.

М. И. Алхимов

3091. Применение функций δ_+ и δ_- к выводу соотношений Байяр — Боде. Намиас, Лафлёр (Application des fonctions impulsives δ_+ et δ_- à l'établissement des relations de Bayard — Bode. Namias V., Lafleur Ch.), Bull. cl. sci. Akad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 4, 433—434 (франц.)

Применением свойств функций $\delta_+ = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iut}\, dt$, $\delta_- = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{iut}\, dt$ получается следующее: пусть $Y(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$ — функция, служащая преобразованием Фурье вещественной функции, равной нулю при $t < 0$, тогда

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi X(\xi) - \omega X(\omega)}{\xi^2 - \omega^2}\, d\xi,$$

$$X(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\xi) - R(\omega)}{\xi^2 - \omega^2}\, d\xi.$$

Л. А. Дикий

3092. Две теоремы о разделении переменных в уравнении с пятью переменными Бал, Радо (Două teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru ecuaţiile cu cinci variabile. Bal Lascu, Rado Francisc), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, **5**, № 2, 285—290 (рум.; рез. русс., франц.)

Даются необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение $F(x, y, z, u, v) = 0$ можно было представить в формах 1) $v = \Phi[\varphi(x, y), \psi(z, u)]$ и 2) $v = \Phi[\varphi(x, y, z), u]$.

Например, в случае 2) они выглядят так:

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yu} & F''_{zu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yv} & F''_{zv} \end{vmatrix}$$

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}.$$

Из резюме авторов

3093. Две теоремы о функциях, принадлежащих классу $L_1(-\infty, \infty)$. Артемиадис (Deux théorèmes sur les fonctions appartenant à la classe $L_1(-\infty, \infty)$. Artémiadis Nicolas K.), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 14, 1500—1502 (франц.)

Доказывается неравенство $|f(x)| < \text{const}$ при условиях, наложенных как на функцию $f(x)$, так и на ее

преобразование Фурье. Формулируем одну из теорем: Пусть $f(x)$ вещественная, $f(x) \in L(0, \infty)$; $f(x)/x \in L(0, \infty)$; $B = \int_0^\infty [f(x)/x]\,dx > 0$. Если при любом вещественном и отличном от нуля α

$$\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx \neq 0,$$

то почти всюду $|f(x)| < 2B/\pi$. При доказательстве используются свойства интегралов Фурье.

Ю. И. Черский

3094. Применение некоторых пространств Лоренца. Руни (An application of some spaces of Lorentz. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 3, 314—321 (англ.)

Лоренцом (Lorentz G. G., Ann. Math., 1950, 51, 37—55) определены пространства $\Lambda(\alpha)$ и $M(\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$, состоящие из измеримых функций $\varphi(x)$, $0 < x < \infty$, для которых мера множества $\{|\varphi(x)| > \varepsilon\}$ конечна при любом $\varepsilon > 0$ и которые имеют конечную норму $\|\varphi\|$, определяемую как $\sup\{(\mathrm{mes}\,E)^{-\alpha} \times \int_E |\varphi(x)|\,dx\}$, $E \subset (0, \infty)$ для $M(\alpha)$ и как $\alpha \int_0^x x^{\alpha-1} \varphi^*(x)\,dx$ для $\Lambda(\alpha)$. Здесь φ^* есть монотонно убывающая неотрицательная функция, равноизмеримая с $|\varphi|$ (Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, Москва, Изд-во ин. лит., 1948, 332—334). Доказываются теоремы:

1. Пусть $\varphi \in \Lambda(\alpha)$ (соответственно $M(\alpha)$) и $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)\,dt$, $s > 0$; тогда $\int_0^\infty s^{-\alpha}|f(s)|\,ds < \infty$ (соответственно: $s^\alpha f(s)$ ограничена). Если $\varphi(t)$ положительна и убывает, то это условие необходимо и достаточно для $\varphi \in \Lambda(\alpha)$ $(M(\alpha))$.

2. Для того чтобы функция $f(s)$, определенная на $0 < s < \infty$, была преобразованием Лапласа функции из $\Lambda(\alpha)$ $(M(\alpha))$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) f имеет производные всех порядков в $(0, \infty)$ и $f^{(k)}(s) \to 0$ при $s \to \infty$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; 2) $\|L_k[f]\| \leqslant c$ в $\Lambda(\alpha)$ $(M(\alpha))$ не зависит от $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Здесь $L_k[f] = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)$ есть оператор Уиддера — Поста, применяемый в теории преобразования Лапласа (Widder D. V., The Laplace transform., Princeton, 1941, глава VII). М. К. Фаге

3095. Новое преобразование криволинейного интеграла в поверхностный и его применение в магнитостатике. Дюран (Une nouvelle transformation vectorielle d'intégrale curviligne en intégrale de surface et son application à la magnétostatique. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 7, 594—596 (франц.)

Автор выводит ранее известную формулу (см., например, Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. II, 1952, 304)

$$\oint_C [d\bar{l}, \bar{A}] = \iint_S \{(\bar{n}, \overline{\mathrm{grad}})\bar{A} + [\bar{n}, \overline{\mathrm{rot}}\,\bar{A}] - \bar{n}\,\mathrm{div}\,\bar{A}\}\,dS, \quad (1)$$

где $\bar{A}$ — векторное поле, C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S. В качестве применения получается классическая формула, связывающая поле магнитного листка с заданным моментом и поле заданного линейного тока. Г. Е. Шилов

3096. О перестановке порядка «главных» интегралов в смысле Коши. Трикоми (Sull'inversione dell' ordine di integrali «principali» nel senso di Cauchy. Tricomi Ftancesco G.), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 1, 3—7 (итал.)

Известная формула перестановки Пуанкаре — Бертрана

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x}\int_a^b \frac{F(x, y, z)}{y-z}\,dy - \int_a^b dy \int_a^b \frac{F(x, y, z)\,dz}{(y-z)(z-x)} = -\pi^2 F(x, x, x)$$

(расходящиеся интегралы следует понимать в смысле их главного значения по Коши) доказывается в несколько более общих предположениях, чем обычно. Пусть

$$\frac{F(x, y, z) - F(x, z, z)}{y-z} = \Phi(x, y, x);$$

$$\frac{F(x, z, z) - F(x, x, x)}{z-x} = \Psi(x, z).$$

Доказывается, что формула Пуанкаре — Бертрана справедлива, если:

1) функция $\Phi(x, y, z)$ суммируема как по y, так и по z; интеграл

$$\int_a^b \frac{\Phi(x, y, z) - \Phi(x, y, x)}{z-x}\,dz$$

существует в смысле Лебега и ограничен;

2) как функция от z, $\Psi(x, z) \in L_p$, $p > 1$ (в тексте опечатка: $p < 1$). С. Г. Михлин

3097 К. Функции и графики. Математический анализ. Аналитическая геометрия. Статистика. Родригес-Видаль (Funciones y gráficas. Análisis matemático. Géometria analítica. Estadistica. Rodrigués Vidal R., Barcelona, Teide, 1954, 169 p., 1 hoj.), Bibliogr. hispánica, 1955, 14, № 6, 154 (исп.)

3098 К. Суммирование бесконечно малых величин. Натансон И. П. (Summierung unendlich kleiner Grössen. (Einführung in die Integralrechnung) Natanson I. P., Übers. aus dem Ress. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 600 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского издания (РЖМат, 1956, 515 К).

3099 К. Курс высшей математики. Т. 2. Смирнов В. И. (Lehrgang der höheren Mathematik. Teil. 2. Smirnow W. I. Übers. nach der 12. russ. Aufl. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 580 S., ill,) (нем.)

Перевод с русского издания (РЖМат, 1954, 1699 К)

3100 К. Курс математического анализа. Т. 1. Толстов Г. П., М., Гостехиздат, 1954, 552 стр. 11 р. 40 к.

Книга рассчитана на высшие технические учебные заведения с повышенными требованиями к математике.

Во введении речь идет о математике в целом, ее предмете и методе.

Глава I. Действительные числа. Теория пределов. У автора, как и у Герхардта Ковалевского, изложение теории действительных чисел чередуется с изложением теории пределов. Этим достигается большая компактность и избегаются повторения однотипных рассуждений.

Глава II. Функции одной переменной. Непрерывность. Основные определения даны в терминах последовательностей. Определение с помощью ε и δ помещено лишь в конце. Отметим теорему о замене переменной в операции перехода к пределу(стр. 127).

Глава III. Производная и дифференциал. Классический материал. Упоминается теорема о существовании и дифференцировании неявной функции, но лишь для случая, когда в левой части уравнения стоит целый многочлен (только для этого случая устанавливается понятие частной производной).

Глава IV. Важнейшие свойства функций и производных. Точные границы числовых множеств. Свойства непрерывных функций. Основные теоремы, формула Тейлора. Приложения.

Глава V. Элементы дифференциальной геометрии на плоскости. Попутно используется понятие длины кривой как точной верхней границы длин вписанных ломаных.

Глава VI. Комплексные числа и комплексные функции.

Глава VII. Свойства многочленов. Решение уравнений.

Формальная теория комплексных чисел. Ряды. Формулы Эйлера.

Разложение многочленов. Исследование кубического уравнения. Приближенное решение уравнений.

Глава VIII. Неопределенный интеграл. Классический материал. В заключение — некоторые простейшие случаи дифференциальных уравнений: уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Задачи о колебании материальной точки.

Глава IX. Определенный интеграл. Интегрирование непрерывных функций.

Изложение здесь ведется своеобразно. Сначала строго устанавливается понятие площади плоской фигуры. При помощи квадрирования криволинейной трапеции доказывается существование первообразной для всякой непрерывной функции, а затем лишь вводится определенный интеграл как приращение первообразной функции. Отсюда все свойства определенного интеграла получаются просто. Как предел интегральной суммы определенный интеграл появляется лишь в конце. Приложения определенных интегралов основаны частью на первом определении этого понятия («метод выделения элемента»), частью же — на втором («метод интегральных сумм»). Приводятся методы приближенного интегрирования и формулы, служащие для оценки погрешностей.

Глава X. Интегрирование разрывных функций. Несобственные интегралы. Определения и вся теория строятся аналогично прежнему, но с использованием «обобщенной первообразной» функции для данной, т. е. такой непрерывной функции, которая имеет данную функцию своей производной, за исключением, быть может, конечного множества точек.

Книга написана ясным языком и в то же время на уровне «университетской» строгости — в этом одна из основных установок автора. Г. М. Фихтенгольц

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3101. Заметка о типических средних. Чандрасеккаран, Минакшисундарам (A note on typical means. Chandrasekharan K., Minakshisundaram S.), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 3, 107—114 (англ.)

Получены теоремы тауберова типа для суммирования рядов методом «типических средних» Рисса (λ, k): 1. Если $\lambda_n a_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ или $\lambda_n a_n = O(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ и Σa_n (λ, k)-суммируем, $k > 0$, тогда Σa_n сходится (теоремы P и Q). 2. Если $\lambda_n a_n = O_L(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ и $\lambda_n a_n = O_L(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ и Σa_n (λ, k)-суммируем, $k > 0$, тогда Σa_n сходится (теорема R). М. П. Щеглов

3102. Произведение двух рядов. Сиддонс (The product of two series. Siddons A. W.), Math. Gaz., 1955, 39, № 327, 4—6 (англ.)

В работе содержится геометрическая интерпретация доказательства известной теоремы о произведении двух сходящихся числовых рядов с вещественными членами. Доказательство приводится для случая положительных рядов и для случая, когда один из рядов знакопеременный, а другой с положительными членами. Рассматривается также произведение двух знакопеременных рядов, но, как и указывает автор, в этом случае геометрическая картина запутана и ни к каким выводам не приводит. Л. М Абрамов

3103. О гипергеометрическом суммировании, включающем бесконечные пределы. Басу (On hypergeometric summability involving infinite limits. Basu S. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 226—238 (англ.)

Как известно (Харди Г., Расходящиеся ряды, Москва, 1951, 309), хаусдорфово преобразование последовательности $\{s_n\}$ определяется соотношением

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (1)$$

где $\{\mu_n\}$ — данная последовательность множителей. Регулярное преобразование (1) называют вполне регулярным, если из условия $s_n \to \infty$ вытекает, что $\sigma_n \to \infty$. Положим, что числа μ_n определяются следующим образом:

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n+1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,1\cdot 2\ldots n},$$

где α, β, $\gamma > 0$ — некоторые константы. Если $\sigma_n \to l$, то говорят, что последовательность $\{c_n\}$ $(H, \alpha, \beta, \gamma)$-суммируема или гипергеометрически суммируема к числу l. Доказываются следующие теоремы:

1. Регулярный метод $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ не является вполне регулярным, если $\alpha + \beta - 1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha\beta$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$.
2. Если $\gamma \geqslant \alpha + \beta - 1 > \alpha\beta$, метод $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ вполне регулярен.
3. Пусть $\gamma > \alpha\beta > \alpha + \beta - 1$. Тогда: а) метод $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ вполне регулярен, если $0 < \alpha, \beta < 1$; б) метод $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ не вполне регулярен, если $\gamma > \alpha$ или $\gamma > \beta$. И. Е. Жак

3104. Об одном классе бесконечных произведений, значение которых может быть выражено в замкнутой форме. Миколаш (On a class of infinite products whose value can be expressed in closed form. Mikolás Miklós), Acta scient. math., 1955, 16, № 1—2, 58—62 (англ.)

Статья посвящена вопросу, поставленному Фейером: найти достаточно широкий класс бесконечных произведений, содержащий произведение Валлиса, значение которых можно выразить в замкнутой форме.

Пусть d, A, D — фиксированные комплексные числа, отличные от нуля, и z — комплексная переменная. При обозначениях $\alpha = A/D$, $\delta = d/D$, $h = (\nu - 1)/2$ (ν — целое и $\geqslant 2$) имеет место теорема: Для сходимости произведения

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(z + hd)^{\nu}}{z(z+d)\ldots(z+\nu-1d)}, \quad z = A + nD$$

необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел $\alpha + h\delta$, $\alpha + \mu\delta$ $(\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$ не было нулем или целым отрицательным. При этом

$Q=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\delta)\,\ldots\,\Gamma(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta)\,\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}$. (1) Формула (1) принимает очень простой вид в частных случаях: $\delta=1$, $\nu=2$; $\delta=\frac{1}{\nu}$; $\alpha+h\delta=1$. На основании простейших свойств функции $\Gamma(z)$ можно заменить правую часть формулы (1) выражением, не содержащим функции Γ, в том и только в том случае, когда имеет место хотя бы одно из условий: 1) δ — целое и $(\nu-1)\,\delta$ — четно, 2) $2\alpha+(\nu-1)\,\delta$ — целое число положительное или нечетное отрицательное. Среди примеров указана формула

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)\rho]^2}{(2n\rho+1)(2n\rho+3)\ldots(2n\rho+4\rho-1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\rho}(2\rho-1)!!,$$

обобщающая формулу Валлиса. Г. И. Дринфельд

3105. О сходимости рядов абсолютно непрерывных функций. Анастассиадис (Sur la convergence des séries de fonctions absolument continues. Anastassiadis Jean), Bull. sci. math., 1954, 78, novembre — décembre, 234—240 (франц.)

Пусть дан ряд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$, состоящий из функций, абсолютно непрерывных в промежутке $I=[a,\ b]$. Если этот ряд сходится при $x=a$, а ряд, составленный из полных вариаций его членов, сходится при $x=b$, то сумма ряда тоже будет абсолютно непрерывна в $[a,\ b]$. Доказательство непосредственно приводится к рассмотрению случая когда функции $f_n(x)$ положительны и не убывают.

Примечание референта. Для этого случая утверждение не ново (см., например, де ла Валле — Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, 1933, 1, теорема IV на стр. 75). Г. М. Фихтенгольц

3106. Об одном способе определения областей сходимости двойных степенных рядов. Назмеев Х. С., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, № 10, 181—189

Обобщается признак сходимости Коши для рядов $\sum_{k,l=0}^{\infty}a_{kl}$ с положительными членами. Далее рассматриваются два примера на нахождение областей сходимости двойных степенных рядов, при этом используется полученный обобщенный признак сходимости Коши. В условии (3) не оговорено, что $\gamma\neq 0$, без чего рассуждение теряет смысл. В условии (11) второе равенство лишнее. Имеются опечатки.

Т. И. Краснощекова

3107. Замечание относительно суммирования рядов Фурье методом Нёрлунда. Карамата (Remarque relative à la sommation des séries de Fourier par les procédés de Nörlund. Karamata Jovan), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 126—127 (франц.)

Известна следующая теорема, принадлежащая Хиллу и Тамаркину (Зигмунд. Тригонометрические ряды, § 8, 8). Пусть $p_n\geqslant p_{n+1}\to 0$, $n\to\infty$, $P_n=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\to\infty$, $n\to\infty$. Для того чтобы каждый ряд Фурье $\gamma(f)$ был суммируем методом Нёрлунда $(N,\ P_n)$ (Харди Г., Расходящиеся ряды, 4.1.) к значению $f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu/\nu$ была ограничена при $n\to\infty$.

Автор по поводу этой теоремы замечает, что из ее условий вытекает существование числа $r>0$ такого, что всякий $(C,\ r)$-суммируемый ряд также суммируем $(N,\ P_n)$. И. Е. Жак

3108. О некоторых бесконечных рядах. Бриггс, Човла, Кемпнер, Минтка (On some infinite series. Briggs W. E., Chowla S., Kempner A. J., Mientka W. E.), Scripta math., 1955, 21, № 1, 28—30 (англ.)

Доказываются следующие тождества ($\zeta(x)$ — дзета-функция Римана):

$$\zeta(3)=2^{-1}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}\sigma_n,$$
$$\zeta(3)=\sum_1^{\infty}n^{-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right\},$$
$$\sum_1^{\infty}\frac{(\zeta(2)-\rho_n)}{n}=\sum_1^{\infty}\frac{\sigma_n}{n^2}-\zeta(3),$$

где

$$\sigma_n=\sum_1^{n}k^{-2},\quad \rho_n=\sum_1^{n}k^{-2}.$$

И. И. Огиевецкий

3109. О суммированиях Ингама и Ламберта. Пеннингтон (On Ingham summability and summability by Lambert series. Pennington W. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 65—80 (англ.)

Пусть $k\geqslant 0$, $\chi_k(t)=(k+1)\,t\,\Sigma_{m<1/t}(1-mt)^k$ $(0<t<1)$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$, $\lambda_n\to\infty$. По определению автора, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (a) суммируется методом $(I,\ \lambda_n,\ k)$, если $\Sigma_{\lambda_n<x}a_n\chi_k(\lambda_n/x)$ $(x>0)$ стремится к конечному пределу при $x\to\infty$. Ряд (a) суммируется методом $(L,\ \lambda_n)$, если при каждом $s>0$ ряд $L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n s/(\exp\lambda_n s-1)$ сходится и $L(s)$ стремится к конечному пределу, когда $s\to+0$. Эти методы являются обобщениями известных методов Ингама $(I,\ n,\ 0)$ и Ламберта $(L,\ n)$. Устанавливается следующее. 1) Методы $(L,\ \lambda_n)$ и $(I,\ \lambda_n,\ k)$ при $k>0$ регулярны, в то время как $(I,\ n,\ 0)$ нерегулярен. 2) При $0\leqslant k<k'$ метод $(I,\ \lambda_n,\ k)$ включает $(I,\ \lambda_n,\ k')$. 3) Если ряд (a) суммируется $(I,\ \lambda_n,\ k)$ $(k\geqslant 0)$ к A и при каждом $s>0$ ряд $L(s)$ сходится, то (a) суммируется $(L,\ \lambda_n)$ к A. 4) Если ряд (a) суммируется $(I,\ \lambda_n,\ k)$ $(k\geqslant 0)$, то $\sum_{r=1}^{n}a_r\lambda_r=o\{[\lambda_{n+1}/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)]^k\lambda_n\log\lambda_n\}$, когда $n\to\infty$ и, следовательно, $a_n=o(\{[\lambda_{n+1}/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)]^k+[\lambda_n/(\lambda_n-\lambda_{n-1})]^k\}\times\log\lambda_n)$ при $k>0$ и $a_n=o(\log\lambda_n)$ при $k=0$. При $\lambda_n=n$ последние две оценки усиливаются: $a_n=o(n^k)$ при $k>0$, $a_n=o(\log\log n)$ при $k=0$. В. М. Даревский

3110. Некоторые формулы суммирования биномиальных коэффициентов. Мурти (Some summation formulae for binomial coefficients. Moorty T. Narayana), Math. Gaz., 1955, 39, № 328, 122—125 (англ.)

Выводится несколько тождеств, содержащих биномиальные коэффициенты. Вывод основан на разложении некоторых дробных рациональных функций в ряд и вычислении разными способами коэффициента при одной и той же степени x. В. Д. Подсыпанин

3111. Суммирование некоторых рядов, содержащих F-уравнение. Худзино (Summation of some series containing solutions of the F-equation. Huzino S.), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1954, A8, № 2, 181—186 (англ.)

3112. Свойства Бореля и Банаха методов суммирования. Лоренц (Borel and Banach properties of methods of summation. Lorentz G. G.), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 129—141 (англ.)

Измеримые множества E_1, E_2, ... точек (0, 1) называются независимыми, если $\operatorname{mes}\prod_{k=1}^{n}E_k'=\prod_{k=1}^{n}\operatorname{mes}E_k'$, где каждое E_k' есть или E_k или его дополнение. Вещественные измеримые функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... заданные на (0, 1), независимы, если для любого выбора измеримых множеств A_1, A_2, ... на вещественной оси множества точек x, где $f_n(x)\in A_n$, $n=1, 2, \ldots$, независимы.

Пусть $A=(a_{mn})$ — регулярный метод суммирования. Метод A обладает свойством Банаха, если для любой ортогональной нормальной на (0. 1) системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ почти везде

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\varphi_n(x)=0.$$

Метод A обладает свойством Бореля относительно всех систем равномерно ограниченных независимых на (0, 1) функций $\{r_n(x)\}$, для которых $\int_0^1 r_n(x)\,dx=0$, если всех таких систем почти везде

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}r_n(x)=0.$$

Говорят, что положительная возрастающая функция $\Omega(n)$ от $n=1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty}\Omega(n)=\infty$, есть функция суммируемости второго рода для метода A, и пишут $\Omega(n)\in S_2(A)$, если любая последовательность $\{s_n\}$, для которой $S_n=s_1+s_2+\cdots+s_n=O(\Omega(n))$, суммируема A. Если суммируема A любая последовательность $\{s_n\}$, для которой $S_n=o(\Omega(n))$, то пишут $\Omega(n)\in S_2'(A)$.

Доказывается:

1. Если $\Omega(n)\in S_2'(A)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ сходится, то последовательность $\{\Omega(n)c_n\}$ суммируема A к нулю. Если $\Omega(n)$ такова, что $\{\Omega(n)\}$ c_n суммируема A для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ и $\Delta\Omega(n)=\Omega(n+1)-\Omega(n)=O(1)$, то $\Omega\in S_2'(A)$.

2. $\Omega(n)\in S_2'(A)$ равносильно включению $A\supset R(\lambda_n, 1)$, где $R(\lambda_n, 1)$ — метод Рисса порядка 1,

$$\lambda_n=e^{\mu_n},\ \mu_n=\frac{1}{\Omega^{(1)}}+\frac{1}{\Omega^{(2)}}+\cdots+\frac{1}{\Omega^{(n)}}.$$

3. Если $\Omega(n)\in S_2'(A)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)^{-2}\log^2 n$ сходится, то A обладает свойством Банаха.

4. Если $\log n$ есть функция суммируемости второго рода для A, то A обладает свойством Бореля относительно всех систем равномерно ограниченных независимых на (0,1) функций $\{r_n(x)\}$, для которых $\int_0^1 r_n(x)\,dx=0$.

5. Если существуют последовательности целых положительных чисел $\{m_k\}$, $\{l_k\}$, $\{n_k\}$, $\{N_k\}$ такие, что $m_k\to\infty$, $N_k=n_k+l_k\leqslant n_{k+1}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\delta l_k}=+\infty \text{ для некоторого } \delta>0,$$

$$\sum_{n_k\leqslant n<N_k}|a_{m_k n}|\geqslant q \text{ для некоторого } q>0,$$

то A не обладает свойством Бореля относительно системы функций Радемахера. Даются приложения полученных результатов к методам Абеля, Рисса и Хаусдорфа.

М. Д. Калашников

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3113. Преобразование одного ряда Бесселя. Шотлендер (Über die Transformation einer Reihe nach Besselschen Funktionen. Schottlaender Stefan), Arch. Math., 1955, 6, № 4, 275—280 (нем.)

Выводится следующая формула:

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\delta}J_\nu(y+na)=\frac{(-1)^{1+\frac{(\nu-|\nu|)}{2}}}{a}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(\zeta_k-\sqrt{1+\zeta_k^2})^{|\nu|}}{\sqrt{1+\zeta_k^2}}e^{-y\zeta_k},\qquad(1)$$

где ν — целое, δ, y, a — комплексные числа, причем $\operatorname{Im}(\delta)\geqslant|\operatorname{Im}(a)|$, $0\leqslant y/a\leqslant 1$, $\zeta_k=i\delta/a+2k\pi$, $|\arg\sqrt{1+\zeta_k^2}-\arg\zeta_k|<\frac{\pi}{2}$. Если $\nu=0$, а $y=0$ или a, то к правой части формулы (1) следует прибавить—1/2. Случай, когда y/a — произвольное действительное число, приводится к предыдущему прибавлением или вычитанием конечного числа членов вида $e^{im\delta}J_\nu(y+ma)$, где m — целые числа. Если y/a — комплексное, то ряд в правой части расходится. Если $\operatorname{Im}(\delta)=|\operatorname{Im}(a)|$, то необходимо предположить сходимость ряда в левой части.

Формула (1) выводится из интегрального представления функцией Бесселя

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos t+i\nu\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}dt.$$

Ю. Л. Рабинович

3114. К вопросу о разложении произвольной голоморфной функции по функциям Ломмеля. Мецхваришвили Я. Г., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 11—54 (рез. груз.)

Функциями Ломмеля первого рода и целого положительного порядка k называются целые функции $X_k(z)$ комплексного переменного z, связанные с функциями Бесселя соотношением

$$X_k(z)=z^{\frac{k}{2}}J_k(\sqrt{z})=2^k\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(z/4)^{s+k}}{s!(s+k)!}.\qquad(1)$$

Для разложения произвольной аналитической функции $f(z)$ в ряд по функциям $X_k(z)$ вводится последовательность функций:

$$\overline{S}_k(z)=2^{-k-1}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(k-s-1)!}{s!}\left(\frac{4}{z}\right)^{k-s}\ (k\geqslant 1).\qquad(2)$$

Система функций $X_k(z)$ и $\overline{S}_k(z)$ удовлетворяет следующим условиям ортогональности:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C X_m(z)X_n(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\overline{S}_m(z)\overline{S}_n(z)\,dz=0,\qquad(3)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C X_m(z)\overline{S}_{n+1}(z)\,dz=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq m,\\ 1, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

где C — произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат. Если голоморфная в кольце $\rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_2$ функция $f(z)$ разложена в равномерно сходящийся ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) X_k(\mu z) + B_k(\mu) \overline{S}_{k+1}(\mu z)], \quad (4)$$

где μ произвольный параметр, то из соотношений (3) следует:

$$A_k(\mu) = \frac{\mu}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f(t) \overline{S}_{k+1}(\mu t)\, dt; \quad (5)$$

$$B_k(\mu) = \frac{\mu}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f(t) X_k(\mu t)\, dt, \text{ где } \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2.$$

При этом

$$A_k(\mu) X_k(\mu z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^s (k-h)!}{s!\, h!\, (k+s)!} \times$$

$$\times z^{s+k} \left(\frac{\mu}{4}\right)^{s+h} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} t^{h-k-1} f(t)\, dt, \quad (6)$$

$$B_k(\mu) \overline{S}_{k+1}(\mu z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^s (k-h)!}{s!\, h!\, (k+s)!} \times$$

$$\times z^{h-k-1} \left(\frac{\mu}{4}\right)^{s+h} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} t^{s+k} f(t)\, dt.$$

Теорема. Голоморфная в кольце $\rho_1 < |z| < \rho_2$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) X_k(\mu z) + B_k(\mu) \overline{S}_{k+1}(\mu z)],$$

коэффициенты которого выражаются формулами (5). Наряду с функциями X_k и $\overline{S}_{k+1}$ рассматриваются функции

$$\overline{X}_k(z) = z^{-\frac{k}{2}} J_k(\sqrt{z}),\ Y_k(z) = z^{\frac{k}{2}} M_k(\sqrt{z}),$$

$$\overline{Y}_k(z) = z^{-\frac{k}{2}} M_k(\sqrt{z}),$$ где функция M_k связана с функцией Неймана N соотношением

$$M_k(z) = N_k(z) - \frac{2}{\pi} J_k(z) \ln z,$$

а также вспомогательные функции:

$$S_k(z) = 2^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(k-s-1)!}{s!} \left(\frac{z}{4}\right)^s,$$

$$E_k(z) = 2^k \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{z}{4}\right)^{s+k}}{s!\,(s+k)!} \varphi_{sk},$$

$$\overline{E}_k(z) = 2^{-k} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{z}{4}\right)^s}{s!\,(s+k)!} \varphi_{sk},$$

где $\varphi_{sk} = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{p} + \sum_{\nu=1}^{s+k} \frac{1}{p}$. Функции $S_k(z)$ и $\overline{S}_k(z)$ связаны с остальными рассматриваемыми функциями соотношениями

$$S_k(z) = \left(C + \ln \frac{1}{2}\right) X_k(z) - \frac{\pi}{2} Y_k(z) - \frac{1}{2} E_k(z),$$

$$\overline{S}_k(z) = \left(C + \ln \frac{1}{2}\right) \overline{X}_k(z) - \frac{\pi}{2} \overline{Y}_k(z) - \frac{1}{2} \overline{E}_k(z),$$

где C — постоянная Эйлера, причем имеет место следующее тождество:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{[\overline{E}_k(t) + 2S_k(t)] \overline{X}_{k+1}(z) - \overline{E}_{k+1}(t) \overline{X}_k(z)\} = 0.$$

Ю. Л. Рабинович

3115. Ряды произведений полиномов Гегенбауера. Брафман (Series of products of Gegenbauer polynomials. Brafman Fred), Math. Z., 1955, 62, № 4, 438—442 (англ.)

Доказывается формула

$$\frac{\alpha \{\Gamma(\alpha)\}^4 [(1-x^2)(1-y^2)] (1-z^2)^{\alpha-1/2}}{[\Gamma(2\alpha)]^2 \pi 2^{2-4\alpha}} \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! n! (1+\alpha)_n C_n^{(\alpha)}(x) C_n^{(\alpha)}(y) C_n^{(\alpha)}(z)}{(2\alpha)_n (2\alpha)_n (\alpha)_n} =$$

$$\begin{cases} g^{\alpha-1}, & g > 0 \\ 0, & g < 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

$g(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$, $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$, $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \ldots (a+n-1)$, где $C_n^{(\alpha)}(x)$ — полином Гегенбауера.

Н. С. Кошляков

3116. Некоторые формулы для присоединенных функций Лежандра первого рода. Рагаб (Some formulae for the associated Legendre functions of the first kind. Ragab F. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 538—540 (англ.)

Приводится формула

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{l-1} T_n^{-m}(\cos\theta)\, E(p; \alpha_r : q; \rho_s : x/\sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n\right)} \times$$

$$\times E\left(\begin{matrix} \alpha_1 \ldots \alpha_p, \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}m : x \\ \rho_1 \ldots \rho_q, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}n \end{matrix}\right), \quad (1)$$

$$R(l+m) > 0 \quad |\operatorname{amp} x| < \pi,$$

где

$$T_n^{-m}(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma(m+1)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} m-n, m+n+1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ m+1 \end{matrix}\right)$$

и

$$E(p, \alpha_r : q; \rho_s : x) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \ldots \Gamma(\rho_q)} \times$$

$$\times {}_pF_q\left(p; \alpha_r : q; \rho_s : -\frac{1}{x}\right).$$

Формула (1) доказывается для частного случая $p=q=0$ путем разложения $\exp(-\sin^2\theta/x)$ в ряд и применения основных соотношений обобщенных гипергеометрических функций и затем делается указание, что аналогичным образом доказывается общий случай (1).

В заключение рассматривается частный случай (1), когда $p=2$, $q=0$, $\alpha_1 = 1/2 + \nu$, $\alpha_2 = 1/2 - \nu$; тогда при $R(l+m) > 0$ и $x > 0$:

$$\int_0^{\pi} \exp(x/\sin^2\theta) (\sin\theta)^{l-2} T_n^{-m}(\cos\theta) K_{\nu}(x/\sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi \cos \pi\nu}{2^m \sqrt{2\pi x}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n\right)} \times$$

$$\times E\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}l-\frac{1}{2}m : 2x \\ \frac{1}{2}(l+n+1),\ \frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n\end{matrix}\right),$$

где $K_\nu(x)$ — известная функция Макдональда.

Н. С. Кошляков

3117. Об одной предельной формуле, связывающей гипергеометрическую функцию Куммера с функцией параболического цилиндра. Тоскано (Su una formula limite tra funzioni ipergeometriche di Kummer e funzioni del cilindro parabolico. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 239—243 (итал.)

Указывается предельная формула

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+h+\nu+1)}{\alpha^{\nu/2}\Gamma(\alpha+h+1)}\, {}_1F_1\left(-\nu;\alpha+h+1;\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right) =$$

$$= e^{\frac{(x-t)^2}{4}} D_\nu(x-t), \qquad (1)$$

где $D_\nu(x)$ обозначает функцию параболического цилиндра, выражающуюся через гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ посредством равенства

$$D_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} 2^{\frac{(\nu-1)}{2}} e^{-\frac{x^4}{4}}\, {}_1F_1\left(\frac{(1-\nu)}{2};\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right).$$

Рассматриваются различные частные случаи формулы (1), когда гипергеометрическая функция вырождается в полиномы Лагерра, Эрмита, например

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} L_n^{(\alpha+h)}\left(\alpha\frac{\sqrt{\alpha}-x}{\sqrt{\alpha}-t}\right) = \frac{1}{n!} H_n(x-t) \text{ и т. п.}$$

Н. С. Кошляков

3118. Общие интегралы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют полиномы, являющиеся обобщениями классических полиномов, и присоединенные им функции. Палама (Integrali generali delle equazioni differenziali cui soddisfano polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 201—207 (итал.)

Сначала рассматривается задача для полиномов Эрмита $H_n(x)$ и присоединенных функций $G_n(x)$. Вводятся обобщенные полиномы Эрмита $H^{n,p}(x)$, удовлетворяющие соотношениям

$$H_{n+p}(x) = H^{n,p}(x) H_n(x) - nH^{n+1,p-1}(x) H_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} H^{n,p-1}(x) = H^{n-1,p}(x) - H^{n,p}(x),$$

и доказывается, что дифференциальные уравнения

$$z'' + xz' + (n+1)z = 2nH_{n-1}(x),$$

$$u'' - xu' + (p+3)u = 4H^{3,p-1}(x),$$

$$x^2v'' + x(x^2-2)v' + [(p+1)x^2+2]v =$$

$$= 2p[xH_p(x) + H_{p-1}(x)]$$

имеют общие интегралы

$$z = Ae^{-x^2/2}H_n(x) + Be^{-x^2/2}h_n(x) + G_{n-1}(x),$$

$$u = AH_{p+3}(x) + Bh_{p+3}(x) + H^{2,p-1}(x),$$

$$v = Ae^{-x^2/2}xH_{p+1}(x) + Be^{-x^2/2}xh_{p+1}(x) + H^{2,p-1}(x),$$

где $h_n(x)$ означает функцию Эрмита 2-го рода. Затем исследуется аналогичная задача для полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ и присоединенных полиномов $P^{\alpha,p}(x)$.

Н. С. Кошляков

3119. О нулях некоторых трансцендентных функций, связанных с функциями Ханкеля. Ч. I, II. Нагасе (On the zeros of certain transcendental functions related to Hankel functions. Parts I, II. Nagase Masahumi), J. Phys. Soc. Japan, 1954, **9**, № 5, 826—853 (англ.)

Исследуются корни трансцендентных уравнений, содержащих функции Ханкеля и их производные. Часть I посвящена изучению распределения нулей функции

$$f_1(\nu) = \varphi_1(\nu^2, a) H_\nu^{(2)}(a) + \varphi_2(\nu^2, a) dH_\nu^{(2)}(a)/da,$$

где $\varphi_i(\nu^2, a)$ — заданные функции, удовлетворяющие некоторым общим условиям, a — вещественное положительное число. Основываясь на асимптотических формулах для функций Ханкеля, автор устанавливает распределение нулей $f_1(\nu)$ на плоскости комплексной переменной и дает метод для их фактического вычисления. Часть II содержит аналогичное исследование для функции

$$f_2(\nu) = \varphi_1(\nu^2, a, m) H_\nu^{(2)}(a) H_\nu^{(2)}(ma) +$$

$$+ \varphi_2(\nu^2, a, m) dH_\nu^{(2)}(a)/da\, H_\nu^{(2)}(ma) +$$

$$+ \varphi_3(\nu^2, a, m) H_\nu^{(2)}(a) dH_\nu^{(2)}(ma)/d(ma) +$$

$$+ \varphi_4(\nu^2, a, m) dH_\nu^{(2)}(a)/da \cdot dH_\nu^{(2)}(ma)/d(ma),$$

m — заданное положительное число.

Методы, развитые в I и II частях, могут быть использованы для исследования трансцендентных уравнений, встречающихся в некоторых задачах математической физики. В частности рассматривается уравнение

$$dH_\nu^{(2)}(a)/da + (n/a) H_\nu^{(2)}(a) = 0$$

(n — вещественная постоянная), для вычисления корней которого автор приводит формулу

$$\nu = a[1 + 1/2(3\rho/a)^{2/3} e^{\frac{5\pi i}{3}} + (1/120 - (5n-1)/45\rho^2) \times$$

$$\times (3\rho/a)^{4/3} e^{\frac{4\pi i}{3}} + \ldots],$$

где ρ — последовательные корни уравнения $H_{1/3}^{(2)}(\rho e^{i\pi}) = 0$.

Н. Н. Лебедев

3120. К вопросу о построении функций Ламе. Иваненко (До питання про побудову функцій Ляме. Іваненко В. В.), Наукові зап. Київськ. держ. пед. ін-ту, 1954, **16**, фіз.-матем. сер., № 5, 21—39 (укр.)

Рассматривается задача: найти полиноминальные решения уравнения Ламе:

$$y'' = [n(n+1)p(x) + B]\,y, \qquad (A)$$

имеющие вид

$$y = P[p(x)], \qquad (1)$$

$$y = P[p(x)]\sqrt{p(x) - l_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \qquad (2)$$

$$y = P[p(x)]\sqrt{[p(x) - l_\beta][p(x) + l_\gamma]},\ \beta,\gamma = 1,2,3,\beta \neq \gamma \qquad (3)$$

$$y = P[p(x)]\sqrt{[p(x) - l_1][p(x) - l_2][p(x) - l_3]}, \qquad (4)$$

где $p(x)$ означает вейерштрасову функцию, а параметр B удовлетворяет определенному алгебраическому уравнению. Решение пишется в форме ряда, расположенного по функциям $p^{(n-j)}$ $(j = 2, 4, 6, \ldots)$ с неопределенными коэффициентами, которые находятся с помощью основных формул теории эллиптических функций из системы алгебраических линейных уравнений.

Применяя этод метод к разысканию функций Ламе первого рода (1) (или в силу известного равенства $p'(x) = 2\sqrt{[p(x) - l_1][p(x) - l_2][p(x) - l_3]}$ — функций Ламе четвертого рода (4)), получим полиномы Ламе первого рода: $n = 2$, $y = p(x) - \frac{1}{6}B$; $n = 3$, $y = p'(x)$; $n = 4$, $y = 6p^2(x) - \frac{3}{7}Bp(x) + \frac{3}{140}(B^2 + 52g_2)$ и т. д.

Для нахождения функций Ламе второго рода (2) при нечетном n сначала преобразовывают уравнение (A) к алгебраической форме с помощью подстановки

$$y = z\sqrt{p(x) - l_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

и к преобразованному уравнению применяют схожий способ.

Таким способом строят полиномы Ламе второго рода:

$$n = 1,\ z = 1; \quad n = 3,\ z = p(x) + \frac{1}{2}l_\alpha - \frac{1}{10}B;$$

$$n = 5,\ z = 6p^2(x) - \frac{1}{3}(B - 3l_\alpha)p(x) + \frac{1}{84}B^2 - \frac{1}{6}l_\alpha B - \frac{15}{14}g_2 - \frac{9}{4}l_\alpha^2 \text{ и т. д.}$$

Аналогичным образом строятся функции Ламе третьего рода (3) при четном n: $n = 2$, $z = 1$,

$$n = 4,\ z = p(x) - \frac{1}{2}l_\alpha - \frac{1}{14}B, \text{ и т. д.}$$

В заключение разбираются виды полиномов Ламе для некоторых частных заданий инвариантов.

Н. С. Кошляков

3121. О представлении сфероидных функций. Хубер (Zur Darstellung der Sphäroidfunktionen. Huber A.), Anz. Österr. Akad. Wiss. math.-naturwiss. Kl., 1954, **91**, № 1—15, 4—7 (нем.)

Для вычисления присоединенной функции Лежандра $\mathfrak{P}_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)$ при больших значениях $|\nu|$ применяются гипергеометрические ряды, расположенные по степеням $\frac{1}{1 - e^{2\alpha}}$, где $\alpha > \frac{1}{2}\ln 2$ (Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin, 1943, S. 73). При меньших значениях α функция $\mathfrak{P}_\nu^\mu(\operatorname{ch}_\alpha)$ может быть вычислена с помощью гипергеометрического ряда по степеням $\frac{1}{2}(1 - \operatorname{ch}\alpha)$, который практически непригоден при больших значениях $|\nu|$. Цель настоящей работы — построить в частном случае сфероидной функции $\mathfrak{P}_{i\lambda - 1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$ сходящееся разложение, свободное от указанных выше недостатков (сфероидными функциями здесь называются функции Лежандра $\mathfrak{P}_\nu(z)$, у которых $\nu = i\lambda - 1/2$, $z = \operatorname{ch}\alpha$. В случае $z = \cos\alpha$ эти функции известны как функции конуса).

Пользуясь интегральным представлением для этой функции, автор получает для нее ряд вида:

$$\mathfrak{P}_{i\lambda - \frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\operatorname{sh}\alpha}}\left[C_0 + \frac{1}{4}C_2\operatorname{cth}\alpha + C_4\left(\frac{3}{32}\operatorname{cth}^3\alpha - \frac{1}{12}\right) + C_6\left(\frac{5}{128}\operatorname{cth}^3\alpha - \frac{1}{24}\operatorname{cth}\alpha\right) + C_8\left(\frac{35}{2048}\operatorname{cth}^4\alpha - \frac{3}{128}\operatorname{cth}^2\alpha + \frac{1}{160}\right) + C_{10}\left(\frac{63}{8192}\operatorname{cth}^5\alpha - \frac{5}{384}\operatorname{cth}^3\alpha + \frac{31}{5760}\operatorname{cth}\alpha\right) + \ldots\right]. \qquad (1)$$

При этом величины C_{2k} представляются интегралами

$$C_{2k}(\lambda, \alpha) = \int_0^{\sqrt{\alpha}} \tau^{2k}\cos\lambda(\alpha - \tau^2)\,d\tau,$$

которые приводятся к протабулированным интегралам Френеля.

Ряд (1) может быть применен для вычислительных целей как при больших значениях λ, так и при малых значениях α.

М. Б. Капилевич

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3122. Преобразование Лежандра и теорема Палея — Винера. Хёрмандер (La transformation de Legendre et le théorème de Paley — Wiener. Hörmander Lars), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 4, 392—395 (франц.)

Пусть E — конечномерное линейное пространство и E' — сопряженное пространство; пусть далее F — подпространство в E и $F' \subset E'$ — его ортогональное дополнение, $R = E/F$, $R' = E'/F'$. Каноническое отображение $E \to R$ и $E' \to R'$ обозначается соответственно $x \to \dot{x}$, и $\xi \to \dot{\xi}$. Для заданной функции $u(x)$ в E полагаем

$$\tilde{u}(\xi) = \sup_{r \in R'}[\inf_{\dot{x} = r}\{(x, \xi) - u(x)\}];$$

аналогично, для заданной функции $v(\xi)$ в E' полагаем

$$\tilde{v}(x) = \inf_{\rho \in R'}[\sup_{\dot{\xi} = \rho}\{(x, \xi) - v(\xi)\}].$$

Утверждается, что $\tilde{\tilde{u}} = u$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: А) $u(x)$ вогнута и полунепрерывна сверху для всех x с любым фиксированным $\dot{x} \in R$; В) $\inf_{\dot{x} = r}\{(x, \xi) - u(x)\}$ при фиксированном ξ вогнутая и полунепрерывная функция от r.

В частности, пусть $E = C^n$ — n-мерное комплексное пространство и $F = R^n$ — его вещественное подпространство. Если $u(x + iy)$ удовлетворяет условиям А)—В), полагаем $W(y, \eta) = \sup_x(u(x + iy) - (x, \eta))$; тогда

$$u(z) = \inf_\eta\{W(y, \eta) + (x, \eta)\},\ \tilde{u}(\xi) = -\inf_v\{W(y, \eta) - (y, \xi)\},$$

$$W(y, \eta) = \sup_x\{u(x + iy) - (x, \eta)\} = \sup_\xi\{\tilde{u}(\xi + i\eta) + (y, \xi)\}.$$

Пусть S_n — класс всех функций $f(z)$, определенных для $u(z)<\infty$, бесконечно дифференцируемых по x, аналитических по y и удовлетворяющих неравенствам

$$|P(z)\,Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(z)|\leqslant Ce^{u(x+iy)}\ (P,\ Q\text{ — многочлены}).$$

Преобразование Лапласа $\hat{f}(\xi)+\int f(z)\,e^{i(\xi,z)}dx$, определенное для $-\tilde{u}(\xi)<\infty$, устанавливает топологический изоморфизм классов S_u и $S_{-\tilde{u}}$. Как указывает автор, из этой теоремы можно получить теоремы двойственности И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (РЖМат, 1955, 3291). Доказательства отсутствуют. Г. Е. Шилов

3123. Одна теорема, касающаяся асимптотического поведения ганкелевского преобразования. Гриффит (A theorem concerning the asymptotic behaviour of Hankel transforms. Griffith J. L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1955, 88, № 3, 61—65 (англ.)

Доказывается теорема: Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: $x^{\frac{1}{2}}f(x)\to 0$, когда $x\to\infty$, $x^{\frac{1}{2}-a}F'(x)$ абсолютно интегрируема в интервале $0<\eta\leqslant x\leqslant\infty$ при любом η; $F(x)\equiv x^af(x)$ абсолютно непрерывна в интервале $0<x<\infty$; $\frac{1}{2}<a<2+\nu$; то

$$\lim_{u\to\infty}\{u^{2-a}f(u)\}=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}a+1\right)}{2a-1\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}a\right)}\lim_{x\to 0+}\{x^af_a(x)\},$$

где $f(u)=\int_0^\infty xJ_\nu(ux)f(x)\,dx$, $J_\nu(x)$ означает бесселеву функцию первого рода.

Из формулы обращения Ганкеля и асимптотического поведения функция $J_\nu(x)$ при больших x следует, что в условиях теоремы

$$u^{2-a}f(u)=F(0)\,Z(0)=\int_0^\infty Z(ux)\,F'(x)\,dx.$$

где $Z(x)\int_x^\infty t^{1-a}J_\nu(t)\,dt$.

Затем доказывается, что $\lim_{u\to\infty}\int_0^\infty Z(ux)\,F'(x)\,dx=0$, откуда и вытекает теорема. Теорема затем обобщается на случай, когда $f(x)$ допускает конечный разрыв непрерывности в точке $x=x_0$. Н. С. Кошляков

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3124. Вычисление угловых распределений с одним максимумом из разложений по полиномам Лежандра с приложением к рассеянию заряженных частиц. Спенсер (Calculation of peaked angular distributions from Legendre polynomial expansions and an application to the multiple scattering of charged particles. Spencer L. V.), Physical Rev., 1953, 50, № 1, 146—150 (англ.)

Для ряда $G(\vartheta)=\Sigma_{l=0}^\infty g_lP_l(\cos\vartheta)$, где $g_l=g\left(l+\frac{1}{2}\right)$ — нечетная функция, непрерывная на всей оси, выводится формула

$$G(\vartheta)=\sqrt{2}\int_0^{2\pi-\vartheta}d\varphi\,(\cos\vartheta-\cos\varphi)^{-1/2},$$
$$\Sigma_{m=0}^\infty(-1)^mR(\varphi+2\pi m),$$

причем

$$R(r)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty d(l+1)\sin[(l+1/2)r]\,g(l+1/2),$$

Этот результат применяется к задаче о рассеянии заряженных частиц. В. И. Левин

3125. Общая теория интегральных преобразований. Современная теория электромагнитного поля. Колино (General theory of integral transforms. Teoria moderna de los campos electromagneticos. Colino Antonio), Rev. telecomun., 1955, 9, № 39—40, 2—30 (англ., исп.)

Статья является первой главой работы автора по теории электромагнитного поля, цель ее — познакомить читателя с некоторыми методами математической физики. Вначале излагаются основные понятия граничной задачи Штурма — Луивилля и рассматриваются конкретные примеры. Сводка некоторых основных свойств спектра собственных значений дается в первом добавлении. Потом на некоторых конкретных примерах показывается метод решения уравнений математической физики при помощи общих интегральных преобразований. Этот метод по существу мало отличается от обычного метода разделения переменных. В добавлениях автор познакомит читателя с преобразованиями Лапласа и Фурье и некоторыми методами для асимптотического представления функций. Для решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка приводятся метод БКВ и метод эталонных уравнений (или метод Лангера), а для определенных интегралов — метод перевала. Последний иллюстрируется примерами. Находятся асимптотические представления функций Ганкеля и интегралов Эйри. Э. Я. Риекстыньш

3126. Импульсная функция в теории электрических цепей. Рид, Сешу (The impulse function in electrical network theory. Reed Myril B., Seshu Sundaram), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, 10, 310—313 (англ.)

Указывается, что рассмотрение δ-функции в качестве обыкновенной необобщенной функции приводит к целому ряду противоречий. Для избежания этих противоречий предлагается, вместо обычных уравнений Кирхгофа, выражающих равенства между токами, брать за основу соответствующие уравнения между зарядами, подтверждаемые опытом. Н. А. Бразма

3127. Обобщение задачи Бруна о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вакка (Su un problema più generale di quello di De Brun per il moto un corpo rigido intorno a un punto fisso. Vacca Maria Teresa), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 1, 52—58 (итал.)

Рассматриваемое обобщение задачи Бруна (см. Appell P., Traité de Mécanique Rationnelle. Gauthier-Villars, Paris, 1953, 2, гл. 25, 499) приводит, в силу динамических уравнений Эйлера, к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$Adp/dt-(B-C)\,qr=\beta\gamma(R-Q),$$
$$Bdq/dt-(C-A)\,rp=\gamma\alpha(P-R),$$
$$Cdr/dt-(A-B)\,pq=\alpha\beta(Q-P),$$

где A, B, C, P, Q, R — вполне определенные постоянные (первые три — моменты инерции, а последние определяют момент действующей силы). К динамическим уравнениям присоединяются известные кинематические уравнения. В общем случае уравнения задачи допу-

скают три интеграла:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad Ap\alpha+Bq\beta+Cr\gamma=k_1,$$
$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+P\alpha^2+Q\beta^2+R\gamma^2=h.$$

Если параметры удовлетворяют условию $A(P-Q)+B(P-R)+C(Q-P)=0$, то существует четвертый алгебраический интеграл

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2+{}^1/_3(L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2)=k_2,$$

где L, M, N известным образом выражаются через основные параметры. Затем автор рассматривает задачу при помощи углов Эйлера. Составлена каноническая система и построено уравнение Гамильтона-Якоби, которое упрощается на основании найденных интегралов. И. С. Аржаных

3128. Свойства импульсных характеристик и функций Грина. Миллер (Properties of impulsive responses and Green's functions. Miller K. S.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 26—31 (англ.)

Рассматриваются свойства и взаимные соотношения некоторых функций, характеризующих линейные переменные во времени цепи. Пусть будут $u(t)$ и $v(t)$ функции, выражающие входное, соответственно выходное напряжение цепи (или же какие-либо другие величины, характеризующие процесс на входе и выходе цепи), а $p=d/dt$ — оператор дифференцирования. Предполагается, что передаточная функция $H(p, t)$ в операторном равенстве

$$v(t)=H(p, t)u(t) \tag{1}$$

имеет вид

$$H(p, t)=\frac{a_0(t)p^m+a_1(t)p^{m-1}+\ldots+a_m(t)}{b_0(t)p^n+b_1(t)p^{n-1}+\ldots+b_n(t)}, \tag{2}$$

причем t следует рассмотреть в выражении (2) как параметр при воздействии оператора $H(p, t)$ на функцию $u(t)$. Такая передаточная функция, соответствующая линейной переменной во времени цепи, рассматривается при отсутствии начального возбуждения. В исследовании автор опирается на работы Заде (Zadeh L., Proc. I. R. E., 1950, 38, March, 291—299, и др.)

Следующей функцией, характеризующей цепь, является импульсная характеристика $W(t, \lambda)$, которая равна выходному напряжению $v(t)$ в случае, если входное напряжение представляется импульсной δ-функцией: $u(t)=\delta(t-\lambda)$. Таким образом имеем

$$W(t, \lambda)=H(p, t)\,\delta(t-\lambda). \tag{3}$$

Используя преобразование Фурье, автор получает из (3) взаимно однозначную связь между функциями $H(p, t)$ и $W(t, \lambda)$:

$$W(t, \lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega, t)\,e^{j\omega(t-\lambda)}d\omega,$$
$$H(j\omega, t)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t, \lambda)\,e^{j\omega(\lambda-t)}d\lambda.$$

Затем получена формула, выражающая соотношение между $u(t)$ и $v(t)$ посредством функции $W(t, \lambda)$. В предположениях $W(t, \lambda)=0$ при $\lambda>t$ и $u(\lambda)=0$ при $\lambda<0$, которые естественны при учете физического смысла, это соотношение принимает вид

$$v(t)=\int_0^t W(t, \lambda)\,u(\lambda)\,d\lambda. \tag{4}$$

В частном случае цепи с постоянными элементами, которой соответствует передаточная функция вида $H(p)$ и импульсная характеристика $W(t-\lambda)$, равенство (4) легко получается после преобразования Лапласа равенства (1) и последующего применения свертки.

Далее функцией, применимой для характеризования цепи, является так называемая односторонняя функция Грина $K(t, x)$ линейного дифференциального оператора

$$L=b_0(t)p^n+b_1(t)p^{n-1}+\ldots+b_n(t)$$

(Miller K., J. Appl. Phys., 1951, 22, 1054—1057). Эта функция определяется выражением

$$K(j, x)=\frac{(-1)^{n-1}}{b_0(x)W(x)}\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(x)\end{vmatrix},$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — система линейно независимых решений уравнения $Lv=0$, а $W(x)$ является определителем Вронского той же системы решений.

Решение уравнения $Lv(t)=w(t)$ при данной функции $w(t)$ и начальных условиях

$$v^{(\alpha)}(0)=0,\quad \alpha=0, 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

выражается посредством функции $K(t, x)$ так: $v(t)=\int_0^t K(t, x)\,w(x)\,dx$. Введем еще оператор $N=a_0(t)p^m+a_1(t)p^{m-1}+\ldots+a_m(t)$. Тогда уравнение (1) принимает вид: $Lv(t)=Nu(t)$, и при условиях (5) оно имеет решение

$$v(t)=\int_0^t K(t, x)\,Nu(x)\,dx. \tag{6}$$

Сравнивая равенства (4) с (6), в частном случае $N=1$, автор получает $W(t, \lambda)=K(t, \lambda)$ при $t>\lambda$.

Функция $K(t, x)$ обладает свойствами, напоминающими свойства обычной, двухсторонней функции Грина. Среди них укажем лишь следующие:

$$\left.\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}K(t, x)\right|_{t=x}=0 \quad \text{при } \alpha=0, 1, \ldots, n-2;$$
$$\left.\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}K(t, x)\right|_{t=x}=\frac{1}{b_0(x)};\quad L_tK(t, x)=0.$$

Далее рассматривается односторонняя функция Грина сопряженного дифференциального оператора, а также и связь между односторонней и двухсторонней функциями Грина одного и того же дифференциального оператора. Дана физическая интерпретация импульсной характеристики как весовой функции. Н. А. Бразма

3129. Заметка о монотонности sn (tK). Иордан (Eine Bemerkung über die Monotonie von sn (tK). Jordan Henri), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 185—187 (нем.)

Доказывается, что при фиксированном t, $0<t<1$, эллиптическая функция $\mathrm{sn}(tK(k), k)$ монотонно возрастает при возрастании k от 0 до 1. Здесь k и K имеют обычное значение. При доказательстве автор исходит из якобиева понятия амплитуды. Г. А. Ломадзе

3130. Об одной вариационной задаче динамики материальной точки. Турковский В. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), **16**, 216—228

См. также: 2682 К, 2698, 2739, 2740, 2862, 2865, 2904, 2965, 2999, 3063 К, 3135, 3140, 3159

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3131. Относительно норм векторного пространства. Кэлугэряну Г., Наука в Рум. Нар. Респ., 1953, 2, 20—24

Рассматривая понятие нормы в векторном пространстве X, автор ставит вопрос: сколько норм может быть в X и как можно их построить? На стр. 23 есть ошибка: выражение в строке 17 сверху не может стремиться к пределу при комплексном $\varepsilon \to 0$.

З. Л. Лейбензон

3132. О симметричности в выпуклых топологических векторных пространствах. Уорнер, Блэр (On symmetry in convex topological vector spaces. Warner Seth, Blair Alexander), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 301—304 (англ.)

Пусть E — локально выпуклое пространство, Σ — покрывающее его семейство ограниченных множеств и E'_Σ — сопряженное к E пространство с Σ-топологией (РЖМат, 1955, 2760). E называется Σ-симметричным, если сильная топология в E'_Σ индуцирует на E его исходную топологию. Внутренняя характеристика Σ-симметричности: каждое замкнутое выпуклое множество в E, поглощающее все множества из Σ, есть окрестность нуля. Если Σ — совокупность всех ограниченных множеств из E, то E называют просто симметричным (или также квази-t-пространством). Если Σ составлено из одноточечных множеств, то E есть t-пространство. На Σ-симметричные пространства обобщается ряд свойств t-пространств, в том числе теорема Банаха — Штейнхауса. Указан весьма простой пример полурефлексивного пространства, обладающего относительно сильной топологией (т. е. сильнейшей из локально выпуклых топологий, порождающих то же сопряженное пространство), но не являющегося ни симметричным, ни ограниченно замкнутым (сопряженное к нерефлексивному банахову пространству, взятое с относительно сильной топологией).

Д. А. Райков

3133. Пространство стягиваемых в точку отображений в окружность. Эйзенстадт (The space of point homotopic maps into the circle. Eisenstadt B. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 1, 62—85 (англ.)

Исследуется пространство $R_{2q}(X)$ стягиваемых в точку непрерывных отображений топологического пространства X в группу R_{2q} действительных чисел, приведенных по модулю $2q$; $R_{2q}(X)$ есть коммутативная группа с естественно определяемой инвариантной метрикой. Дается характеристика коммутативных групп с инвариантной метрикой, представимых, в точно определяемом смысле, в виде $R_{2q}(X)$ со связным бикомпактным X. Доказывается, что если X бикомпактно, то его топология однозначно определяется метрико-групповыми свойствами $R_{2q}(X)$. Попутно дается новая характеристика банаховых пространств, изометрически изоморфных пространству $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на каком-либо бикомпактном X.

Д. А. Райков

3134. Обобщение одной теоремы Йордана и Нёймана. Блументал (An extension of a theorem of Jordan and von Neumann. Blumenthal Leonard M.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 2, 161—167 (англ.)

Для того чтобы вещественное банахово пространство E было обобщенным евклидовым, т. е. чтобы все конечномерные подпространства пространства E были евклидовыми, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\|p_1 + p_2\|^2 + \|p_1 - p_2\|^2 = 2\,[\|p_1\|^2 + \|p_2\|^2]$$
$$(p_1, p_2 \in E).$$

Этот результат переносится на класс полных, выпуклых, внешне-выпуклых метрических пространств, для которых доказывается теорема: для того чтобы пространство указанного типа было обобщенным евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы каждые четыре точки p, q, r, s этого пространства такие, что q находится в середине отрезка pr, можно было конгруэнтно погрузить в евклидову плоскость.

По поводу терминологии см. книгу автора (РЖМат, 1954, 4577).

Г. П. Акилов

3135. Обобщение теорем о конечных приращениях на случай пространства Банаха и применение к обобщению теоремы Лопиталя. Важевский (Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach et application à la généralisation du théorème de l'Hôpital. Ważewski T.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1951 (1954), **24**, № 2, 132—147 (франц.)

Пусть $f(t)$ — функция, действительная, строго монотонная и непрерывная в $[a, b]$, а $\Phi(t)$ — функция со значениями, принадлежащими к некоторому пространству Банаха, непрерывная в $[a, b]$. Если функции f и Φ дифференцируемы в (a, b), то отношение

$$[\Phi(b) - \Phi(a)] / [f(b) - f(a)] \qquad (1)$$

принадлежит выпуклому множеству V, содержащему все точки $\Phi'(t) / f'(t)$, где $t \in (a, b)$. В частном случае, когда функция $\Phi(t)$ действительная, мы имеем дело с классической формулой конечных приращений, следствием которой является теорема Лопиталя.

Автор приводит несколько обобщений теоремы об отношении (1). В частности, он заменяет условие $\Phi'(t) / f'(t) \in V$ более слабым условием, чтобы правосторонняя контингенциальная (в смысле Булигана) производная принадлежала к V почти в каждой точке рассматриваемого интервала переменной t, или еще более слабым требованием, заменяя контингенциальную производную более общим понятием дифференциального конца (bout différentiel), введенным автором ранее (Bull. Acad. polon. sci. et lettr., 1949, ser. A, 183—185; в этой работе понятие, о котором идет речь, называется «somas différentiels»). Из приведенных теорем выводятся соответственные обобщения теоремы Лопиталя.

J. Mikusiński

3136. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Кристеску (Introducere în teoria spaţiilor semiordonate. Cristescu Romulus), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 12, 527—537 (рум.)

Определение и примеры K-пространств и понятие предела в них.

З. Л. Лейбензон

3137. К теории *KB*-линеалов. Зингер (Contribuţii la teoria *KB*-linealelor. Singer Ivan), Studii şi cercetări mat., 1955, **6**, № 1—2, 79—134 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются пространства E, являющиеся KB-линеалами (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950). Множество $\mathscr{F}$ функционалов f с $\|f\| = 1$ называется нормированным положительно тотальным, если из соотношения $f(x) \geqslant 0$ при всех $f \in \mathscr{F}$ следует $x \geqslant 0$. Пространство E

естественным образом изоморфно отображается в пространство C ($\mathscr{T}$) всех непрерывных функций на $\mathscr{T}$. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы это отображение было изометричным. Автор показывает ряд преимуществ отображений с помощью нормированных положительно тотальных множеств по сравнению с теми, которые были рассмотрены М. Г. Крейном и референтом (Матем. сб., 1943, 13(55), 1—38) и Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, 42, 994—1025). Вводятся понятия единицы и квазиединицы, показывается их единственность, изучаются свойства пространств, содержащих их. Дается классификация KB-линеалов в связи с наличием или отсутствием в них единиц в различных смыслах.

С. Г. Крейн

3138. О сужениях операторов. Уэрмер (On restrictions of operators. Wermer John), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 860—865 (англ.)

Рассматривается линейный ограниченный оператор τ, действующий в банаховом пространстве B и имеющий обратный. Пусть $C \subset B$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно τ, причем $\tau^{-1}(C) \neq C$. Предполагается, что в C существует «порождающий» элемент x (т. е. C является минимальным инвариантным замкнутым подпространством оператора τ, содержащим x).

Доказывается, что для всякого функционала $\psi \in B^*$, $\psi(C) \equiv 0$, $\psi(\tau^{-1}x) \neq 0$ и для всякого $f \in C$ функция

$$F(z) = \psi\{(zI - \tau)^{-1} f\} / \psi\{(zI - \tau)^{-1} x\}$$

аналитична на компоненте $\mathscr{D}$ множества регулярных точек τ, содержащей 0. Тейлорово разложение $F(z) = \Sigma_0^\infty f_n z^n$ обладает тем свойством, что при всяком N $f \to \Sigma_1^N f_n \tau^n x \in C^N$, где $C^N = \tau^N(C)$. Указанное тейлорово разложение порождает соответствие $f \to F(z) = \Sigma_0^\infty f_n z^n$, которое является гомоморфизмом пространства C в пространство $\mathscr{T}$ функций аналитических в $\mathscr{D}$. При этом сходимости в C соответствует сходимость в $\mathscr{T}$, равномерная на каждом компакте из $\mathscr{D}$. Ядром гомоморфизма является подпространство $C^\infty = \cap C^n$. Если f — порождающий элемент в C, то $F(z) \neq 0$ на $\mathscr{D}$. Пусть $\mathfrak{A}_\tau$ — кольцо всех ограниченных операторов, действующих в C и перестановочных с τ. Каждому $U \in \mathfrak{A}_\tau$ соответствует аналитическая функция $u(z) \in \mathscr{T}$ такая, что если $f \to F(z)$, то $Uf \to u(z) F(z)$. В частности, оператору τ (на C) соответствует $u(z) \equiv z$. Соответствие $U \sim u(z)$ оказывается изоморфизмом.

Особо рассматривается случай, когда B — гильбертово пространство, а τ — нормальный оператор. При некоторых допущениях относительно спектра τ, за $\mathscr{T}$ можно взять пространство функций, аналитических при $|z| < 1$, для которых $\Sigma_0^\infty |f_n|^2$ сходится. В частности, если τ унитарен и $C^\infty = (0)$, то $\mathfrak{A}_\tau$ изоморфно кольцу всех функций, аналитических и ограниченных в единичном круге.

В качестве применения приводится простое доказательство одного предложения А. Н. Колмогорова о стационарных последовательностях в гильбертовом пространстве.

М. А. Рутман

3139. О принадлежности степеней оператора над данным вектором к некоторому линейному классу. Любич Ю. И., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 5, 881—884

Пусть S — линейная комплексная система, T — линейный оператор в S, а $\mathfrak{D}_n$ — область определения оператора T^n, где n — фиксированное целое число > 1. Рассматривается вопрос о принадлежности $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — линейное многообразие в S, промежуточных элементов $Tx, T^2x, \ldots, T^{n-1}x$ при условии, что $x \in \mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{M}$, а $Q(T)x \in \mathfrak{M}$ ($Q(\lambda)$ — многочлен n-й степени).

Доказывается теорема 1: Пусть существует n различных комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таких, что: а) уравнение $Tx - \lambda_k x = \varphi$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) при любом $\varphi \in \mathfrak{M}$ имеет решение $x \in \mathfrak{M}$: б) уравнение $P(T)x = 0$, где $P(\lambda) = \Pi_1^n(\lambda - \lambda_\nu)$, имеет в $\mathfrak{M}$ только тривиальное решение $x = 0$. Тогда из $x \in \mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{M}$ и $Q(T)x \in \mathfrak{M}$ следует, что $T^m x \in \mathfrak{M}$ ($m = 1, 2, \ldots, n-1$).

В случае нормированного многообразия $\mathfrak{M}$ справедлива теорема 2: Пусть резольвента $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ есть ограниченный оператор всюду в $\mathfrak{M}$ при $\lambda > 0$, причем $\|R_\lambda\| \leqslant A/\lambda$ ($A = \text{const}$). Если $x, Tx, \ldots, T^n x$ принадлежат $\mathfrak{M}$, то $\|T^m(x)\| \leqslant C_{n,m}(A) \|x\|^{(n-m)/n} \times \|T^n x\|^{m/n} (m = 1, 2, \ldots, n-1)$, где $C_{n,m}(A)$ зависят лишь от n, m, A.

М. А. Мертвецова

3140. О нетопологической структуре поля операторов. Урбаник (Sur la structure non topologique du corps des opérateurs. Urbanik K.), Studia math., 1954, 14, № 2, 243—246 (франц.)

Доказывается, что сходимость в поле операторов (Mikusiński J., Studia math., 1950, 11, 41—70) индуцирует операцию замыкания, для которой условие $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ может не выполняться. Аналогичное имеет место и при несколько более общей сходимости, возникающей также естественным способом.

J. Mikusiński

3141. О пространствах, двойственных к пространствам функций почти периодических по Безиковичу. Фёльнер (On the dual spaces of the Besicovitch almost periodic spaces. Følner Erling), Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1954, 29, № 1, 27 pp. (англ.)

Изучаются классы B_p функций на прямой, являющиеся пополнением класса почти периодических функций Бора по норме

$$\|f\|_p = \overline{\lim}_{T \to \infty} \left((2T)^{-1} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Рассматриваются подпространства пространств B_p, состоящие из функций, показатели Фурье которых принадлежат некоторому модулю, т. е. подмножеству действительных чисел, содержащему вместе с каждой парой λ_1 и λ_2 их разность $\lambda_1 - \lambda_2$.

Доказывается, что пространство, двойственное к B_p над модулем $\mathbf{M}$, есть пространство B_q над тем же модулем, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $1 < p < \infty$. Один из методов доказательства основан на соответствии между функциями из B_p и функциями с интегрируемой p-й степенью на бикомпактном расширении прямой, порождаемом модулем $\mathbf{M}$.

Ю. А. Шрейдер

3142. Спектр матрицы в аналитическом пространстве. Хапланов М. Г., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, 32, № 4, 3—8

Рассматривается линейный оператор, преобразующий пространство l_∞ аналитических функций с ограниченными коэффициентами в пространство l_1 аналитических функций с разложением, абсолютно сходящимся на единичной окружности. Методами тёплицевских координатных пространств доказывается, что такой оператор имеет точечный спектр, т. е. спектр, не имеющий предельной точки на конечном расстоянии. Результат является дальнейшим развитием исследований автора (РЖМат, 1953, 1257) и референта (РЖМат, 1954, 1718) о характере спектра линейных операторов в аналитическом пространстве.

Н. Н. Рожанская

3143. О спектральных разложениях некоторых линейных операторов. Харазов Д. Ф., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 4, 693—696

Усиление результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1954, 2229): все три ряда, выписанные в указанном реферате, сходятся сильно. М. К. Фаге

3144. О структуре областей пространства Фантапье. Аруффо, Галларати (Sulla struttura delle regioni dello spazio di Fantappiè. Aruffo Giulio, Gallarati Dionisio), Univ. Roma, Ist. naz. alta mat. Rend. mat. e appl., 1953, **12**, 1—34 (итал.)

Сначала устанавливается несколько теорем о соединении и пересечении семейств линейных областей пространства $\mathfrak{S}_F$. Затем изучается семейство окрестностей непрерывной функции, содержащихся в открытом множестве $\mathfrak{D}$ из $\mathfrak{D}_F$. Подробно исследуется проблема существования максимальных окрестностей, которая связывается с проблемой аналитического распространения функционалов. При довольно широких предположениях, с помощью теоремы Цорна, доказывается существование максимальных окрестностей. J. Sebastião e Silva

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 967.

3145. Непрерывность умножения в операторных алгебрах. Блэр (Continuity of multiplication in operator algebras. Blair Alexander), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 209—210 (англ.)

Если в алгебре, составленной из непрерывных линейных преобразований локально выпуклого пространства X и содержащей все конечномерные преобразования, умножение сильно непрерывно, то X нормируемо. Доказательство излишне усложнено.

Д. А. Райков

3146. Банаховы пространства и алгебры непрерывных функций. Мак-Дауэлл (Banach spaces and algebras of continuous functions. MacDowell Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 67—78 (англ.)

Для алгебры $C(X)$ действительных непрерывных функций на компакте X устанавливаются следующие результаты:

1. Компакт X есть топологическое произведение компактов X_1 и X_2 тогда и только тогда, когда алгебра $C(X)$ порождается двумя аддитивно связанными подалгебрами.

2. Компакт X принадлежит к топологическому произведению компактов X_1 и X_2 тогда и только тогда, когда алгебра $C(X)$ порождается двумя подалгебрами, образы которых при гомоморфизме алгебры $C(X)$ в фактор-алгебру по некоторому замкнутому идеалу $I \subset C(X)$ аддитивно связаны.

При этом два подпространства F и G линейного нормированного пространства H называются аддитивно связанными, если для любых элементов $f \in F$, $g \in G$ имеет место по меньшей мере одно из равенств $|f+g| = |f|+|g|$, $|f-g| = |f|+|g|$. Г. Е. Шилов

3147. Положительные линейные функционалы на самосопряженных B-алгебрах. Мацусита (Positive linear functionals of self-adjoint B-algebras. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 8, 427—430 (англ.)

Пусть A — полное нормированное кольцо с инволюцией, не обязательно содержащее единицу (B-алгебра, в терминологии автора). Вводятся следующ. обознач. 1) $H(A)$ — совокупность всех эрмитовых элементов в A; 2) $\Gamma(R)$—пространство, сопряжен. к нормированному пространству R; 3) $\Xi(A)$ — вещественное пространство в $\Gamma(A)$, состоящее из вещественных функционалов $f(x)$ (т. е. $f(x^*) = \overline{f(x)}$); 4) $\widehat{\Pi}(A)$ — совокупность всех положительных функционалов в A; 5) $\Phi(A)$—совокупность всех линейных мультипликативных функционалов в A; 6) $\hat{\Phi}(A) = \Phi(A) \cap \Xi(A)$; 7) $W(A)$ — совокупность всех $[a, b] = (2i)^{-1}(ab - ba)$, $a, b \in H(A)$; 8) $\widetilde{\Pi}(H(A))$—совокупность всех функционалов из $\Gamma(H(A))$, удовлетворяющих условию $2|f([a,b])| \leqslant f(a^2)+f(b^2)$, $a, b \in H(A)$; 9) $\widetilde{\Phi}(H(A))$—совокупность всех линейных функционалов на $H(A)$, мультипликативных относительно умножения $a \circ b = 2^{-1}(ab+ba)$ и равных нулю на $W(A)$; 10) E и E_0 — единичные сферы в $\Gamma(A)$ и $\Gamma(H(A))$ соответственно; 11) $\widetilde{E}_0 = E_0 \cap \widetilde{\Pi}(H(A))$; 12) $'\mathfrak{I}_f = \{a; f(xa) = 0$ для всех $x \in A\}$, $\mathfrak{I}'_f = \{a; f(ax) = 0$ для всех $x \in A\}$, $\mathfrak{I}_f = \{a; f(xay) = 0$ для всех $x, y \in A\}$. Оказывается, что $\Xi(A) \cong \Gamma(H(A))$, $\widehat{\Pi}(A) \cong \widetilde{\Pi}(H(A))$ и $\Phi(A) \cong \cong |\widetilde{\Phi}(H(A))|$, где $\cong$ означает топологический изоморфизм, в котором сужение на $H(A)$ каждого элемента слева совпадает со сужением на $H(A)$ соответствующего элемента справа. Образ функционала $f \in \widehat{\Pi}(A)$ при изоморфизме $\widehat{\Pi}(A) \cong \widetilde{\Pi}(H(A))$ обозначается через $\hat{f}$. Два функционала $\hat{f}$, $\hat{g}$ называются эквивалентными ($\hat{f} \sim \hat{g}$), если $'\mathfrak{I}_f = '\mathfrak{I}_g$. Функционал $\hat{f} \in \widetilde{E}_0$ называется слабо экстремальным, если он не эквивалентен никакой линейной комбинации двух функционалов $\hat{g}$, $\hat{h}$, принадлежащих $\widetilde{E}_0$ и неэквивалентных $\hat{f}$. Функционалы f и $\hat{f}$ называются лево, право или двусторонне регулярными, если идеалы $'\mathfrak{I}_f$, $\mathfrak{I}'_f$, $\mathfrak{I}_f$ соответственно регулярны и $f(j) = 1$ для единичного элемента j относительно соответствующего идеала. Пересечение $\widetilde{E}_0$ с множеством всех односторонне (двусторонне) регулярных функционалов обозначается через $\hat{E}_0$ (соответственно $\hat{\hat{E}}_0$). Формулируются следующие результаты:

1) Если в A есть аппроксимативная единица $\{e^\lambda\}$ (т. е. $ae^\lambda \to a$, $e^\lambda a \to a$ в смысле нормы для всех $a \in A$), то $'\mathfrak{I}_f$ максимален тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ слабо экстремален в $\widetilde{E}_0$ для $\|f\| \leqslant 1$.

2) Если для $\hat{f} \in \hat{E}_0$ (или $\hat{\hat{E}}_0$) идеал $'\mathfrak{I}_f$ (соответственно $\mathfrak{I}_f$) не максимален, то в $\hat{E}_0$ (соответственно $\hat{\hat{E}}_0$) существует отрезок, в котором $\hat{f}$ есть внутренняя точка.

3) Всякий отличный от нуля функционал $\varphi \in \Phi(A)$ есть экстремальная точка в $\hat{E}_0$ и в $\hat{\hat{E}}_0$.

В заключение рассматривается случай коммутативного кольца A с единицей и случай группового кольца A локально компактной группы. Доказательства не приводятся. М. А. Наймарк

3148. Заметка об одной статье Турумару. Херстейн (Une note sur un article de M. Tumuraru. Herstein I. N.), Portugaliae math., 1953, **12**, 113—114 (франц.)

Пусть R — алгебра над комплексными числами с операцией сопряжения $*$ такой, что из $a\,a^* = 0$ следует $a = 0$. Если произведение $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ ассоциативно на самосопряженных элементах алгебры R, то R коммутативна. Это обобщает один результат Турумару (Turumaru T., Kōdai Math. Sem. Repts, 1951, 51) (имя которого неверно указано в заглавии реферируемой статьи). Доказательство в отличие от доказательства Турумару краткое и чисто алгебраическое, и техника этого доказательства дает обобщение

теоремы Анкочея (Ancochea G., Ann. Math., 1947, 48, 147—153). I. E. Segal

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 440.

3149. Кольца с инволюцией. Наймарк (Involutive Algebren. Neumark M. A. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis, Berlin, Verlag Kultur und Fortschritt, 1954, 89—196) (нем.)

Перевод из «Успехов матем. наук», 1948, 3, № 5(27), 52—145.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 968.

3150. Кольца операторов в гильбертовом пространстве. Наймарк (Operatorenalgebren im Hilbertschen Raum. Neumark M. A. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis, Berlin, Verlag Kultur und Fortschritt, 1954, 197—274) (нем.)

Перевод из «Успехов матем. наук». 1949, 4, № 4 (32), 83—147

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 968.

3151. О кольцах операторов в несепарабельных гильбертовых пространствах. Томита (On rings of operators in non-separable Hilbert spaces. Tomita Minoru), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1953, A7, № 2, 129—168 (англ.)

Рассматриваются кольца ограниченных линейных операторов в (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащие единичный оператор и содержащие вместе с оператором A также сопряженный оператор A^*, и, кроме того, замкнутые в сильной топологии (W^*-алгебры, в терминологии американских авторов). Статья состоит из 4 глав. В первых трех главах автор доказывает, что: 1) Всякая W^*-алгебра есть прямая сумма не более трех W^*-алгебр соответственно дискретного, непрерывного и чисто бесконечного классов. 2) W^*-алгебра $\mathbf{M}$ принадлежит дискретному, непрерывному и чисто бесконечному классу тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}'$ принадлежит тому же классу. 3) Каждая W^*-алгебра $\mathbf{M}$ конечного класса есть прямая сумма W^*-алгебр $\mathbf{M}_\alpha$, каждая из которых имеет след $T_\alpha(A)$, определяемый формулой $T_\alpha(A) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} (Ag_i^\alpha, g_i^\alpha)$. Кроме того, строится относительная размерность в произвольной W^*-алгебре (не обязательно являющейся фактором). Повидимому, автору осталась неизвестной работа Диксмье (Dixmier J., Ann. scient. École norm. supér., 1951, 68, 185—202), в которой были получены те же результаты. Отметим еще, что на стр. 137 автором неточно сформулирована теорема Диксмье, именно отображение $A \to A^\natural$ не слабо непрерывно.

Новыми являются результаты четвертой главы, в которой дается разложение W^*-алгебры, заданной в не обязательно сепарабельном гильбертовом пространстве, обобщающее результаты Нёймана (Neumann J. v., Ann. Math., 1949, 50, 401—485). При этом существенную роль играет следующее определение: Пусть Ω — полное булевское пространство с бэровской мерой μ и пусть каждой точке $\lambda \in \Omega$ поставлено в соответствие гильбертово пространство $\mathfrak{H}(\lambda)$. Множество $\mathfrak{T}$ вектор-функций $f = f(\lambda)$, $f(\lambda) \in \mathfrak{H}(\lambda)$ называется прямым интегралом пространств $\mathfrak{H}(\lambda)$, если:

α) область определения функции $f(\lambda) \in \mathfrak{T}$ есть $\Omega / V_{f(\lambda)}$, где $V_{f(\lambda)}$ — неплотное множество в Ω;

β) если $f, g \in \mathfrak{T}$, то функция $(f(\lambda), g(\lambda))$ непрерывна во всех точках вне $V_{f(\lambda)} \cup V_{g(\lambda)}$;

γ) $\mathfrak{T}$ есть гильбертово пространство такое, что: γ_1) $(\alpha f)(\lambda) = \alpha f(\lambda)$ при $\lambda \notin V_{f(\lambda)}$, γ_2) $(f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$ при $\lambda \notin V_{f(\lambda)} \cup V_{g(\lambda)}$, γ_3) $(f, g) = \int_\Omega (f(\lambda), g(\lambda)) d\mu$;

δ) для всякой функции $f = f(\lambda) \in \mathfrak{T}$ и всякого одновременно открытого и замкнутого множества $X \subset \Omega$ существует вектор $P_X f \in \mathfrak{T}$ такой, что $V_{P_X f} \subset V_f$ и $(P_X f)(\lambda) = \varphi_X(\lambda) f(\lambda)$ вне V_f ($\varphi_X(\lambda)$ — характеристическая функция множества X).

Оказывается, что если $\mathbf{Z}$ — коммутативное подкольцо в W^*-алгебре $\mathbf{M}$, удовлетворяющее условию $\mathbf{Z} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{Z}'$, а $\mathfrak{S}$ — плотное в $\mathfrak{H}$ линейное многообразие, инвариантное относительно $\mathbf{M}$, то $\mathfrak{H}$ можно представить как прямой интеграл пространств $\mathfrak{H}(\lambda)$, каждое из которых есть замкнутая линейная оболочка множества $\mathfrak{S}(\lambda) = (f(\lambda), f \in \mathfrak{S})$. При этом каждый оператор $A \in \mathbf{M}$ задается операторной функцией $A(\lambda)$, где $A(\lambda)$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}(\lambda)$ и $|A| = \sup |A(\lambda)|$, формулой $(Af)(\lambda) = A(\lambda) f(\lambda)$ при $\lambda \notin V_{f(\lambda)}$. Полученное разложение автор называет $(Z, \mathfrak{S}, \Omega, \mu)$-разложением пространства $\mathfrak{H}$.

Далее рассматривается $(Z, \mathfrak{S}, \Omega, \mu)$-разложение W^*-алгебры, не имеющей чисто бесконечной части. Доказывается, что для всякой такой алгебры существует линейное многообразие $\mathfrak{S}$, плотное в $\mathfrak{H}$ и инвариантное относительно $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ такое, что при $(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}', \mathfrak{S}, \Omega, \mu)$-разложении пространства $\mathfrak{H}$ (где Ω и μ — надлежащим образом подобранные полное булевское пространство и бэровская мера) кольца $\mathbf{M}(\lambda)'' = (A(\lambda), A \in \mathbf{M})''$ и $\mathbf{M}'(\lambda)'' = (A(\lambda), A \in \mathbf{M}')''$ являются парами факторов для всех λ, за возможным исключением некоторого неплотного в Ω множества V. При этом в $\mathbf{M}(\lambda)''$ существует относительная размерность D_λ такая, что функция $D_\lambda(\mathfrak{M}(\lambda))$, $\mathfrak{M}(\lambda) = (f(\lambda), f \in \mathfrak{M})$ непрерывна вне V для любого $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$ и функция $D(\mathfrak{M}) = \int_\Omega D_\lambda(\mathfrak{M}(\lambda)) d\mu$ есть относительная размерность в $\mathbf{M}$.

Если $\mathbf{M}$ принадлежит непрерывному (дискретному) классу, то все $\mathbf{M}(\lambda)''$, за возможным исключением неплотного множества точек, также принадлежат непрерывному (соответственно дискретному) классу. В статье имеется большое число опечаток. М. А. Наймарк

3152. К проблеме существования собственных значений у линейных операторов. Талдыкин А. Т., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 905—908

Рассматриваются вопросы о существовании собственных значений и о полноте системы собственных и присоединенных элементов для линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве Некоторые формулировки и доказательства усложнены (например, в условиях теоремы 1 нет надобности упоминать о круге Фредгольма). Теорема 2 является ошибочной. С. Н. Крачковский

3153. Линейные представления группы Лоренца. Наймарк М. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 19—93

Систематическое, рассчитанное на широкий круг читателей (математиков и физиков) изложение теории линейных неприводимых представлений группы Лоренца. Статья содержит теорию как конечномерных, так и построенную в работах И. М. Гельфанда и автора теорию бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца. Содержание: 1. Основные понятия; 2. Инфинитезимальные операторы линейного представления собственной группы Лоренца; 3. Определение инфинитезимальных операторов представления группы $\mathfrak{A}_+$; 4. Конечномерные представления собственной группы Лоренца; 5. Основная серия представлений группы $\mathfrak{A}$; 6. Описание представлений основной серии при помощи унитарной подгруппы; 7. Дополнительная и полная серии представлений группы $\mathfrak{A}$. М. И. Граев

3154. Суммируемость рядов Фурье на кватернионах нормы единица. Рабсон (Summability of Fourier series on the quaternions of norm one. Rabson Gustave), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 2, 287—303 (англ.)

Рассматриваются неприводимые унитарные представления группы Q кватернионов с нормой единица. Характеристическим рядом комплекснозначной функции

$f \in L^1$, определенной на Q, называется ряд $\Sigma_{\alpha=1}^{\infty} r_\alpha f*\chi^\alpha$, где χ^α — характер, а r_α — степень α-го представления $f*\chi^\alpha = \int_Q f(xy^{-1})\chi^\alpha(y)\,dy$ (мера Хара нормирована так, что $mQ = 1$).

Доказываются следующие аналоги теорем Фейера, Фейера — Лебега и Колмогорова для тригонометрических рядов (символ (C, k) означает чезаровское суммирование k-го порядка).

1. Характеристический ряд функции $f \in L^1$ суммируем $(C, 2)$ к f в каждой точке непрерывности функции f. Если функция f непрерывна, то характеристический ряд равномерно суммируем $(C, 2)$. Показывается, что для $(C, 1)$-суммирования теорема неверна.

2. Характеристический ряд функции $f \in L^1$ суммируем $(C, 2)$ к f почти всюду.

3. Если $f \in L^2$ и $\{n_k\}$ — последовательность целых чисел такая, что $n_{k+1}/n_k > C > 1$, то подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ последовательности частичных сумм характеристического ряда функции f сходится к f почти всюду.

На примере показывается, что теорема локализации для характеристических рядов на Q неверна.

А. И. Сирота

3155. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров. Райков (Die harmonische Analyse auf kommutativen Gruppen mit Haarschem Mass und die Theorie der Charaktere. Raikow D. A. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis, Berlin, Verlag Kultur und Fortschritt, 1954, 11—87) (нем.)

Перевод из «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1945, 14, 1—86.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 932.

3156. Абстрактная задача Коши. Хилле (Le problème abstrait de Cauchy. Hille Einar), Rend. Seminar mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953, 12, 95—103 (франц.)

Автор приводит детальное исследование абстрактной задачи Коши, включая для полноты несколько результатов из двух предыдущих статей (РЖМат, 1954, 4009; 1955, 4416. *Ред.*). Пусть X — банахово пространство и U — замкнутый линейный оператор с областью определения и множеством значений в X. Тогда при данном $y_0 \in X$ задача Коши (АЗК) состоит в отыскании функции $y(t)$, отображающей $(0, \infty)$ в X и такой, что 1) $y(t)$ и $y'(t)$ принадлежат X для $t > 0$; 2) $y'(t) = U[y(t)]$ для $t > 0$; 3) $\lim_{t \downarrow 0} \| y(t) - y_0 \| = 0$. Решение $y(t) \not\equiv 0$ называется нулевым решением, если $y_0 = 0$. Функция $y(t)$ называется типа ω, если $\overline{\lim}_{t \to \infty} (t^{-1} \times \times \ln \| y(t) \|) = \omega$. Основная теорема о единственности гласит: Если собственные значения U в любой правой полуплоскости не образуют плотного множества, то АЗК для любого $y_0 \in X$ имеет не более одного решения конечного типа. С другой стороны, показывается, что для того чтобы АЗК обладала нулевым решением типа ω, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $U[x(\lambda)] = \lambda x(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, обладало решением $x(\lambda) \not\equiv 0$, голоморфным при $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$ и ограниченным в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant \omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассматриваются различные связи между АЗК и теорией полугрупп. Показано, что замкнутый линейный оператор U с плотной областью определения представляет собой бесконечно малый порождающий оператор полугруппы, сходящейся в сильном смысле к тождественному оператору при $t = 0$, в том и только в том случае, когда существует семейство линейных ограниченных операторов $[T(t); t \geqslant 0]$ конечного типа, непрерывных в сильном смысле для $t \geqslant 0$, причем $T(0) = I$ и $\mathrm{Re}(\lambda; U)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$, $x \in X$.

В заключение рассматриваются разрывные решения АЗК, которые появляются в абстрактном L-пространстве, если уравнение $U[x(\lambda)] = \lambda x(\lambda)$ имеет решение $x(\lambda)$, которое 1) представляет собой целую функцию порядка α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, причем минимального типа, если $\alpha = 1$; 2) лежит в положительном конусе пространства X для $\lambda \geqslant 0$; 3) обладает $\| x(\lambda) \|$ не $\in L(0, \infty)$.

На стр. 101, строки 3 и 5 снизу, и на стр. 102, строки 7 и 9 снизу, перечеркнутый символ $\in$ надо заменить на $\in$.

R. S. Phillips

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 718.

3157. Геометрия некоторых итерационных методов решения линейных систем. Хаусхолдер (The geometry of some iterative methods of solving linear systems. Householder Alston S.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1953, № 29, 35—37 (англ.)

Последовательные приближения x_α к решению x уравнения $Ax = y$ ищутся в виде

$$x_{\alpha+1} = x_\alpha + P_\alpha G(y - x_\alpha), \qquad (1)$$

где $P_\alpha = U_\alpha (U_\alpha^T G U_\alpha)^{-1} U_\alpha^T$, G — положительно определенная матрица, U_α — прямоугольные матрицы с линейно независимыми столбцами, U_α^T — транспонированные матрицы. $P_\alpha G$ является оператором ортогонального проектирования в метрике (Gx, y) на подпространства, определяемые матрицами U_α. Указаны общие классы матриц U_α и G, при которых процесс (1) практически осуществим. При специальных выборах матриц G и U_α формулы (1) приводят к методам наискорейшего спуска Л. В. Канторовича, Зейделя, релаксации и другим.

Б. П. Пугачев

3158. Применения в квантовой теории полей точного решения некоторых линейных операторных уравнений. Висконти (Applications à la théorie quantique des champs d'une solution exacte de certaines équations linéaires opératorielles. Visconti A.), J. phys. et radium, 1955, 16, № 1, 1—15 (франц.)

Предлагаются различные методы решения уравнений

$$U = U_0 + \lambda KU, \qquad (1)$$

$$U = U_0 + \lambda UK, \qquad (2)$$

где U_0, K — заданные, а U — искомый оператор в гильбертовом пространстве, λ — параметр. В частности, предлагается применить метод суммирования Нёрлунда к расходящимся рядам, получаемым при решении уравнений (1) и (2) путем последовательных приближений, и указываются примеры квантовых полей, к которым применимы предлагаемые методы. Как указывает и автор, в статье отсутствуют общие условия применимости этих методов, в частности не выясняются условия применимости метода Нёрлунда к S-матрицам; указываются лишь некоторые случаи, при которых этот метод заведомо неприменим.

М. А. Наймарк

3159. Определение некоторых дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве функций с интегрируемым квадратом. Кольме (Définition de certains opérateurs différentiels dans un espace de Hilbert de fonctions de carré sommable. Colmez Jean), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 1, 37—39 (франц.)

Пусть $l(u)$ — самосопряженное линейное дифференциальное выражение в частных производных по $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами. Предлагается определить следующим образом соответствующий дифференциальный оператор L в гильбертовом пространстве $L^2(R^n)$ функций $u(x_1, \ldots, x_n)$ с интегрируемым квад-

ратом по $x_1, \ldots, x_n$. Сначала вводится оператор L_0, являющийся сужением выражения $l(u)$ на бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие на бесконечности функции, а затем оператор L_0', являющийся сопряженым к L_0 в смысле Л. Шварца. Оператор L определяется как сужение оператора L_0' на те обобщенные функции φ, для которых φ и $L_0'\varphi$ являются обычными функциями, принадлежащими $L^2(R^n)$. Это определение иллюстрируется затем на примере оператора Шрёдингера для атома водорода. М. А. Наймарк

3160. Носители в преобразовании Лапласа. Лион (Supports dans la transformation de Laplace. Lions J. L.), J. Analyse Math., 1953, 2, 369—380 (франц.)

Пусть $X^n = R^n$, Ξ^n — его двойственное, $\Pi^n = \Xi^n + i\Xi^n$ — присоединенное комплексное пространство; Γ — выпуклое множество пространства Ξ^n с внутренними точками; $S'(\Gamma)$ — пространство таких распределений T на X^n, что $\exp(-\langle \xi, x\rangle) T_x$ есть «умеренное» распределение (т. е. функционал на пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. *Ped.*) для каждого $\xi \in \Gamma$. Если $T \in S'(\Gamma)$, то его преобразование Лапласа $F(p)$, $p = \xi + i\eta$ есть голоморфная функция на $\overset{\circ}{\Gamma} + i\Xi^n$ (Schwartz L., Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 1952, Suppl., 196—206). Пусть $K(T)$ — замкнутая выпуклая оболочка на носителях T; ее индикатриса есть функция $k(\lambda) = \inf_{x \in K(T)} \langle \lambda, x\rangle$, определенная на единичных векторах $\lambda \in \Xi^n$. Автор устанавливает теорему, связывающую $K(T)$ с ростом F в комплексной плоскости (см. вышеуказанную статью референта). Он также связывает $K(T)$ с ростом F в действительной области. Если $n = 1$ и $F(p) = O\{\exp \varepsilon |p|^2\}$ при $|p| \to \infty$ и всех $\varepsilon > 0$ и если A — верхняя грань действительных чисел b, для которых $\exp(b\xi) F(\xi) = O(1)$ при $\xi \to \infty$, то $k(+1) = A$. Доказательство опирается на теорему Фрагмена — Линделёфа. Для произвольного n, если $F(p + \lambda\zeta) = O\{\exp \varepsilon |\zeta|^2\}$ при $|\zeta| \to \infty (\mathrm{Re}\, \zeta \geqslant 0)$ для всех $\varepsilon > 0$ и $A(p; \lambda)$ — верхняя грань множества тех действительных чисел b, для которых $\exp(bt) \times F(p + \lambda t) = O(1)$ при $t \to \infty$, то $k(\lambda) \leqslant A(p; \lambda)$ и для фиксированного λ $k(\lambda) = A(p; \lambda)$, исключая p, которые принадлежат исключительному множеству комплексных прямых направления λ, которое «почти счетно» (т. е. пересекает каждую комплексную непараллельную прямую по счетному множеству). Отсюда следуют новые доказательства теоремы Пейли — Винера о преобразовании Фурье распределения с комплексным носителем и предшествующей теоремы автора $K(S * T) = K(S) + K(T)$ (C. r. Acad. sci., 1951, 232, 1530—1532, 1622—1624).

В первой заметке имеется ошибка: «счетный» (внизу стр. 1531) следует заменить на «почти счетный; ошибка исправлена в реферируемой работе. L. Schwartz

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 307.

3161. Обобщение теории распределений. Словиковский (A generalization of the theory of distributions. Słowikowski W.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, 3, № 1, 3—6 (англ.)

Обобщение теории распределений (в подл. дистрибуций). **Словиковский В.**, Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 1, 3—6

Операторной системой называется упорядоченная пара (S, X), где S — коммутативная полугруппа (записываемая мультипликативно), а X — коммутативная группа (записываемая аддитивно). Каждый элемент $A \in S$ определяет некоторый гомоморфизм $y = Ax$ некоторой подгруппы $G(A) \subset X$ во всю группу X такой, что если $x \in G(AB)$, где $A, B \in S$, то $x \in G(B)$, $Bx \in G(A)$ и $(AB)x = A(Bx)$.

Первая теорема работы утверждает, что при известных предположениях операторная система (S, X) может быть изоморфно погружена в некоторую операторную систему (S, X'), которая алгебраически замкнута, т. е. композиция Ax выполнима для каждых $x \in X'$ и $A \in S$. Если S — полугруппа дифференциальных операторов d^n/dt^n, а X — пространство всех непрерывных функций (определенных, например, на множестве всех действительных чисел), то X' является пространством обобщенных функций конечного порядка. Если X — множество всех непрерывных функций $x(t)$ $(t \geqslant 0)$, а $S = X - (0)$, то (при подходящем определении композиции Ax) X' является полем операторов Микусинского. Поэтому теорема погружения автора обобщает одновременно методы Шварца и Микусинского.

Во второй теореме рассматривается вопрос о введении топологии в X' в том случае, когда X — линейное локально выпуклое топологическое пространство (гомоморфизмы $y = Ax$, $A \in S$ не обязаны быть непрерывными в X, но они непрерывны в X'). R. Sikorski

3162. К доказательству теоремы Розенберга. Накамура, Турумару (On a proof of a theorem of Rosenberg. Nakamura Masahiro, Turumaru Takasi), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 501—502 (англ.)

Авторы хотели бы изъять эту заметку, поскольку она содержит ошибку.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 968.

3163 К. Элементы математики. XVIII. Часть 1. Основы анализа. Кн. V. Топологические векторные пространства. Гл. III—V. Бурбаки (Éléments de mathématique. XVIII. 1-re partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Chap. III — V. Bourbaki N. (Actual. scient. et industr., № 1229), Paris, Hermann et C-ie, 1955, 194 p.) (франц.)

Первые две главы книги V (гл. I «Топологические векторные пространства над нормированным телом» и гл. II «Выпуклые множества и локально выпуклые пространства») составили выпуск XV монографии Бурбаки (Actual. scient. et industr., 1953, № 1189). Выпуск XVIII содержит гл. III «Пространства непрерывных линейных отображений», гл. IV «Двойственность в топологических векторных пространствах» (включая параграф о двойственности в банаховых пространствах) и гл. V «Гильбертовы пространства (элементарная теория)». К выпуску приложены: историческая справка (о развитии понятия топологического векторного пространства), словарь к гл. I—V, указатели обозначений и терминов к гл. III—V, перечни определений, введенных в гл. III и IV, а также исправления к выпускам II (2-му изд.), IV (2-му изд.), VII, XI, XIII — XV.

Главы I—IV охватывают все содержание обзора Дьёдонне (РЖМат, 1955, 2760) (терминология которого дальше используется), кроме не представленной в них теории тензорных произведений локально выпуклых пространств (л. в. п.) В главе V (почти не зависящей от предыдущих) вводится понятие и устанавливаются элементарные свойства гильбертова пространства. Каждый параграф снабжен большим числом упражнений (с указаниями), содержащих часто понятия и результаты, не менее важные, чем изложенные в основном тексте. Отметим примеры в упр. 6 к § 1 гл. III (неполное метризуемое бэровское л. в. п.), в упр. 10 к § 4 гл. IV (неполуполное фактор-пространство полного л. в. п., не ограниченно замкнутое подпространство ограниченно замкнутого л. в. п., не B-полный (РЖМат,

1955, 4542) индуктивный предел монтелевских (F)-пространств) и в упр. 21 к § 5 гл. IV (нерефлексивное подпространство пространства Монтеля); теоремы — в упр. 7 к § 1 гл. III (произведение (F)-пространств есть бэровское л. в. п.), в упр. 13 к § 3 гл. III (обобщения теоремы Банаха о замкнутом графике), в упр. 13 и 15 к § 2 гл. IV (обобщения теорем В. Шмульяна и Эберлейна), в упр. 23 (и др.) к § 3 гл. IV (о первом и втором сопряженных к метризуемому л. в. п.) и в упр. 13 и 14 к § 1 гл. IV (о л. в. п. со слабейшей топологией). Интересный набор упражнений содержит гл. V. В историческом очерке не отмечено, что на t-свойство банаховых пространств впервые обратил внимание И. М. Гельфанд. Д. А. Райков

3164 К. Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. I. Метрические и нормированные пространства. Курс лекций. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., М., Изд-во Моск. ун-та, 1954, 155 стр. с черт., 5 руб.

Первый выпуск задуманного авторами большого курса функционального анализа, содержащий первоначальные сведения. Гл. I. Элементы теории множеств. Гл. II. Метрические пространства. Примеры. Замкнутые и открытые множества (в связи с этим, мелким шрифтом — определение топологического пространства). Изометрия. Полнота. Принцип сжатых отображений, применения: метод последовательных приближений для алгебраических и дифференциальных уравнений, для интегральных уравнений типа Фредгольма при малых и типа Вольтерра при любых значениях параметра. Компактность, теорема Арцела, применение к доказательству существования решения уравнения $dy/dx = f(x,y)$ с непрерывной правой частью (теорема Пеано). Непрерывные и полунепрерывные функции на компактах. Компактность множества кривых и существование геодезических.

Гл. III. Линейные нормированные пространства. Выпуклые множества. Линейные функционалы, теорема Хана — Банаха, сопряженные пространства, слабая сходимость (примеры в координатных пространствах c, l_p, m). Линейные операторы. Теорема Банаха об ограниченности обратного оператора. В добавлении к этой главе даны определения и простейшие свойства функционалов Шварца.

Гл. IV. Линейные операторные уравнения. Спектр оператора. Вполне непрерывные операторы. Теория Фредгольма — Рисса в абстрактной форме (применения не даны). Г. Е. Шилов

См. также: 2774, 2852, 2861 К, 2867, 2871, 2876, 2914, 2928, 2929, 2934, 2966, 2997, 3009, 3021, 3023, 3024, 3090, 3122

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3165. Определение вероятности. Михок (Definirea probabilităţii. Mihoc Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 4, 151—162 (рум.)

3166. Статистика и теория вероятностей. Барбери (Statistics and the theory of probability. Barberi B.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam,1954, 273—274 (англ.)

3167. О понятии «дисперсии» для многомерных распределений. Финетти (Sulla nozione di «dispersione» per distribuzioni a più dimensioni. Finetti Bruno de), Publ. Fac.sci. e ingegneria Univ. Trieste, 1953, **B**, № 117, 587—596 (итал.)

3168. Об одной характеризации нормального распределения. Дополнение. Басу, Лаха (Addenda. On some characterizations of the normal distribution. Basu D., Laha R. G.), Sankhyā, 1954, **14**, № 1—2, 180 (англ.)

Дополнение к статье того же названия (РЖМат, 1955, 4577). В. П. Скитович

3169. О характеризации гамма-распределения. Лаха (On a characterisation of the gamma distribution. Laha R. G.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 784—787 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одинаково распределенные независимые случайные величины, имеющие конечную дисперсию. Доказывается теорема: Если условное распределение отношения двух квадратичных форм $(\Sigma a_{ij} X_i X_j) / (\Sigma X_i)^2$ $(\Sigma a_{ii} = n^{-1} \Sigma a_{ij})$ при фиксированной сумме $S = \Sigma X_i$ совпадает с безусловным распределением этого отношения, то все величины X_i имеют гамма-распределение вида

$$dF(x) = \Gamma^{-1}(p)\, e^{-x} x^{p-1}\, dx \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Следствие: Пусть отношение $(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) / S$ распределено независимо от S, тогда все величины X_i имеют гамма-распределение. В. П. Скитович

3170. О характеризации гамма-распределения. Лукач (A characterization of the gamma distribution. Lukacs Eugene), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 2, 319—324 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть X и Y — положительные независимые случайные величины, имеющие собственное распределение. Для того чтобы величины $U = X + Y$ и $V = X / Y$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы X и Y имели гамма-распределение с плотностью $F(t, \alpha, \lambda) = \alpha\Gamma^{-1}(\lambda)\, t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}$, $t > 0$ с одним и тем же параметром α. В. П. Скитович

3171. О некоторых периодических характеристических функциях. Лукач (On certain periodic characteristic functions. Lukacs Eugene), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 296—297 (англ.)

Дается определение решетчатого распределения и приводятся без доказательства две следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть аналитическая характеристическая функция однозначно определена на всей комплексной плоскости, периодична и имеет вещественный или чисто мнимый период. Для того чтобы период был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы она была характеристической функцией решетчатого распределения.

Теорема 2. Для того чтобы характеристическая функция была целой периодической функцией (тождественно не равной единице), необходимо и достаточно, чтобы она была характеристической функцией решетчатого распределения. В. П. Скитович

3172. Одна задача о характеристических функциях вероятностных распределений. Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 137—138

Без доказательства дается следующая обобщенная формулировка известной теоремы Г. Крамера: Пусть $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ — характеристические функции, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, $Q(t)$ — полином второй степени и при $-\delta \leqslant t \leqslant \delta$, $\delta > 0$ имеет место равенство $\Pi_{k=1}^{n} (f_k(t))^{\alpha_k} = e^{Q(t)}$. Тогда на всей оси t,

$f_k(t) = e^{Q_k(t)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $Q_k(t)$ — полиномы второй степени.

Спрашивается: распространяется ли эта теорема на бесконечные произведения характеристических функций? Указывается, что эта задача интересна для исследования независимых статистик. Б. В. Гнеденко

3173. Заметка об условных математических ожиданиях. Фабиан (A note on the conditional expectations. Fabián Václav), Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 2, 187—191 (англ.; рез. русс.)

Пусть на дискретном пространстве элементарных событий заданы две случайные величины ξ и η и задана некоторая функция $h(\xi, \eta)$. Тогда очевидно равенство условных математических ожиданий

$$M(h(\xi, \eta)/\eta = y) = M(h(\xi, y)/\eta = y), \qquad (1)$$

если $P\{\eta = y\} \neq 0$. Автор приводит ряд условий, при которых равенство (1) верно в общем случае.

Р. Л. Добрушин

3174. Некоторые свойства биномиальной функции распределения. Хольте (Noen egenskaper ved den binomiale fordelingsfunksjon. Holte Fritz C.), Nord. mat. tidskr., 1954, 2, № 3, 113—115 (норв.)

Пусть m — единственное наиболее вероятное значение случайной величины ξ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n, p ($n > 0$ — целое, $0 < p < 1$). Изучается вопрос, какое из событий $\{\xi < m\}$ и $\{\xi > m\}$ является более вероятным в зависимости от значений n и p. Устанавливается, в частности, что для любых целых n и m, $n > 0$, $n \geqslant 2m$, существует такое p_0, лежащее в интервале $[m/n,\ m + 1/2/n + 1]$, при котором события $\{\xi < m\}$ и $\{\xi > m\}$ равновероятны.

А. А. Юшкевич

3175. Неравенство для пуассоновских вероятностей. Тейкер (An inequality on Poisson probabilities. Teicher Henry), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 147—149 (англ.)

Пусть X_λ — случайн. величина, $P\{X_\lambda = n\} = (\lambda^n/n!)\, e^{-\lambda}$. Устанавливается оценка $P\{X_\lambda \leqslant \lambda\} > e^{-1}$ для произвольного $\lambda > 0$ и $P > 1/2$ для любого целого $\lambda > 0$.

В. М. Золотарев

3176. Случайное разбиение. Аулук, Котхари (Random fragmentation. Auluck F. C., Kothari D. S.), Nature, 1954, 174, № 4429, 565—566 (англ.)

Пусть параллелепипед объема Ω разбивается на $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ подпараллелепипедов $N_1 + N_2 + N_3$ плоскостями, соответственно параллельными трем граням параллелепипеда. Положение каждой секущей плоскости выбирается случайно, с равномерным распределением вдоль перпендикулярного к ней ребра параллелепипеда. Выводится приближенная формула для среднего числа $N(V)$ подпараллелепипедов, объемы которых превосходят V, справедливая при $V \gg \Omega/N_1 N_2 N_3$.

Оказывается, что относительное число звезд в галактике, массы которых превосходят M, почти в точности пропорционально $N(M)$. Этот факт подтверждает космогонические теории, согласно которым звезды Млечного Пути возникли $3 \cdot 10^9$ лет тому назад в результате некоторого случайного разбиения дозвездной материи, имевшей почти равномерную плотность (порядка плотности атомного ядра). Та же задача решается и для случая двух измерений.

А. А. Юшкевич

3177. Мера площади однородной случайной поверхности в пространстве. Корсин (A measure of the area of a homogeneous random surface in space. Corrsin Stanley), Quart. Appl. Math., 1955, 12, № 4, 404—408 (англ.)

Пусть на плоскости (в пространстве) дана случайная кривая (поверхность), распределение которой инвариантно относительно параллельных переносов. Пусть $L(A)$ — длина кривой (площадь поверхности), приходящаяся в среднем на единицу площади (объема), n — среднее число пересечений случайной кривой (поверхности) со случайным единичным отрезком, направление которого распределено равномерно. Утверждается, что соответственно $n = 2L/\pi$; $n = A/2$. Рассуждения автора носят эвристический характер.

А. А. Юшкевич

3178. Одно неравенство теории вероятностей. Хант (An inequality in probability theory. Hunt G. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 506—510 (англ.)

Пусть x и y — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Говорят, что x доминирует над y, если $M\{\varphi(x)\} \geqslant M\{\varphi(y)\}$ для любой непрерывной выпуклой функции $\varphi(x)$. Если 1) φ — непрерывная выпуклая функция в R^n, 2) x_i независимы и y_i независимы, 3) x_i доминируют над y_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), то

$$M\{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \geqslant M\{\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\}.$$

Доказывается лемма: Пусть $M\{y\} = 0$ и $|y| \leqslant 1$; тогда любая симметричная случайная величина x, с $1 \leqslant M\{(x)\} < +\infty$, доминирует над величиной y.

Приводятся два приложения нового понятия: 1) дается обобщение одного неравенства А. Я. Хинчина: для любого натурального q

$$M\left\{\sup\left|\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k y_k\right|^{2q}\right\} \leqslant 2\left(\sum_1^n a_k^2\right)^q 1.3.5 \ldots (2q-1),$$

где (y_n) — независимые случайные величины, $M\{y_n\} = 0$, $|y_n| \leqslant 1$; (a_n) — константы; 2) для матрицы X, элементы которой x_{ij} ($1 \leqslant i, j \leqslant n$) — независимые нормальные (0,1) случайные величины, и $r > 1$:

$$P\{\|X\| > 2rn\} \leqslant \frac{1}{4(r-1)(rn\pi)^{1/2}}\left(\frac{2r}{e^r - 1}\right)^n,$$

А. А. Бобров

3179. Выражение плотности устойчивого распределения с показателем α, большим единицы, через плотность с показателем $1/\alpha$. Золотарев В. М., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 735—738

Для плотностей $p(x, \alpha, \beta)$ устойчивых законов, отвечающих значениям параметров $\alpha > 1$ и $|\beta| \leqslant 1$, автор устанавливает важное тождество:

$$a_\nu x p(-\alpha_\nu x, \alpha, \beta) = a_{\tilde\nu} x^{-\alpha} p(a_{\tilde\nu} x^{-\alpha}, 1/\alpha, \tilde\beta), \quad (A)$$

здесь $x > 0$, $\nu = -\beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$, $a_\nu = (1 + \nu^2)^{1/2\alpha}$, $\tilde\nu = -\beta \operatorname{tg}(\pi/2\alpha)$, $\tilde\beta = (\operatorname{tg}\pi/2\alpha)^{-1} \operatorname{tg}[2 \operatorname{arctg}\nu + \pi(\alpha - 1)]/2\alpha$. Соотношение (A), вместе с известным равенством $p(x, \alpha, \beta) = p(-x, \alpha, -\beta)$ позволяет использовать асимптотические формулы, найденные для законов с $\alpha < 1$, для представления законов с $\alpha > 1$. Автор указывает ряд приложений соотношения (A). В заключительной части указываются дифференциальные уравнения, которые служат для определения плотностей $p(x, \alpha, \beta)$ при рациональных значениях $\alpha = \frac{m}{n} < 1$.

Н. В. Смирнов

3180. О многомерном распределении Пуассона. Тейкер (On the multivariate Poisson distribution. Teicher H.), Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 1—9 (англ.)

Изучается многомерное распределение Пуассона. Указывается в терминах производящих функций характеристический признак этого распределения.

Обобщается на многомерный случай теорема Райкова о том, что если сумма двух независимых случайных величин распределена по закону Пуассона, то и каждое слагаемое распределено по закону Пуассона. При некоторых естественных предположениях доказывается предельная теорема о сходимости нормированной последовательности случайных векторов, распределенных по закону Пуассона, к многомерному нормальному распределению. Е. Л. Ющенко

3181. О предельных распределениях для нормированных сумм независимых случайных величин. Лебединцева (Про граничні розподіли для нормованих сум незалежних випадкових величин. Лебединцева О. К.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 1, 12—15 (укр.; рез. русс.)

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых подчинена одному из s различных законов распределения $\{F_j(x)\}$ и L_s — класс возможных предельных распределений $\Phi(x)$ для нарастающих сумм $s_n = B_n^{-1}\Sigma_1^n \xi_i - A_n$. Очевидно, что L_s составляет часть класса L. Б. В. Гнеденко было высказано предположение, согласно которому класс L_s состоит из всевозможных композиций не более чем s устойчивых законов. Автор приводит два условия (без доказательства), при выполнении которых можно утверждать справедливость гипотезы Б. В. Гнеденко. В. М. Золотарев

3182. Предельные распределения для полиномиального закона. Финш (The limiting distributions of the multinomial distribution. Fisz M.), Studia math., 1954, **14**, № 2, 272—275 (англ.)

Рассматривается схема независимых испытаний с r исходами, причем вероятности исходов могут изменяться в зависимости от номера испытаний.

Доказывается теорема: Пусть x_{nm} означает число реализаций m-го исхода за n испытаний; если последовательность распределений случайных величин $\{A_{n1}x_{n1} + B_{n1}, \ldots, A_{nr}x_{nr} + B_{nr}\}$, ($A_{nm} \neq 0$, B_{nm} — надлежаще подобранные константы) при $n \to \infty$ сходится к собственному распределению $(r-1)$-мерной величины, то эта величина имеет форму (ξ, η), где ξ — пуассоновская и η — гауссовская величины соответственно j и $r-j-1$ измерений ($0 \leqslant j \leqslant r-1$), ξ и η независимы между собой.

Случай $r = 2$ изучен П. Козуляевым (Уч. зап. МГУ, 1939, 15, 179—180). А. А. Бобров

3183. Стохастическая сходимость на равномерных пространствах. Досс (Convergence stochastique dans les espaces uniformes. Doss Shafik), Ann. Scient. Ecole norm. supér., 1954, **71**, № 1, 87—100 (франц.)

Дается обобщение нескольких понятий сходимости последовательности случайных величин на случай равномерных пространств (Bourbaki N., Topologie générale, Paris, 1942, ch. II). Считаются данными абстрактное множество F, на нем фильтр $\mathfrak{F}$, равномерное пространство E, заданное базой $\mathfrak{B} = \{V\}$, и множество G элементарных событий. Для случайных величин X_τ (каждое X_τ пробегает значения из пространства E, а $\tau \in F$), определенных на G, вводятся понятия сходимости по фильтру $\mathfrak{F}$ к величине X I в смысле Бернулли; II по вероятности; III сильно по вероятности; IV почти достоверно.

Из сходимости III следует сходимость II, а из нее, как доказывает автор, следует и сходимость I. Для метризуемых равномерных пространств (т. е. обладающих счетной базой «окружений» V) дается критерий Коши для сходимости II и доказывается, что сходимость III и сходимость почти всюду в этом случае эквивалентны. В случае сепарабельных пространств даются условия типа Козакевича (Kozakiewicz, Fundam. math., 1938, **31**, 160—178) для сходимостей II и III. Доказана теорема о существовании предела для некоторым образом определенной сильной сходимости последовательности случайных независимых величин в случае полного сепарабельного пространства E. Ю. М. Смирнов

3184. О некоторых асимптотических свойствах процесса Пуассона. Хида (On some asymptotic properties of Poisson process. Hida Takeyuki), Nagoya Math. J., 1953, **6**, 29—36 (англ.)

Пусть L_m — длина интервала между m-м и $(m+1)$-м скачками в процессе Пуассона с параметром λ.

Изучаются величины

$$M_n = \max_{0 \leqslant m \leqslant n-1} L_m, \quad m_n = \min_{0 \leqslant m \leqslant n-1} L_m,$$

$$Z_n = M_n^{-1}(L_0 + \ldots + L_{n-1}).$$

Например, доказывается, что с вероятностью единица $\liminf_{n\to\infty} \lambda M_n (\alpha \log n)^{-1} \geqslant 1$. А. А. Юшкевич

3185. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова с непрерывным временем. Сираждинов С. Х., Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 6, 905—908

Рассматривается однородная во времени цепь Маркова с непрерывным временем и конечным множеством состояний $e_1, e_2, \ldots, e_s$ ($s > 1$), характеризуемая матрицей «интенсивностей переходов» $A = \| a_{\alpha\beta} \|$; $a_{\alpha\beta} \geqslant 0$ ($\alpha \neq \beta$); $\Sigma_\beta a_{\alpha\beta} = 0$ (автор называет эти числа плотностями). Предполагается условие (A): Для любой пары состояний e_α и e_β существует цепочка состояний $e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}$ такая, что $a_{\alpha\gamma_1} \cdot a_{\gamma_1\gamma_2} \ldots a_{\gamma_\alpha\beta} > 0$. Пусть $\xi^\alpha(t)$ — продолжительность пребывания системы в состоянии e_α за время t; $\xi(t) = \{\xi^{(1)}(t), \ldots, \xi^{(s)}(t)\}$; $e(0)$ — состояние при $t = 0$; $M_\gamma \xi^\alpha(t)$ — условное среднее при $e(0) = e_\gamma$. При условии (A), $\omega_\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{M_\gamma \xi^\alpha(t)}{t} = \omega_\alpha$ не зависит от γ. Вводится вектор $\eta(t) = (\xi(t) - t\omega)\, t^{-1/2}$, где $\omega = (\omega_1 \ldots \omega_s)$. Пусть N-$(s-1)$-мерное векторное пространство, где лежит $\eta(t)$, $\mathcal{E} \subset N$ измеримо относительно соответствующей вероятностной меры, $F_t^\gamma(\mathcal{E}) = P(\eta(t) \in \mathcal{E} \mid e(0) = e_\gamma)$.

Теорема 1. При условии (A)

$$\sup_{\mathcal{E}\subset N} \left| F_t^\gamma(\mathcal{E}) - \int_{\mathcal{E}} \left[\Psi(X) + \sum_{\nu=1}^{k} t^{-\nu/2} L_{\gamma\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial X}\right)\Psi(X) \right] dX \right| = o\left(t^{-\frac{k+1}{2}}\right).$$

Здесь $\Psi(x)$ - $(s-1)$-мерная плотность, $L_{\gamma\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial X}\right) \times \Psi(X)$ — эффективно задаваемые дифференциальные операции над $\Psi(X)$. Теорема 2 трактует о предельном законе для случайной величины, связанной с $\xi(t)$. Даются краткие сведения о способе доказательств. Ю. В. Линник

3186. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. Добрушин Р. Л., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 1, 5—8

Пусть задано множество «состояний» Ω и борелево тело $\mathfrak{B}$ его подмножеств, называемых измеримыми. Вводится оператор перехода $P(x, B)$ от $x \in \Omega$ и множества $B \in \mathfrak{B}$, при фиксированном x являющийся вероятностной мерой на Ω, а при фиксированном B измеримой функцией от x. Мерой эргодичности ρ оператора P называется

$\inf \alpha$, для таких чисел α, что существует мера $\mu(B)$ с $\mu(\Omega)=\alpha$, и $P(x, B) \geqslant \mu(B)$ при всех x и B.

Пусть дано прямое произведение n экземпляров $\Omega^{(i)}$ пространства Ω: $\overline{\Omega}=\Omega^{(1)} \times \cdots \times \Omega^{(n)}$. Неоднородная цепь Маркова задается начальным распределением вероятностей $P(B)$ и $(n-1)$ операторами перехода $P_i(x, B)$, $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, что естественно определяет распределение вероятностей на $\overline{\Omega}$, и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанные в цепь Маркова. Формулируются три теоремы. Наиболее существенна теорема 1: Пусть величины $\xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn}$ связаны в цепь Маркова, с операторами перехода $P_{in}(x, B)$, и ρ_n — нижняя грань мер эргодичности $P_{in}(x, B)$ при $i=1, \ldots, n$. Пусть $|\xi_{in}| \leqslant C$ (константа); $\infty > D\xi_{in} \geqslant c > 0$. Если $\rho_n n^{1/3} \to \infty$, то при $n \to \infty$ нормированная обычным способом сумма ξ_{in} асимптотически приближается к нормальному распределению. Этот результат в известном смысле не улучшается, и содержит в себе более ранние результаты С. Н. Бернштейна, референта и Н. А. Сапогова. Формулируются еще две теоремы. Кратко намечаются доказательства. Ю. В. Линник

3187. Распространение закона Пуассона на многосложные однородные цепи Маркова. Михок (Extinderea legii lui Poisson pentru lanțurile Markov multiple și omogene. Mihoc G.), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1954, **6**, № 1, 5—15 (рум.; рез. русс., франц.)

Изучается схема серий для дискретной, однородной сложной цепи Маркова. При некоторых условиях находится предельное выражение для характеристической функции числа попаданий в фиксированное состояние. С. Х. Сираждинов

3188. Об одной предельной теореме для зависимых случайных величин. Каллианпур Г., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 13—16

Доказывается теорема: Пусть $\{X_i\}$ m-связанная последовательность случайных величин (РЖМат, 1953, 828) таких, что $EX_i=0$, $EX_i^2 < C^2 < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Sigma_{p=1}^{n} A_{i+p} = A (\neq 0)$ равномерно относительно i, где $A_i = EX_{i+m}^2 + 2\Sigma_{j=1}^{m} E(X_{i+m-j} X_{i+m})$; тогда распределение нормированной суммы $n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$ при $n \to \infty$ сходится к нормальному $(0,1)$ закону, если только выполнено условие: при каждом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}} x^2 dF_j(x) = 0,$$

$F_j(x)$ — функция распределения X_j. Отмечается, что эта теорема содержит, как частные случаи, результаты, полученные ранее (Hoeffding W., Robbins H., Duke Math. J., 1948, 15, 773; РЖМат, 1953, 828). А. А. Бобров

3189. Центральная предельная теорема для m-связанных величин. Диананда (The central limit theorem for m-dependent variables. Diananda P. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 92—95 (англ.)

Доказывается, что для m-связанной последовательности случайных величин $\{X_i\}$ с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями (РЖМат, 1953, 828) суммы $1/nS_n = 1/n\Sigma_{i=1}^{n} X_i$ асимптотически $(n \to \infty)$ распределены нормально $(0, MS_n^2)$, если 1) $n = O(MS_n^2)$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}} x^2 dG_i \to 0$, где G_i — функция распределения X_i.

Отсюда получаются более ранние результаты Хёфдинга и Роббинса (реф. 3188). Основная идея доказательства формулированного результата та же, что и в цитированной работе автора. Н. А. Сапогов

3190. Обобщение предельной теоремы Крамера. Петров В. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 195—202

Улучшается остаточный член в ранее доказанной автором теореме (РЖМат, 1954, 3015). Величина $O(x \ln n / \sqrt{n})$ заменена на $O(x/\sqrt{n})$. С. Х. Сираждинов

3191. Аналог закона повторного логарифма. Бакстер (An analogue of the law of the iterated logarithm. Baxter G. Jr.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 177—181 (англ.)

Пусть $\{\xi_{nk}\}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ — последовательность серий случайных величин, независимых в каждой серии, распределенных по закону $P\{\xi_{nk}=1\} = \frac{\lambda}{n}$, $P\{\xi_{nk}=0\} = 1 - \frac{\lambda}{n}$. Как известно, суммы $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nn}$ имеют в пределе распределение Пуассона. Очевидно, что порядок возрастания $\sup S_n$ существенным образом будет зависеть от степени зависимости случайных величин различных серий. Доказываются:

Теорема 1. Если случайные величины ξ_{nk} различных серий независимы между собой, то с вероятностью 1 верхний предел величины $S_n(\log\log n)/\log n$ равен 1.

Теорема 2. Если а) случайные величины различных столбцов $\{\xi_{k,k}, \xi_{k+1,k}, \ldots,\}$ независимы между собой, б) $\xi_{k,k} \geqslant \xi_{k+1,k} \geqslant \ldots$, то с вероятностью 1 верхний предел величины $S_n(\log\log\log n)/\log\log n$ равен 1. В. М. Золотарев

3192. Асимптотические теоремы теории восстановления. Смит (Asymptotic renewal theorems. Smith Walter L.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1953—1954, **A64**, № 1, 9—48 (англ.)

Последовательность неотрицательных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется процессом восстановления, причем последовательность случайных величин, принимающих значения на множестве $\{m\omega\}$, $\omega > 0$, называется дискретным процессом восстановления. Обозначим через $N^{(x)}$ наибольшее из тех k, для которых $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k \leqslant x$. Теоремы, касающиеся свойств $N^{(x)}$ или связанных с ней величин, носят название теорем теории восстановления. В работе рассматривается недискретный процесс восстановления с независимыми и одинаково распределенными случайными величинами ξ_i. Доказываются теоремы об асимптотическом поведении на бесконечности $(x \to \infty)$ $H(x) = E\{N^{(x)}\}$ и $D\{N^{(x)}\}$, аналогичные теоремам Феллера, Тёклинда и других авторов, доказанных ими для дискретных процессов восстановления. Ранее известное соотношение $\lim_{x\to\infty} H'(x) = 1/E(\xi_i)$ доказывается автором при более широких предположениях. Новым результатом является следующая теорема: Если $K(x)$ — функция распределения неотрицательной случайной величины со средним значением k, то для недискретного процесса $\lim_{x\to\infty} \{H(x) - \int_0^x K(x-z)\,dH(z)\} = k/E(\xi_i)$; здесь $E(\xi_i)$ не предполагается конечным.

В. М. Золотарев

3193. Прямое доказательство основной теоремы теории восстановления. Кокс, Смит (A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory. Cox D. R., Smith Walter L.), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 3-4, 139—150 (англ.)

Пусть X_i — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин заданных плотностью $p(x)$ и имеющих конечные математические ожидания $\mu > 0$. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ и $p_n(x)$ — плотность распределения величины S_n, $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)$. Феллер (Feller W., Ann. Math. Statistics, 1941, 12, 243), а затем при более слабых ограничениях на $p(x)$ Тёклинд (Täcklind S., Skand. aktuarietidskr., 1945, 28, 68) показали, что $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1/\mu$. Авторы выводят это утверждение при условиях, что: 1) $MX_i^2 < \infty$, 2) $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$, 3) если $\varphi(t)$ — характеристическая функция величины X_i, то при некоторых A и $\alpha > 0$ характеристическая функция $|\varphi(t)| \leqslant A|t|^{-\alpha}$ при всех t. Эти условия шире условий Феллера и не уже условий Тёклинда. В отличие от цитированных работ, использующих тауберовы теоремы, авторы основывают свое доказательство на полученных Смитом (РЖМат, 1954, 1725) уточнениях локальной предельной теоремы. Этот результат обобщается на случай разнораспределенных слагаемых X_i и функции $h(x)$ вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n(x)$. Из приведенных результатов выводится одна тауберова теорема.

Р. Л. Добрушин

3194. Предельное распределение функции двух независимых случайных величин и его статистическое приложение. Фиш (The limiting distribution of a function of two independent random variables and its statistical application. Fisz M.), Colloq. math., 1955, 3, № 2, 138—146 (англ.)

Рассматриваются случайные величины $\xi_r = \xi_r(\lambda_r) > 0$, $r = 1, 2$, где λ_r неограниченно возрастают, пробегая соответственно множества Λ_r. В обозначениях $m_r(\lambda_r) = E(\xi_r)$, $\sigma_r^2 = D(\xi_r)$, $\psi = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\beta_r = \frac{\sigma_r}{\psi}$ (величины m_r предполагаются конечными и σ_r отличными от 0) доказывается следующая теорема: Если: а) при $\lambda_r \to \infty$ $\xi(\lambda_r)/m(\lambda_r) \to 1$ по вероятности; б) величины $\xi_r(\lambda_r)$ асимптотически нормальны $N[m_r(\lambda_r); \sigma_r(\lambda_r)]$ в) $m_2(\lambda_2)/m_1(\lambda_1) \to 1$ при $\lambda_1 \to \infty$, $\lambda_2 \to \infty$, — то величина $\zeta(\lambda_1, \lambda_2) = (\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 + \xi_1)^{-p}$, $p > 0$, при λ_1, $\lambda_2 \to \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(m_2 - m_1)(m_1 + m_2)^{-p}$ и $\psi(m_1 + m_2)^{-p}$. Приводятся примеры применения этой теоремы для проверки гипотез, касающихся одного из параметров Г-распределения, пуассоновского и биномиального распределения.

В. М. Золотарев

3195. О статистическом распределении взрывов мин. Боренius (On the statistical distribution of mine explosions. Borenius Gustaf), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 3—4, 151—157 (англ.)

Распределение, изученное Блумквистом (РЖМат, 1955, 3310), имеет место также в условиях следующей задачи. На минном поле длины a и ширины b заложено n мин и m лиц пытаются пересечь его в случайно выбранных местах перпендикулярно к стороне a минного поля. Вероятность поражения каждого отдельного лица предполагается заданной и равной p. В минном поле заданной плотности $n \to \infty$, $p \to 0$ при $a \to \infty$. Рассматривается этот предельный случай в предположении, что $np \to y \neq 0$, $mp \to x$. Число k взрывов мин будет, естественно, порядка mnp и, следовательно, $k \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассматривается случайная величина $z = kp$ и указывается способ нахождения ее стандартного отклонения.

А. А Петров

3196. «О вероятности сильно флуктуирующих величин». Вержбинский М. Л., Сарманов О. В., Соловейчик Р. Э., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1954, 29, 20—30

Изучаются вероятности некоторых событий, связанных с последовательностью испытаний с двумя исходами (например, вероятность того, что при n испытаниях между какими-нибудь двумя появлениями A появится ровно t раз $\bar{A}$). В первой части работы рассматривается схема Бернулли, а во второй — испытания, связанные в цепь Маркова.

С. Х. Сираждинов

3197. О стохастической непрерывности вещественных марковских случайных процессов. Фукс (Sur la continuité stochastique des processus stochastiques réels de Markoff. Fuchs Aimé), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 22, 1388—1390 (франц.)

Пусть $X(t)$ — траектория марковского случайного процесса на прямой. Утверждается, что следующие три свойства непрерывности $X(t)$ в точке t_0 равносильны: 1) для любого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно начального распределения вероятностей $\lim_{t\to t_0} P(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно начального распределения вероятностей $\lim_{h\to 0} P(\sup_{|t-t_0|<h} |X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0$; 3) для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по всем значениям $X(t_0)$ $\lim_{t\to t_0} P(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0$. Утверждается также равносильность трех вводимых в работе определений непрерывности $X(t)$ на отрезке $[a, b]$. Большая часть результатов реферируемой работы по существу доказана (хотя и не сформулирована отдельно) в работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, 563—572); см. также РЖМат, 1954, 1728.

Е. Б. Дынкин

3198. Эргодическое свойство процесса броуновского движения. Дерман (Ergodic property of the Brownian motion process. Derman Cyrus), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 12, 1155—1158 (англ.)

Для винеровского процесса $X(t)$ на прямой доказывается теорема: Если $f(x)$ и $g(x)$ — любые действительные, измеримые по Борелю и суммируемые на всей оси $-\infty < x < \infty$ функции, причем $\bar{g} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx \neq 0$, то с вероятностью 1,

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(X(t))\,dt \Big/ \int_0^T g(X(t))\,dt = \bar{f}/\bar{g}, \qquad (1)$$

где доказано, что (1) выполняется в смысле сходимости по вероятности (см. РЖМат, 1954, 1729).

М. И. Грабарь

3199. Обобщение теоремы Винера — Хинчина на нестационарные процессы. Ламнард (Generalization of the Wiener — Khintchine theorem to nonstationary processes. Lampard D. G.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 6, 802—803 (англ.)

Пусть $i_1(t)$ и $i_2(t)$ — два, вообще говоря, нестационарных случайных процесса; $S_k(t_0; f)$, где $k = 1, 2$, а f — частота, — преобразование Фурье (в комплексной форме) функции, равной $i_k(t)$ при $t \leqslant t_0$ и равной нулю при $t > t_0$. В таком случае значение взаимной спектральной плотности процессов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ определяется равенством $w_{12}(t; f) = 2\frac{\partial}{\partial t}\{S_1(t; f)\,\overline{S_2^*(t; f)}\}$, где звездочка означает комплексно сопряженную величину, а черта есть знак осреднения (перехода к математическому ожиданию); при $i_1(t) = i_2(t)$ это определение эквивалентно определению мгновенной спектральной плотности процесса, предложенному Пейджем (Page C. H., J. Appl. Phys., 1952, 23, № 1, 103—106).

Приводятся формулы, связывающие $w_{12}(t, f)$ с корреляционными функциями $\psi_{12}(t; \tau) = \overline{i_1(t)\,i_2(t-\tau)}$, $\psi_{21}(t; \tau) = \overline{i_2(t)\,i_1(t-\tau)}$.

Доказательство этих формул проведено чисто формально, без всякого выяснения условий, при кото-

рых имеют смысл выписываемые несобственные интегралы и законны проводимые преобразования. Дальнейшему обсуждению полученных здесь результатов посвящена работа Тэрнера (Turner C. H. M., J. Appl. Phys., 1954, 25, № 11, 1347—1351). А. М. Яглом

3200. **Цепи Маркова. Михок** (Lanțuri Marcov. Mihoc Gh.), Gaz. mat. și fiz., 1954, **A6**, № 10, 438—446; № 11, 485—493 (рум.)

3201 К. **Элементарное введение в теорию вероятностей. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.,** Перев. с русс. (Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Gnedenko B. W., Chintschin A. J. Übertrag. Nach der 3 Aufl. aus dem Russisch von Karl-Heinz Rupp., Berlin, Veb. Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 135 S.) (нем.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3202. **Границы для функции распределения с заданными первыми моментами. Ройден** (Bounds on a distribution function when its first n moments are given. Royden H. L.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 361—376 (англ.)

Чебышевым и Марковым были указаны границы для функции распределения $F_\xi(x)$ в случае, когда заданы первые моменты $M\xi^i = M_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Вальд (Wald A., Trans. Amer. Math. Soc., 1939, 26, 280—306) решил задачу о точных границах для $F_\xi(x)$ неотрицательной случайной величины ξ, если заданы моменты $M\xi^i = M_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. В статье дается другое решение той же задачи. При этом получены аналитические формулы, позволяющие найти как границы функции распределения, так и те распределения, для которых эти границы достигаются. В статье также даются точные границы для $F_\xi(x)$ в случае, когда ξ — унимодальная неотрицательная случайная величина с заданными математическим ожиданием и дисперсией.

Б. А. Севастьянов

3203. **О стохастическом аппроксимационном методе. Чжун** (On a stochastic approximation method. Chung K. L.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 463—483 (англ.)

Рассматривается метод стохастической итерации Роббинса и Монро (РЖМат, 1954, 3406). При двух различных предположениях автор показывает, каким образом следует выбрать последовательность $\{a_n\}$, чтобы моменты величины $x_n - \theta$ стремились к нулю при $n \to \infty$. Доказывается, что при надлежащей нормировке величины x_n являются асимптотически нормальными. Подробно рассматривается случай, когда функция $M(x)$ является линейной. Л. Н. Большев

3204. **Обобщение метода m ранжировок. Бенард, Элтерен** (A generalization of the method of m rankings. Benard A., Elteren Ph. van), Proc., Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 275—276 (англ.)

Указывается непараметрический критерий для проверки гипотезы, что m ранжировок одинаковой длины независимы и что все перестановки рангов имеют равную вероятность. Н. В. Смирнов

3205. **Несостоятельность метода наибольшего правдоподобия. Басу** (An inconsistency of the method of maximum likelihood. Basu D.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 144—145 (англ.)

В работе Неймана и Скотта (J. Neyman, E. L. Scott, Econometrica, 1948, 16, 1—32) был построен пример несостоятельной оценки максимального правдоподобия, построенной по независимым, но различно распределенным наблюдениям. В реферируемой работе показывается, что если X_n — последовательность независимых величин, имеющих одинаковые распределения

$$P\{X=1\} = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta \in A \\ 1-\theta, & \text{если } \theta \in B \end{cases};$$

$$P\{X=0\} = 1 - P\{X=1\},$$

где A — множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, B — произвольное счетное множество иррациональных чисел отрезка $[0,1]$, то оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра θ является несостоятельной. Автор приводит также простую конструкцию состоятельной оценки этого параметра. Как указывает автор, существование такой оценки, когда A и B — произвольные счетные множества, доказано в неопубликованной работе Крафта (Kraft Ch., On the problem of consistent and uniformly consistent statistical procedures; Unpubliched Ph. D. thesis submitted to the University of California (1954)). Н. Н. Ченцов

3206. **Согласование теорий критерия χ^2, рассматриваемого в метрическом и порядковом аспектах. Ланкастер** (A reconcillation of χ^2, considered from metrical and enumerative aspects. Lancaster H. O.), Sankhya, 1953, **13**, parts 1—2, 1—10 (англ.)

Указывается построение ортогонального преобразования, приводящего известное выражение критерия $\chi^2 = \sum_{i=1}^k q_i^2$ (где $q_i = (a_i - ap_i)/\sqrt{ap_i}$, $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k a_i/a = 1$, p_i — вероятности, a_i/a — частоты классов в выборке объема a) к сумме $(k-1)$ квадратов. Матрица $G = \| g_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ этого преобразования определяется равенством $g_{ij} = g_{i-1}(x_i)\sqrt{p_j}$, где $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{k-1}(x)$ — ортонормированные полиномы, связанные с дискретным распределением вероятностей: $\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_k \\ p, & p_2, & \ldots, & p_k \end{pmatrix}$. Компоненты y_j $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ вертикального вектора $\{y\} = G\{q\}$ представляют нормированные и некоррелированные случайные величины, распределенные при большом a приближенно нормально. Отсюда усматривается, хотя без строгого обоснования, применимость известного закона распределения χ^2 с $(k-1)$ степенями свободы. Указываются аналогичные преобразования и для более сложных случаев применения критерия. Отметим, что сходные идеи развивались Фогом (РЖМат, 1954, 2662). Н. В. Смирнов

3207. **Быстрый метод определения основной площади при обследовании древостоев.— Приложение интегральной геометрии к задачам выборочного изучения площадей. Масуяма** (A rapid method of estimating basal area in timber survey.— An application of integral geometry to areal sampling problems. Masuyama Motosaburo), Sankhya, 1953, **12**, part 3, 291—302 (англ.)

Задаче определения основной площади при обследовании древостоев придается следующая геометрическая форма. Пусть ν непересекающихся выпуклых фигур расположено в некоторой плоской области площади T. Обозначим через φ сумму площадей этих фигур и через λ сумму длин их контуров. Для оценки величин ν, φ и λ с помощью выборочного метода рекомендуется назначить некоторое количество $N \geqslant 3$ чисел r_i, затем выбрать наудачу в данной области n_i точек и подсчитать число k_i фигур, расстояние которых до одной из выбранных точек не превосходит r_i. Утверждается, что отношение $k_i/n_i = \hat{p}_i$ будет почти оценкой величины

$$p_i = (\varphi + \lambda r_i + \nu\pi r_i^2)/T. \qquad (1)$$

Доказательство основано на применении формулы Штейнера (Бляшке В., Успехи. матем. наук, 1938, 5, 119). Неизвестные параметры находятся из системы линейных уравнений (1). Исследуется точность метода.

3208. Формула для вычисления мощности критерия дисперсионного анализа. Николсон (A computing formula for the power of the analysis of variance test. Nicholson W. L.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 3, 607—610 (англ.)

Рассматривается мощность известного критерия

$$F = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \Big/ \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n} y_j^2 ,$$

где x_i и y_j распределены по нормальным законам $N(\theta_i, \sigma^2)$ и $N(0, \sigma^2)$ соответственно. Если проверяемая гипотеза $H_0: \theta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ложна, то распределение F, а следовательно, и мощность этого критерия зависит только от m, n и $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2$. Автор показывает, что данное Тангом (Tang P. C., Statist. Research Memoirs, 1938, **2**, 143) выражение для мощности F допускает преобразование, приводящее к удобному для вычисления виду, если m и n — четные числа. Для $n = 2, 4, 6, 8$ и 10 указываются простые способы расчета мощности.

Н. В. Смирнов

3209. Многомерная квантификация. Хаяси (Multidimensional quantification. Hayashi Chikio), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 61— 65 (англ.)

Конечная совокупность элементов обследуется по R-признакам. По каждому признаку имеется ряд категорий и обследуемый элемент причисляется к одной из них. Каждой категории любого из признаков ставится в соответствие некоторая числовая оценка (балл) по этому признаку. Сумма этих баллов по всем признакам составляет отметку элемента в результате сложной классификации. На основе полученной квантификации совокупности требуется произвести ее «расслоение» («стратификацию»), т. е. разбить ее на данное число S подмножеств — слоев; при этом каждому слою будет отвечать сумма отметок всех входящих в него элементов. В качестве меры эффективности проведенной квантификации для указанного расслоения рассматривают корреляционное отношение $\eta^2 = \sigma_b^2/\sigma^2$, σ_b^2, где σ_b^2 — дисперсия отметок по слоям, σ^2 — общая дисперсия отметок. Автор показывает, что метод последовательных приближений можно применить для получения оптимальной системы балловой квантификации.

Н. В. Смирнов

3210. Планировка опыта, в котором некоторые размещения вариантов недопустимы. Кокс (The design of an experiment in which certain treatment arrangements are inadmissible. Cox D. R.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 287—295 (англ.)

Разбор некоторых случаев применения дисперсионного анализа, в которых исключение систематических расхождений не может быть осуществлено, по практическим соображениям, с помощью обычных схем размещения вариантов опыта (например, по методу латинских квадратов).

Н. В. Смирнов

3211. Оценка компонент стохастических структур. Вольфовиц (Estimation of the components of stochastic structures. Wolfowitz J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 7, 602—606 (англ.)

Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $G(z)$ и пусть α — некоторая неизвестная постоянная ($|\alpha| < 1$). Требуется найти состоятельные оценки для α и $G(z)$, зависящие от наблюденных величин $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i = u_i + \alpha u_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\lambda_n = (x_1, \ldots, x_n)$ и пусть $\delta^*[A(z), B(z)]$ — расстояние между двумя функциями распределения, удовлетворяющее обычным условиям (например, расстояние в смысле Леви). Утверждается без доказательства, что $\hat{a}(\lambda_n)$ и функция распределения $\hat{H}(z \mid \lambda_n)$ будут состоятельными оценками для α и $G(z)$ соответственно (последнее — в смысле расстояния δ^*), если

$$\delta^*[F_n(z), D(z \mid \hat{a}, \hat{H})] < \frac{1}{n^2} + \inf_{a, H}\delta^*[F_n(z), D(z \mid a, H)], \quad (1)$$

где $F_n(z)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по всем $x_1, \ldots, x_n$, и

$$D(z \mid a, H) = \begin{cases} H(z) * H(z/a) & (a > 0), \\ H(z) * [1 - H(z/a + 0)] & (a < 0), \\ H(z) & (a = 0). \end{cases}$$

Нижняя грань в правой части (1) вычисляется для всех действительных чисел a и всех функций распределения $H(z)$.

Л. Н. Большев

3212. О мощности непараметрических критериев согласия. Бернбаум (On the power of a distribution-free test of fit. Birnbaum W. Z.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 278—279 (англ.)

3213. Трехпараметрическое семейство частично сбалансированных планов с неполными блоками и с двумя ассоциированными классами. Берман (A three parameter family of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Berman Gerald), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 490—493 (англ.)

3214. О сбалансированных планах с неполными блоками. Джонс (On balanced incomplete block designs. Jones B. W.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 29 (англ.)

3215 Д. К вопросу проверки некоторых сложных статистических гипотез. Большев Л. Н., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3216. К теории очередей с несколькими обслуживающими устройствами. Кифер, Вольфовиц (On the theory of queues with many servers. Kiefer J., Wolfowitz J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, № 1, 1—18 (англ.)

Рассматриваются системы массового обслуживания с ожиданием, в самых общих условиях: любое число s обслуживающих устройств («линий»), любой закон распределения $G(x)$ для промежутка времени между двумя последовательными заявками («вызовами») и любой закон распределения $H(x)$ длительности обслуживания («разговора»). Обслуживание вызовов производится в порядке их поступления. Началом отсчета времени служит момент некоторого вызова, которому приписывается номер 0. Пусть вообще t_i — момент i-го вызова. Пусть $t_i + u_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ означает момент времени, в который j-я линия заканчивает обслуживание тех из $i-1$ первых вызовов, которые приходятся на ее долю; положим $u'_{ij} = \max(0, u_{ij})$ и пусть $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{is}$ — группа чисел u'_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant s)$, расположенных в порядке возрастания. Тогда $w_{i1}, \ldots, w_{is}$ есть случайный вектор в s-мерном пространстве, функция распределения которого обозначается через $F_i(x_1, \ldots, x_s)$. Непосредствен-

но очевидно, что w_{i1} есть время ожидания i-го вызова и что законом распределения этого времени ожидания служит функция $F_i^*(x) = F_i(x, \infty, \ldots, \infty)$.

Элементарные соображения легко позволяют установить, что при $i \to \infty$ функция $F_i(x_1, \ldots, x_s)$ стремится к некоторой предельной функции $F(x_1, \ldots, x_s)$, которая, однако, может иметь полную вариацию < 1 и, следовательно, не быть функцией распределения. Аналогичным образом функция $F_i^*(x)$ при $i \to \infty$ всегда стремится к некоторой предельной функции $F^*(x)$, причем возможен случай $F^*(+\infty) < 1$, реально означающий, что для вызовов с большими номерами время ожидания, с некоторой ограниченной снизу вероятностью, становится бесконечно большим.

Основная часть статьи посвящена исследованию условий, при которых предельная функция $F(x_1, \ldots, x_s)$ является функцией распределения. В этом направлении авторы приходят к результату, замечательному своей простотой и законченностью. Пусть a есть средняя длительность разговора, и b — среднее расстояние между соседними вызовами. Тогда для того чтобы F была функцией распределения, необходимо и достаточно иметь $a < sb$. Метод исследования состоит в составлении для функции F интегрального уравнения, содержащего данные законы распределения $G(x)$ и $H(x)$. Доказывается, что среди решений этого уравнения в случае $a < sb$ имеется в точности одна функция распределения, а в случае $a \geqslant sb$ — ни одной такой функции.

В заключительном параграфе находится закон распределения числа ожидающих непосредственно перед началом разговора i-го вызова. Все доказательства приводятся полностью, хотя и в очень краткой форме.

А. Я. Хинчин

3217. Стохастическая теория телефонных линий для произвольного начального состояния. Поллачек (Développement de la théorie stochastique des lignes téléphoniques pour un état initial quelconque. Pollaczek Félix), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 25, 1764—1766 (франц.)

Рассматривается полнодоступный пучок из s линий. Вызовы обслуживаются в порядке их поступления, и система может быть как с потерями, так и с ожиданием. Пусть $\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots$ — последовательные моменты поступления вызовов, а $\ldots, T_{-1}, T_0, T_1, \ldots$ — длины соответствующих разговоров. Все T_i подчинены одному и тому же закону распределения; все $Y_i = X_{i+1} - X_i$ также подчиняются одному и тому же закону. Пусть $X_0 + t_1, \ldots, X_0 + t_s$ (нумерация в произвольном порядке) — s последних моментов окончания разговоров для вызовов, поступивших до момента X_0. В каждом конкретном случае все характеристики, описывающие течение процесса после момента X_1 могут быть выражены через s чисел $t_i^* = \max(t_i, 0)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ и через случайные величины T_i, Y_i $(i = 0, 1, \ldots)$; все же вероятности и математические ожидания, относящиеся к таким характеристикам, будут симметрическими функциями чисел t_i^* $(1 \leqslant i \leqslant s)$. В более ранней работе автора (Ann. Inst. H. Poincaré, 1949, 11, 135—173) рассматривался случай $t_i^* = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, т. е. случай, когда в начальный момент все линии свободны. При этом для систем с ожиданием отыскание производящих функций всех искомых распределений было сведено к решению некоторой системы s интегральных уравнений. В последующих работах автора задача решалась аналогичным путем для систем с потерями, но также в предположении $t_i^* = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. В настоящей заметке приводятся (без доказательств) формулы, решающие ту же задачу при произвольных $t_1^*, \ldots, t_s^*$ как для систем с ожиданием, так и для систем с потерями.

А. Я. Хинчин

3218. Случайные процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенной цепи Маркова. Кендалл (Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. Kendall David G.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 338—354 (англ.)

За исключением того элементарного случая, когда прибывающие клиенты образуют простейший поток (пуассоновское распределение), а время обслуживания распределено по показательному закону, случайные процессы, описывающие изменение очереди, не являются марковскими, что обычно заставляло создавать для каждого из таких процессов специальные методы исследования. Автор предлагает для этой цели единый метод «вложенной цепи Маркова». Пусть $X(t)$ — случайный процесс, и θ_t — некоторое множество функций, определенных в области $(-\infty, t)$. Обозначим для данной реализации $X(t)$ через Π множество тех значений u, для которых функция $X(t)$ в области $(-\infty, u)$ совпадает с одной из функций множества θ_u. Пусть, далее, для каждого $u \in \Pi$, f_u означает некоторый функционал, определенный на множестве θ_u, так что $Y(u) \equiv f_u\{X(t); t \leqslant u\}$ определено для любого $u \in \Pi$. Допустим, что для всех u $(-\infty < u < +\infty)$ нам удалось выбрать множества θ_u и функционалы f_u таким образом, что выполняются следующие два требования: 1) с вероятностью 1 множество Π не имеет конечных предельных точек [будем в этом случае обозначать его элементы в порядке возрастания через $\ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots$] и 2) если Y_m для любого $u_m \in \Pi$ означает $Y(u_m)$, то условный закон распределения $\{Y_{n+1} | Y_n, Y_{n-1}, \ldots\}$ для любого n совпадает с условным законом распределения $\{Y_{n+1} | Y_n\}$. Тогда случайные величины $\ldots, Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1}, \ldots$ образуют «вложенную в данный процесс» цепь Маркова.

При удачном выборе произвольных элементов этой конструкции характерные черты получаемой цепи Маркова могут быть изучены и позволяют найти и некоторые черты лежащего в их основании случайного процесса $X(t)$. Чрезвычайная абстрактность этой общей схемы не позволяет, однако, как замечает автор, смотреть на нее как на какой-либо рецепт практических действий в конкретных случаях; отыскание таких действий остается [вообще говоря, весьма трудной] особой задачей для каждого отдельного типа процессов.

В качестве иллюстрации автор занимается исследованием очереди в следующих трех случаях: 1) простейший поток клиентов, любой закон распределения времени обслуживания, одно обслуживающее устройство; 2) то же при весьма общих предположениях о потоке клиентов; 3) общий поток клиентов, показательное распределение времени обслуживания, любое число обслуживающих устройств. Библ. 30 назв.

А. Я. Хинчин

3219. О стохастических процессах, порождаемых процессом Пуассона, и об их применениях в физике. Такач (On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. Takács Lajos), Acta math., 1954, 5, № 3—4 203—236 (англ.; рез. русс.)

Рассматривается следующая общая задача, многие частные случаи которой изучались различными авторами и нашли себе большое число применений в целом, ряде вопросов физики и техники.

В основу полагается простейший «пуассоновский» поток однородных событий с переменной интенсивностью $\lambda(u)$ в момент u, так что среднее число событий в промежутке $(0, t)$ равно $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$, а вероятность наступления в этом промежутке k событий равна

$$P(t, k) = e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Каждое отдельное событие состоит в появлении некоторого импульса (сигнала, эффекта), амплитуда которого по истечении времени u равна данной функции $f(u, \chi)$ от u и случайной величины (параметра) χ, связанной с данным событием (чаще всего χ означает начальную амплитуду импульса). Параметры χ, связанные с различными событиями, предполагаются взаимно независимыми и подчиненными одному и тому же данному закону распределения $H(x)$. Амплитуды импульсов линейно суперпонируются, и задача состоит в исследовании их суммы как случайного процесса, в зависимости от данных функций $\lambda(u)$, $f(u, \chi)$ и $H(x)$.

Автор различает две проблемы.

1. Исходный процесс Пуассона рассматривается в интервале $(0 \leqslant u < \infty)$, моменты наступления событий обозначаются через $u_1, u_2, \ldots$, соответствующие значения параметра χ — через $\chi_1, \chi_2, \ldots$. Исследованию подлежит случайный процесс $\eta(u) = \Sigma_{0 \leqslant u_k < u} f(u - u_k, \chi_k)$, в частности его закон распределения $P\{\eta(u) \leqslant x\} = G(u, x)$.

2. В случае постоянного $\lambda(u) = \lambda$, можно рассматривать и (очевидно, стационарный) процесс $\eta^*(u) = \Sigma_{-\infty < u_k \leqslant u} f(u - u_k, \chi_k)$ с законом распределения $G^*(x)$.

В первую очередь исследуется наиболее разработанный частный случай

$$f(u, \chi) = \begin{cases} \chi e^{-\alpha u} & (u \geqslant 0), \\ 0 & (u < 0), \end{cases}$$

где α — положительная постоянная, а χ — неотрицательная случайная величина. Метод состоит в использовании вспомогательного случайного процесса $\zeta(u, z) = \Sigma_{u - z \leqslant u_k \leqslant u} f(u - u_k, \chi_k)$ с законом распределения $F(z, x)$; если этот закон известен, то $G(u, x)$ и $G^*(x)$ находятся непосредственно: $G(u, x) = F(u, x)$ и $G^*(x) = \lim_{z \to \infty} F(z, x)$. Для $F(z, x)$ составляется интегро-дифференциальное уравнение, единственным решением которого при данных начальных условиях служит $F(z, x)$. Если характеристическая функция (х. ф.) закона $H(x)$ есть $\varphi(\omega)$, а х. ф. закона $F(z, x)$ — $\Phi(z, \omega)$, то

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z \lambda(z - v)\,[1 - \varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv,$$

чем и завершается в принципе определение $F(z, x)$ через данные задачи. В случае $\lambda(u) = \lambda$ и в предположении $M = \int_0^\infty x\,dH(x) < +\infty$ закон $F(z, x)$ при $z \to \infty$ стремится к предельному закону $F(x)$ с х. ф.

$$\Phi(\omega) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1 - \varphi(\omega v)}{v}\,dv\right\}.$$

Если х. ф. законов $G(u, x)$ и $G^*(x)$ обозначить соответственно через $\psi(u, \omega)$ и $\psi^*(\omega)$, то отсюда

$$\log \psi(u, \omega) = -\int_0^u \lambda(u - z)\,[1 - \varphi(\omega e^{-\alpha z})]\,dz,$$

и в случае $M < +\infty$

$$\log \psi^*(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1 - \varphi(\omega v)}{v}\,dv,$$

чем и определяются искомые законы $G(u, x)$ и $G^*(x)$. После определения некоторых связанных с этими законами средних значений, автор переходит к общему случаю формы импульса $f(u, \chi)$. И здесь орудием исследования служит вспомогательный процесс $\zeta(u, z)$. Для функции $\Phi(z, \omega)$ автор получает, аналогично прежнему, выражение

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z \lambda(z - v)\,[1 - \varphi(v, \omega)]\,dv,$$

где $\varphi(v, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega f(v, x)}\,dH(x)$ есть, очевидно, х. ф. амплитуды импульса возраста v. В случае $\lambda(u) = \lambda$ и конечности интеграла

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty |f(z, x)|\,dH(x)\right\} dz \qquad (1)$$

существует $\lim_{z \to \infty} F(z, x) = F(x)$, и для х. ф. $\Phi(\omega)$ закона $F(x)$ имеет место выражение

$$\log \Phi(\omega) = -\lambda\int_0^\infty [1 - \varphi(z, \omega)]\,dz.$$

Наконец, в случае конечности того же интеграла (1) мы находим

$$\log \psi(u, \omega) = -\int_0^u \lambda(u - z)\,[1 - \varphi(z, \omega)]\,dz,$$

$$\log \psi^*(\omega) = -\lambda\int_0^\infty [1 - \varphi(z, \omega)]\,dz.$$

Легко находятся и семиинварианты исследуемых распределений.

Особый параграф посвящен спектральному анализу стационарного процесса $\eta^*(u)$. Пусть m и σ^2 соответственно означают среднее значение и дисперсию $\eta^*(u)$. Автокорреляционная функция этого процесса имеет выражение

$$R(\tau) = \frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty \left|\int_0^\infty f(u, x) f(u - \tau, x)\,dH(x)\right| du.$$

Спектральное представление ее имеет вид

$$R(\tau) = \frac{4\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty |A(\omega, x)|^2\,dH(x)\right]\cos\omega\tau\,d\omega,$$

где $A(\omega, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(u, x) e^{-i\omega u}\,du$. Если положить $R(\tau) = \int_0^{+\infty} \cos\tau\omega\,dF(\omega)$, то «спектральная функция» $F(\omega)$ дифференцируема и

$$F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty |A(\omega, x)|^2\,dH(x).$$

В статье рассмотрено много физических примеров, список которых легко можно было бы значительно расширить.

А. Я. Хинчин

3220. О стохастической теории электронных счетчиков. Поллачек (Sur la théorie stochastique des compteurs électroniques. Pollaczek Félix), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 7, 766—768 (франц.)

Каждая попадающая в счетчик частица, независимо от того, регистрирует ее счетчик или нет, лишает счетчик способности регистрировать последующие частицы в течение случайного времени T. Требуется, зная функцию распределения $F_1(t)$ величины T и функцию распределения $F_2(t)$ времени между появлениями двух соседних частиц, найти функцию распределения $p(t)$ времени между двумя соседними регистрациями.

При весьма общих предположениях относительно функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$ автор выражает $p(t)$ через решение некоторого интегрального уравнения; в случае пуассоновских частиц ($F_2(t) = 1 - e^{-ct}$) это уравнение решается и $p(t)$ находится в виде ряда из интегралов.

А. А. Юшкевич

3221. Вероятность безопасности упругих систем. Погожельский (Prawdopodobieństwo bez-

pieczeństwa konstrukcji. Pogorzelski W.), Zastosow. mat., 1954, 2, № 1, 46—61 (польск.; резюме русс., англ.)

3222. **Вероятность безопасности механических конструкций. Погожельский В.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 8, 369—372

Вероятность безопасности механических конструкций. Погожельский (Probabilité de la sécurité d'une construction mécanique. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1954, 2, № 8, 363—366 (франц.)

3223 К. **Теория информации. Гольдман** (Information theory. Goldman Stanford, New York, Prentice-Hall, Inc., 1954, 385 p.) (англ.)

Реферируемая книга, насколько известно референту, может рассматриваться как первое систематическое руководство по теории информации (называемой также статистической теорией связи). Известно, что первые основы этого учения были заложены работами Шеннона 1947—1948 гг. и что новая теория породила обильную литературу, посвященную преимущественно практическим приложениям теории информации. Проблематика столь молодой научной дисциплины, разумеется, ни в одном направлении не может почитаться исчерпанной, так что любое общее руководство здесь обречено иметь лишь сравнительно кратковременную ценность; с другой стороны, теория информации со времени своего возникновения накопила уже столько научных фактов, что изучать ее по одной журнальной литературе становится все более и более трудным, а потребность в систематическом руководстве все более ощутительной.

Книга Гольдмана стремится охватить как общую теорию, так и широкий круг приложений. Она предназначена для инженера-связиста; поэтому для ее усвоения читатель должен обладать довольно значительной технической подготовкой. Напротив, математическая подготовка читателя предполагается весьма ограниченной; в частности, даже основные понятия теории вероятностей излагаются во всей подробности. В связи с такой целевой установкой книга, подобно всем изданиям этого рода, не может претендовать на строгость и законченность математических выводов.

Книга содержит 9 глав и ряд приложений. Передаче дискретных сигналов посвящена только одна первая глава. Содержание ее примерно совпадает с содержанием соответствующего раздела основоположной работы Шеннона. Имеются небольшие расхождения в терминологии и списке основных понятий; так, у Гольдмана определенное количество информации приписывается первично не полю вероятностей, а каждому отдельному элементарному событию этого поля; для всего же поля количество информации является уже вторичным понятием; далее, Гольдман называет эргодическим рядом только однородную и стационарную цепь Маркова. Все эти особенности, однако, не оказывают заметного влияния на существо дела.

Начиная со второй главы речь идет уже только о передаче непрерывных сигналов. Гл. 2 посвящена в основном так называемой теореме Котельникова о функциях с ограниченным спектром. Возможность однозначного определения такой функции по ее значениям в эквидистантных «пробных точках» (sampling points) позволяет свести анализ непрерывного сигнала к исследованию дискретной последовательности мгновенных сигналов (с континуальным алфавитом).

В гл. 3, после нескольких вводных параграфов, автор переходит к описанию важнейших типов встречающихся на практике шумов (помех): «случайные», «белые», «гауссовы» шумы; определение всех этих типов тесно связано с их спектральным разложением и по большей части дается прямо в спектральных терминах. Для всех рассматриваемых типов шумов даются законы их суперпозиции. В заключение приводится разделение всех «нежелательных сигналов» (помех) на группы: 1) шумы, помехи, не когерентные ни с какими «желательными» сигналами; 2) перекрытия — помехи, когерентные с чужими желательными сигналами; 3) искажения — помехи, когерентные со своими желательными сигналами.

Гл. 4 посвящена энтропии непрерывных распределений. После анализа определения автор рассматривает вариационным методом задачу о распределении с наибольшей энтропией при дополнительных условиях того или другого типа: 1) при данной максимальной амплитуде, 2) при данном среднем квадрате амплитуды и 3) при данном максимуме амплитуды в случае заведомо положительного сигнала. В случае второй задачи, в частности, максимальной энтропией обладает «случайный» шум. Показывается, что при данном определении энтропии эта величина зависит от системы координат и что эта зависимость не отражается на технически актуальных комбинациях различных энтропий (например, на быстроте передачи информации, пропускной способности каналов и т. п.).

В гл. 5 рассматривается задача о вычислении пропускной способности канала при данном характере шумов и данных дополнительных условиях. Сначала детально изучается случай фиксированного среднего квадрата P амплитуды сигнала. Для «случайного» шума пропускная способность находит себе известное точное выражение $W \log [(P + N)/N]$, где $2W$ — ширина спектра, а N — мощность шума. В случае шума произвольного вида для пропускной способности получаются лишь оценки сверху и снизу; для гауссовых шумов эти оценки могут быть значительно уточнены. Далее более кратко рассматривается та же задача при фиксированной максимальной амплитуде сигнала.

В гл. 6 знаменитая теорема Шеннона о каналах с шумами переносится на непрерывную сигнализацию (в предположении «случайного» шума и фиксированной средней мощности сигнала). При доказательстве эффектно используется известное свойство многомерных сфер: при большом числе измерений подавляющая часть объема сферы сосредоточена вблизи ее поверхности.

Гл. 7 содержит описание, с точки зрения теории информации, целого ряда схем модуляции передаваемых сигналов; особое внимание уделяется влиянию той или иной модуляции на информационные характеристики передачи, а также на снижение шумов.

В гл. 8 (о суммарно-обзорном характере которой автор предупреждает читателя) рассматриваются вопросы фильтрации и прогнозов. Автор вначале занимается задачей о выборе оптимального линейного фильтра, дающего наибольшую величину отношения амплитуды сигнала к средней амплитуде шума. Далее следуют: общая теория корреляции; связь автокорреляции со спектром мощности; автокорреляционная функция «случайного» шума и другие примеры таких функций; применение теории корреляции к прогнозам и к отделению сигнала от шума с помощью выбора надлежащих фильтров (линейная экстраполяция стационарного процесса с минимальной средней квадратической ошибкой).

Заключительная гл. 9 дает обзор всего изложенного; при этом количество упоминаемого материала очень невелико, и все внимание направлено на руководящие идеи различных разделов.

В «Дополнениях» помещены преимущественно опущенные в тексте выводы формул и доказательства теорем. Имеются также таблицы двоичных логарифмов чисел от 1 до 10 000. А. Я. Хинчин

См. также: 2682 К, 2690 К, 3138, 3353

ГЕОМЕТРИЯ

3224. Построение некоторых формул и последовательностей. Зетель С. И., Матем. в школе, 1955, № 3, 5—12

3225. Одно доказательство теоремы Морлея. Любин (A proof of Morley's theorem. Lubin Clarence), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 2, 110—112 (англ.)

При помощи комплексных чисел доказывается теорема Морлея: точки пересечения прямых, делящих на три равные части внутренние углы треугольника, являются вершинами равностороннего треугольника. С. И Зетель

3226. Теорема о высотах треугольника, доказываемая путем рассмотрения углов. Схю (Stelling over de hoogtelijnen van een driehoek bewezen door te werken met hoeken. Schuh Fred), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1954, **42**, № 2, 114—116 (голл.)

Из рассмотрения углов, вписанных в окружность, легко доказывается теорема о пересечении высот треугольника в одной точке. С. И. Зетель

3227. Новые методы доказательства формулы Шапль-Ланден-Эйлера и теоремы Фейербаха. Кавалларо (Nuovi metodi dimostrativi delle formule di Chapple-Landen-Euler e del teorema di Feuerbach. Cavallaro Vincenzo G.), Archimede, 1954, **6**, № 2, 70—73 (итал.)

Формула Эйлера (Шапль-Ланден-Эйлера) $\delta^2 = R^2 - 2Rr$, где δ — расстояние между центрами кругов, описанного около треугольника и вписанного, может быть получена, как следствие теоремы Штаудта: Если A, B, C, D — четыре точки, лежащие в одной плоскости, и если $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(D)$ — степени точек соответственно относительно круга, описанного около BCD, CAD, ABD, ABC, то площадь треугольника $BCD \cdot p(A)$ = площади треугольника $CAD \cdot p(B)$ = площади треугольника $ABD \cdot p(C)$ = площади треугольника $ABC \cdot p(D)$.

Теорема Фейербаха о касании круга девяти точек и кругов вписанного в треугольник вневписанных легко получается из теоремы Айяра (Aijar). Если F и F' — соответственно сопряженные изогональные точки треугольника, то $OF \cdot OF' = 2R \cdot O_9M$, где O — центр описанного круга, M — середина FF', O_9 — центр круга точек. С. И. Зетель

3228. Об одном способе геометрических построений. Улчар (За еден вид геометриски конструкции. Улчар Јоже), Билтен друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, **5**, 61—70 (македон.)

Статья содержит решение пяти задач на построение при помощи вращений и параллельных переносов. Например, при помощи вращения решается задача: построить параллелограмм, у которого две вершины лежат на одной из заданных в плоскости окружностей, две на другой, а диагонали пересекаются в заданной точке.

При помощи вращения и переноса решается задача: построить квадрат со сторонами, лежащими на прямых, проходящих через четыре заданные в плоскости точки.

Решения всех задач приведены с достаточной полнотой, рассмотрены случаи вырождения и выяснены условия возможности построения. Г. И. Дринфельд

3229. По поводу ортополюса. Тебо (Au sujet de l'orthopôle. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 1—2, 21—26 (франц.)

Доказана теорема: Центры окружностей ортополюсов для трех четырехугольников $Q_1 = PABC$, $Q_2 = PCBA$, $Q_3 = PACB$ с вершинами в четырех данных точках P, A, B, C лежат на одной прямой. На этой прямой находятся точки, соответствующие в преобразовании гомотетии ортоцентрам четырех треугольников, образованных медиатрисами чевиан, соединяющих одну из данных точек с тремя другими. Центром гомотетии является данная точка, отношение гомотетии равно 1/2. С. И. Зетель

3230. Дополнительные тетраэдры. Тебо (Tétraèdres supplémentaires. Thébault Victor), Mathesis, 1953, **62**, № 8—9—10, 289—293 (франц.)

Дополнительными называются тетраэдры $DABC$ и $DA'B'C'$, получаемые при пересечении произвольной плоскостью P двух дополнительных триэдров (с общей вершиной D и ребрами, перпендикулярными граням другого). Доказывается, что основания ABC и $A'B'C'$ таких тетраэдров гомологичны и ортологичны. Устанавливается связь между изогональю общей высоты DD' одного из дополнительных тетраэдров по отношению к триэдру другого тетраэдра и прямой, соединяющей общую вершину D с центром O сферы, описанной около первого тетраэдра, и др.

Рассматриваются свойства ортоцентрических дополнительных тетраэдров, которые оказываются ортоцентрическими одновременно. Н. М. Несторович

3231. Геометрия тетраэдра. Тебо (Geometry of the tetrahedron. Thébault Victor), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 699—700 (англ.)

Рассматриваются свойства тетраэдра, у которого точка Монжа лежит в одной из граней тетраэдра. Если плоскость проходит через точки a, b, c, расположенные соответственно на гранях DBC, DCA, DAB тетраэдра $T = ABCD$, и через вершину D, то плоскость, определяемая изогонально сопряженными точками a', b', c', проходит через вершину D, и обратно. Из этой теоремы следует, что если точка Монжа расположена в грани тетраэдра, то противоположная вершина и ортоцентры граней, заключающих эту вершину, компланарны, и обратно. Противоположная вершина и центры окружностей, описанных около этих граней, компланарны и обратно. С. И. Зетель

3232. Теорема о круге. Зихардт (Ein Satz vom Kreis. Sichardt W.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 10/11, 429—431 (нем.)

Если окружность единичного радиуса разделена на n равных частей и одна из точек деления соединена прямыми со всеми остальными точками, то произведение длин хорд равно числу делений. К этой теореме автор пришел эмпирическим путем в связи с гидротехнической задачей исследования законов распределения уровней грунтовых вод в заборных колодцах, расположенных по окружности на равных друг от друга расстояниях. Приводится также математическое доказательство, данное профессором Сабо. А. Б. Штыкан

3233. Общие пары инволюции Мёбиуса и изогональной инверсии. До (Couples communs à une involution de Möbius et à une inversion isogonale. Deaux R.), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 216—218 (франц.)

Рассматривается инверсия Мёбиуса $zz' - \alpha(z + z') + \beta = 0$ и изогональная инверсия в треугольнике с вершинами a, b, c, имеющая вид $z + z' + abc\overline{zz'} = a + b + c$. Показывается, что эти преобразования имеют единственную общую пару соответствующих точек, за исключением того случая, когда инволюция Мёбиуса переводит вершины треугольника в точки пересечения противолежащих сторон этого треугольника с некоторой прямой; в последнем случае имеется однопараметрическое семейство общих пар соответствующих точек указанных преобразований. Из этой теоремы выводится ряд следствий, в частности получается простой вывод теоремы Вебера — Буве.

Б. А. Розенфельд

3234. Кривые преследования. Бернхардт (Curves of pursuit. Bernhart Arthur), Scripta math., 1954, **20**, № 3—4, 125—141 (англ.)

Кривой преследования называется кривая $P(t)$, касательный вектор которой $\overrightarrow{OP'}(t)$ направлен в точку $Q(t)$ заданной кривой: $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{OP'}(t)$. Излагаются известные способы исследования плоских кривых преследования. В. И. Ведерников

3235. Геометрическое решение кубического уравнения с помощью центрального конического сечения. Рао (A geometric solution of the cubic equation using a central conic. Rao T. Krishna), Math. Student, 1954, **22**, № 4, 179—182 (англ.)

Задача сводится автором к построению окружности $\Gamma(P)$, ассоциированной в данной точке P центрального конического сечения Γ (в случае трисекции угла — эллипса). Эта окружность проходит через P и имеет своим центром середину отрезка, соединяющего центр Γ с серединой отрезка нормали к Γ в P между осями Γ. Г. С. Бархин

3236. О центральной оси системы скользящих векторов Барбэлат (Notă relativă la axa centrală a unui sistem de vectori alunecători. Barbălat I.), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 5, 221—223 (рум.)

Цель статьи — доказать геометрически существование центральной оси системы (s) скользящих векторов, общая результирующая которой $\bar{u} \neq 0$.

В основу доказательства положено свойство действительной функции одной переменной, изменяющейся в некоторой замкнутой ограниченной области.

Полагая, что $\bar{m}_p$ — момент системы в точке, $A = \bar{m}_p \cdot u$ — метрический инвариант системы, автор ищет геометрическое место точек P пространства, для которых $|\bar{m}_p|$ минимальна.

Имеет место соотношение

$$\bar{m}_p - \bar{m}_Q = \overline{PQ} \times \bar{u}. \qquad (1)$$

Из соотношения (1) получается, что $|\bar{m}_p|$ является непрерывной во всем пространстве и ограниченной функцией от P: $|\bar{m}_p| \geqslant u^{-1}|A|$, что результирующие моменты $\bar{m}_p$ и $\bar{m}_Q$ в двух точках P и Q, расположенных на прямой, параллельной $\bar{u}$, равны между собой, в силу чего достаточно изучить вариацию момента $\bar{m}_P$, когда точка P смещается в плоскости α, перпендикулярной к $\bar{u}$. Показано, что в плоскости α существует круг C радиуса R с центром в O такой, что $|\bar{m}_P| > R$ для всех точек, не принадлежащих этому кругу. Следовательно, для отыскания минимума достаточно изучить изменение функции $|\bar{m}_p|$ внутри C. Если $\min|\bar{m}_p| = u^{-1}|A|$, то он достигается только в одной точке.

Н. М. Остиану

3237. О комплексном аффинитете. Гурматай (Sur une affinité complexe. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1954, **63**, № 3—5, 1—28 (франц.)

Статья обобщает и дополняет ряд статей автора (с 1916 по 1949 гг.) и посвящена следующему преобразованию прямоугольных координат: $x = x_1$, $y = iy_1$.

Основное свойство преобразования: двум перпендикулярным направлениям фигуры F_1 с координатами x_1; y_1 соответствуют два направления фигуры F с координатами x; y. Эти направления симметричны относительно биссектрис $O\xi$ и $O\eta$ координатных углов XOY. Преобразование, применяемое последовательно к треугольнику, четырехугольнику, различным плоским кривым, позволяет найти свойства рассматриваемых объектов. Например, из преобразования прямоугольного треугольника в косоугольный следует, что во всяком треугольнике $(b^2 - c^2)/a^2 = \sin(B - C)/\sin A$.

Трисектриса Лоншана при этом преобразовании переходит в декартов лист, синусоида (косинусоида) — в цепную линию, логарифмическая спираль — в политропические кривые и т. д. С. И. Зетель

3238. Элементарная теория неевклидовых геометрий. Тресс (Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes. Tresse A.), Bull. Soc. math. France, 1955, **83**, № 1, 1—55 (франц.)

Продолжение статьи, опубликованной в том же журнале (РЖМат, 1954, 1769).

Определяя псевдодлину отрезка псевдопрямой как псевдорасстояние между его концами, а псевдодлину суммы двух отрезков как псевдорасстояние между их не общими концами, когда один из них псевдоперемещением приведен в надлежащее положение относительно другого, автор подробно рассматривает как в гиперболической, так и в эллиптической геометриях основные свойства сложения псевдодлин, измерение псевдодлин, неравенства между псевдосторонами псевдотреугольника, псевдоломаные линии и их некоторые свойства, измерение углов в связи с измерением псевдодлин отрезков и т. д.

И эта часть работы не содержит существенно новых результатов. Предполагается опубликование продолжения работы. К. К. Мокрищев

3239. О проективном обобщении хордала. Шустер (O projektivním zobecnění chordály. Schuster Jan), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 202—205 (чеш.)

3240. Независимость постулата Евклида. Вилла (L'indipendenza del postulato di Euclide. Villa Mario), Archimede, 1955, **7**, № 1, 22—29 (итал.)

3241. Графическое решение одного гониометрического уравнения. Мишонь (Grafické řeení jedné goniometrické rovnice. Mišoň Karel), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 243 (чеш.)

3242 К. Сочинения. Том 1, Ч. 2. Бьянки (Opere. Vol. 1. Parte seconda. Bianchi Luigi. A cura dell'' Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella, Roma, 1953, 276 pp., 2500 lire) (итал.)

Этой частью завершается том 1 проектируемого 10-томного издания работ автора (РЖМат., 1954, 1954 РЕЦ). Она содержит статьи о нормальных эллиптических кривых, конечных непрерывных группах преобразований, дифференциальных уравнениях в частных производных и, в дополнении, различные некрологи, которые он написал. Имеются вводные комментарии для первых трех групп статей, написанных соответственно Конфорто, Амальди и Бомпьяни и Бартолотто.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 276

3243 К. Теорема Пифагора. С перспективой на проблему Ферма. Лицман (Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Lietzmann W.), Stuttgart, 7-te Aufl. B. G., Teubner Verlagsgesellschaft, 1953, 95 p., 3.60 DM

3244 К. Аналитическая геометрия. Ч. I. Цино, Бэнэреску (Geometrie analitică. Partea 1-a. Tino Ovidiu N., Bănărescu Valeriu A. Bucureşti, Ed. Inst. de căi ferate, 1955, 295 p., fig., Litografiat), Bul. bibliogr., 1955, **A4**, № 8, 7 (рум.)

3245 К. Векторный анализ. Валентинер (Vektoranalysis. Valentiner Siegfried. 7. Aufl. Sammlung Göschen Bd. 354. Berlin, Walter de Gruyter and Co., 1954, 138 p., 2.40 DM)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3246. Аффинное преобразование. Ханке (Affine Abbildung. Hanke W.), Optik, 1955, **12**, № 7, 322—328 (нем.)

Для практического выполнения афинного преобразования с наперед заданными увеличениями в двух заданных направлениях предлагается метод, являющийся видоизменением метода Швидефского (Schwidefsky K., Optik, 1947, **2**, 434); дается математическое обоснование и на примере показываются преимущества этого метода. П. П. Касьянков

3247. Конические сечения как линии дорог. Фрик (Kegelschnitte als Strassenkurven. Frick W.), Schweiz. Z. Vermessung, 1953, **51**, № 8, 220—222 (нем.)

См. РЖАстр, 1955, 1215.

3248. Геометрия эвольвентных геликоидальных червячных зацеплений. Перес (Geometry of involute helicoidal hob and gear teeth. Peres N. J. C.), Austral. J. Appl. Sci., 1954, **5**, № 4, 309—329 (англ.)

Рассматривается геометрия эвольвентной винтовой поверхности зубцов колес, представляющей развертывающий геликоид, ребро возврата которого есть цилиндрическая винтовая линия. Изучаются сечения поверхности: осевое, параллельное ему, нормальное к винтовой линии поверхности. Первое практически становится прямолинейным при углах подъема винта, близких к 87°. Все характеристики поверхности и сечений выражаются через основные параметры зубцов. Приводятся относящиеся к этой области результаты Меррита, Букингама и др. Имеются опечатки и ошибочные ссылки на чертежи. Г. С. Бархин

3249. О катании линейчатых поверхностей. Биран (Sur le roulement des surfaces réglées. Biran Lutfi), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 201—203 (франц.)

Рассмотрено применение винтового исчисления к исследованию относительного движения систем E_1, E_2, совершающих относительно системы E_0 винтовые движения вокруг и вдоль фиксированных осей X_1, X_1^*. Выяснены условия постоянства дуальных (комплексных) углов, составляемых мгновенной винтовой осью рассматриваемого движения с осями X_1, X_1^*.

Г. Ф. Морошкин

3250. Проверка и элементарные приложения теоремы Кориолиса. Кантони (Verifiche ed applicazioni elementari del teorema di Coriolis. Cantoni Riccardo), Period. mat., 1955, **33**, № 2, 113—117 (итал.)

Применением теоремы Кориолиса к движению точки, описывающей плоскую кривую, получается известное выражение для радиуса кривизны плоской кривой в полярных координатах. Наоборот, при помощи значения радиуса кривизны спирали Архимеда проверяется справедливость теоремы Кориолиса для соответствующего движения. Р. Н. Щербаков

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3251. Бумажная модель проективной плоскости. Деккер (A paper model of the projective plane. Dekker David B.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 113—115 (англ.)

Дается развертка для изготовления многогранной поверхности, топологически эквивалентной проективной плоскости. Н. М. Бескин

3252. Некоторые свойства конфигурации, дополняющей конфигурацию Дезарга. Сидлер (Quelques propriétés de la configuration complémentaire de Desargues. Sydler J. P.), Elem. Math., 1955, **10**, № 2, 32—37 (франц.)

Конфигурация C, указанная в заглавии, состоит из 10 прямых конфигурации Дезарга и 15 точек пересечения этих прямых, не входящих в конфигурацию Дезарга. Исследуются многоугольники из C. Доказывается несколько конфигурационных теорем, связанных с этими многоугольниками. Из других результатов в качестве иллюстрации приведем следующий: пусть прямые из C перенумерованы цифрами 0,1, . . . , 9 так, что вершины пятиугольников (12345), (12360), (23498), (34576) (45109), (51287), $(12890)=P_1$, $(23678)=P_2$, $(34906)=P_3$, $(45789)=P_4$, $(51067)=P_5$, $(67890)=P_0$ (через $(i_1i_2i_3i_4i_5)$ обозначается многоугольник, стороны которого лежат на прямых $i_1, \ldots, i_5$) суть точки из C; тогда существует единственная система чисел $a_1, \ldots, a_5$, такая, что $\sum_{i=1}^{5} a_iP_i + P_0 = 0$ (под суммой здесь понимается сумма ориентированных площадей, а под a_iP_i — многоугольник, подобный P_i с коэффициентом подобия $|a_i|$, при $a_i < 0$, кроме того, меняется ориентация).

Л. А. Скорняков

3253. Доказательство теоремы Дезарга, исходя из фигуры Радемейстера и сходных с ней теорем. Клингенберг (Beweis des Desarguesschen Satzes aus der Reidemeisterfigur und verwandte Sätze. Klingenberg Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3/4, 158—175 (нем.)

Изложим результаты, придерживаясь терминологии работы Аргунова (Матем. сб., 1950, **26**, № 3, 425—456). Доказывается аффинная эквивалентность 1-2-аффинной формы конфигурации mA (11, 11, 12) (ассоциативность умножения) и теоремы Дезарга. Аналогичный результат получается для конфигурации, двойственной mA (11, 11, 12). Кроме того, устанавливается аффинная эквивалентность 7-8 и 4-8-аффинных форм теоремы Паппа. Наконец, оказываются аффинно эквивалентными многие аффинные формы теоремы Дезарга, конфигурации $m4(11, 11, 12)$ и двойственной ей. В этих рассмотрениях понятие аффинной формы следует рассматривать несколько шире, чем у Аргунова. Л. А. Скорняков

3254. О некоторых конечных недезарговых плоскостях. Нёйман (On some finite non-desarguesian planes. Neumann Hanna), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 36—40 (англ.)

Пусть n — натуральное число, p — простое число, $M = p^{4n} + p^{2n} + 1$ $m = p^{2n} + p^n + 1$. Доказываются теоремы: 1. Если p нечетно, то для всякого n существует веблен-веддербарнова проективная плоскость (в.-в. п. п.) с M точками, содержащая дезаргову подплоскость с m точками и подплоскость из 7 точек. 2. Если $p = 2$, а $n > 1$, то существует в.-в. п. п. с M точками, содержащая дезаргову подплоскость с m точками, а также четырехвершинник с неколлинеарными диагональными точками См. также РЖМат, 1956, 749.

Л. А. Скорняков

3255. Гармоническая сопряженность на плоскости Муфанг. Гавел (Harmonical quadruplet in Moufang plane. Havel Václav), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 1, 76—82 (англ.; рез. русс.)

В альтернативной плоскости характеристики $\neq 2$ можно говорить о гармонической четверке точек $(ABCD)$. Если $A=(a, 0)$, $B=(b, 0)$, $C=(c, 0)$, $D=(d, 0)$, то эквивалентны следующие соотношения: а) $(ABCD)$; б) $(CDAB)$; в) $-(a-c)^{-1}(a-d)=(b-c)^{-1}(b-d)$; г) $2(a-b)^{-1}=(a-c)^{-1}(a-d)^{-1}$. Если, далее, N — несобственная точка прямой $y=0$, то $(ABCN)$ эквивалентно $c=(a+b)/2$. Л. А. Скорняков

3256. О перспективах в конечных проективных плоскостях. Андре (Über Perspektivitäten in endlichen

projektiven Ebenen. André Johannes), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 29—32 (нем.)

Доказываются два достаточных условия для того, чтобы аффинная плоскость π была веблен-веддербарновой: 1) группа коллинеаций плоскости π транзитивна относительно точек; 2) для каждой точки существует нетождественная коллинеация плоскости π, оставляющая эту точку на месте. Л. А. Скорняков

3257. Конфигурация А. К. Власова и ее обобщение. Бюшгенс С. С., Матем. сб., 1955, **36**, № 2, 275—280

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — плоскости четырехмерного пространства, попарно не принадлежащие к трехмерному пространству, и пусть $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ — их секущие плоскости, т. е. плоскость α' пересекает плоскости β, γ, δ по прямым, а плоскость α в точке $\alpha\alpha'$, и т. д. Тогда точки $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ лежат в одной плоскости ε, ассоциируемой с плоскостями $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Автор обобщает эти теорему на пространство $5k$—1-го измерения следующим образом: Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — пространства $3k$ — 1-го измерения, имеющие общее расположение в $5k$—1-мерном пространстве, и пусть $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ — их секущие пространства $3k$ — 1-го измерения, т. е. α' пересекает пространства β, γ, δ по пространствам $2k$ — 1-го измерения, а пространство α по пространству $\alpha\alpha'$ измерения k — 1-го и т. д.

Тогда пространства $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ принадлежат одному и тому же пространству $3k$ — 1-го измерения. Автор доказывает свою теорему элементарно-геометрически, используя лишь инциденции линейных образов. А. А. Глаголев

3258. О двух семействах гиперболических кривых постоянной кривизны. Трайнин Я. Л. Уч. зап. Новосибир. гос. пед. ин-та, 1955, № 10, 85—98

На плоскости Лобачевского рассматривается множество кривых постоянной кривизны, состоящее из окружностей, эквидистант и двух орициклов, касающихся данной прямой в данной на ней точке. Исследуется изображение этих кривых на карте Клейна (Бельтрами). Кривые изображаются эллипсами: находится геометрическое место фокусов этих эллипсов. В таком же направлении исследуются изображения концентрических окружностей, собазисных эквидистант и соосных орициклов, которые автор называет параллельными. Свойства фокусов изображений предлагается использовать для построения по точкам изображений кривых постоянной кривизны на карте Бельтрами. Б. Н. Саморуков

3259. Об одной задаче на построение в геометрии Лобачевского. Смогоржевский (Про одну конструктивну задачу геометрії Лобачевського. Смогоржевський О. С.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 6, 399—401 (укр.; рез. русс.)

Даются три варианта нового метода решения задачи о построении треугольника по трем углам. В основании нового метода лежит преобразование инверсии. Например, в первом варианте: пусть углы α, β, γ удовлетворяют условию $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, строятся 3 окружности k_a, k_b, k_c, пересекающиеся попарно под углами соответственно γ, α, β. Подбором надлежащей окружности инверсии, окружности k_a, k_b, k_c инвертируются в три прямые, которые в силу конформности преобразования инверсии будут пересекаться попарно под теми же углами α, β, γ, т. е. образуют искомый треугольник. Н. М. Несторович

3260. О построении центров окружностей с помощью одной линейки в плоскости Лобачевского. Демаховская Р. И., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), **16**, 229—242

Используя карту Бельтрами плоскости Лобачевского, соображения проективной геометрии и координатный метод, автор доказывает, что с помощью только линейки не могут быть построены «центры» двух неконцентрических окружностей или эквидистант, начерченных на плоскости Лобачевского без их «центров» при любом их взаимном расположении, что означает неразрешимость при указанных условиях совокупности всех конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского (РЖМат, 1955, 1906).

Аналогично доказывается, что задание в плоскости построений трех и даже четырех начерченных окружностей или эквидистант без их «центров», вообще, не позволяет при помощи только линейки построить «центр» хотя бы одной из них. Указываются случаи задания трех и четырех окружностей и трех эквидистант без «центров», когда при помощи только линейки могут быть построены их центры и, следовательно, решены все конструктивные задачи второй степени. К. К. Мокрищев

3261. Тригонометрия треугольника плоских неевклидовых геометрий. Макарова Н. М., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1955, **1**, 97—99

Приводится, без доказательства, таблица основных тригонометрических формул треугольника для каждого из девяти проективных мероопределений Кели — Клейна на плоскости. Отмечается, что удобный аппарат для получения их дает отображение неевклидовых геометрий на плоскости обыкновенного комплексного, двойного и дуального переменного. К. К. Мокрищев

3262. Некоторые задачи начертательной геометрии четырехмерного пространства. Вачнадзе Г. А., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, № 2, 193—214 (рез. груз.)

Отображение четырехмерного евклидова пространства на плоскость осуществлено на аксиоматической основе. Для полной определенности изображения множества объектов R_4 построена система из совокупности основных объектов. Относительно этой системы определены положения гиперплоскостей, плоскостей, прямых и точек. В плоскости изображения выбрана произвольная точка O и через нее проведены прямые OX, OY, OZ, OT, удовлетворяющие условиям: а) каждая пара прямых определяет единственную плоскость (плоское поле); б) никакие три из этих прямых не принадлежат одной плоскости, в) каждые три прямые определяют единственную гиперплоскость, г) все четыре прямые не принадлежат одной гиперплоскости. Этим самым получено аксонометрическое изображение симплекса четырехмерного пространства с вершинами в точке O и в несобственных точках данных осей — X_∞, Y_∞, Z_∞, T_∞. После этого дано изображение гиперплоскости и принадлежащих ей прямой и точки, указан прием построения точки, принадлежащей R_4, даны способы построения плоскости пересечения двух гиперплоскостей и точки пересечения прямой R_4 с гиперплоскостью. На основе проективного соответствия рассмотрен способ построения гиперповерхности второго порядка. Модель четырехмерного пространства применена к построению диаграмм состояния пятикомпонентных систем. А. Р. Зенин

3263. Построения додекаэдров и икосаэдров. Лохер-Эрнст (Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders. Locher-Ernst L.), Elem. Math., 1955, **10**, № 4, 73—81 (нем.)

Даются три из возможных конструктивных способов получения правильных икосаэдров и додекаэдров. Полученные конструкции рассматриваются во всех главных проекциях. Г. С. Бархин

3264. Зависимость между показателями искажения в косоугольной аксонометрии. Целинский Н. А., Сб. науч. тр. Магнитогор. горно-металлург. ин-та, 1954, вып. 7, 430—435

Показатели искажения косоугольной аксонометрии связаны соотношением $p^2 + q^2 + r^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2\sigma$, и, следовательно, не могут быть взяты произвольно. Ис-

следование зависимости между показателями искажения приводит к теореме: При любом расположении плоскости проекций и направлении проектирования сумма квадратов двух показателей искажения косоугольной аксонометрии $\geqslant 1$. А. Р. Зенгин

3265. Основная теорема начертательной геометрии с алгебраической точки зрения. Манара (L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva. Manara C. F.), Period. mat., 1954, **32**, № 3, 142—149 (итал.)

Дается алгебраическое доказательство теоремы Польке. Если $O'P'_1$, $O'P'_2$, $O'P'_3$ — три данных отрезка на плоскости, то требуется найти в пространстве точки O, P_1, P_2, P_3, удовлетворяющие условиям: $OP_1=OP_2=OP_3$, $\sphericalangle P_1OP_2=\sphericalangle P_2OP_3=\sphericalangle P_3OP_1=d$, $OO' \parallel P_1P'_1 \parallel P_2P'_2 \parallel P_3P'_3$. Считая неизвестными координаты искомых точек, автор исследует систему уравнений, к которой приводит данная задача. Эта система всегда имеет действительные решения (если исходные данные действительны), выражающиеся в квадратных радикалах. Н. М. Бескин

3266. Некоторые вопросы пересечения плоскостей. Мурга В. К., Техн. информация по результатам науч.-исслед. работ Ленингр. лесотехн. акад., 1955, № 25, 64—68

Приводятся хорошо известные из учебной литературы примеры на построение линии пересечения двух плоскостей. А. Р. Зенгин

3267 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Ч. I. Отто, Отто (Zbior zadań z geometrii wykreślnej. Cz. I. Otto Franciszek, Otto Edward. Wyd. 2. Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk, 1955, 158 str., 2 nlb., rys., 19,50 zł.), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 19, 289 (польск.)

3268 К. Курс начертательной геометрии. Изд. 2-е. Гулисашвили. (მხაზველობითი გეომეტრიის კურსი. გულისაშვილი ა.), Тбилиси, ტექნიკა და შრომა (Техника да Шрома), 1953, 324 стр., 8 р. 25 к. (груз.) Систематический курс начертательной геометрии с аксонометрией и перспективой и методом проекций с числовыми отметками. Г. С. Чогошвили

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3269. О поверхности третьего порядка, касающейся плоскости вдоль прямой. Годо (Sur la surface cubique touchant un plan le long d'une droite. Godeaux Lucien), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, 326—327 (франц.)

Как известно, если нелинейчатая поверхность третьего порядка F касается некоторой плоскости α вдоль прямой линии a, то на этой прямой a находятся две двойных точки поверхности F или они сливаются в одну точку, в которой касательная плоскость к поверхности F пересекает последнюю по прямой a. Эту теорему автор доказал в своей монографии «Введение в высшую геометрию» (Льеж, 1947), используя плоское отображение нелинейчатой поверхности третьего порядка F. В реферируемой заметке он предложил другое остроумное элементарно синтетическое доказательство этой теоремы. М. П. Черняев

3270. Вопросы вещественности на гармонических тернарных формах и их гессианах. Сегре (Questioni di realtà sulle forme armoniche ternarie e sulle loro hessiane. Segre Beniamino), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, ed. Cremonese, 1954, 148—151 (итал.)

Краткое сообщение без полных доказательств. Подробно см. РЖМат, 1955, 2860 и 2861. В. В. Морозов

3271. Преобразования, определяемые системой ассоциированных точек. Дью-Вал (Transformations depending on sets of associated points. Du Val Patrick), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 24—32 (англ.)

Применение тензорного аппарата позволяет автору дать более простое изложение результатов работы Рума (Room T. G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 381—391; 1953, 49, 736) под тем же названием, в которой исследуются инволюционные кремоновы преобразования на плоскости, определяемые девяткой общих точек пучка кривых третьего порядка, и преобразования в пространстве, определяемые восьмеркой общих точек сети поверхностей второго порядка. Я. П. Бланк

3272. О теореме Райса. Арф (Sur le théorème de Reiss. Arf C.), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 181—191 (франц.)

Пусть $f(x, y, z)$, $a(X, Y, Z, x, y, z)$, $b(X, Y, Z, x, y, z)$, $c(X, Y, Z, x, y, z)$ — многочлены, у которых F, A, B, C суть суммы членов наивысшей относительно x, y, z степени. Пусть число точек пересечения в пространстве (x, y, z) любых трех из поверхностей $f=0$, $a=0$, $b=0$, $c=0$ конечно и (x_i, y_i, z_i) $(i=1, \ldots, n)$ — общие точки поверхностей $f=0$, $b=0$, $c=0$.

Положим

$$\alpha_X = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln a(X, Y, Z, x_j, y_j z_j)}{\partial X}$$

и, аналогично определив α_Y, α_Z, обозначим $\alpha = \alpha_X dX + \alpha_Y dY + \alpha_Z dZ$.

Точно так же определим β, γ. Основной результат автора (при условии, что A, B, C взаимно просты с F): $\alpha+\beta+\gamma = d \ln R(f, a, b, c)$, где R — результант системы $f=0$, $a=0$, $b=0$, $c=0$.

То, что $\alpha+\beta+\gamma$ является полным дифференциалом, утверждают теоремы Райса и Зауэра — Графа (Blaschke, Bol. Geometrie der Gewebe, Berlin, 1938).

Г. И. Дринфельд

3273. О системах вещественных квадратичных форм. Сегре (Sui sistemi di forme quadratiche nel campo reale. Segre Beniamino), Comment. math. helv., 1954, **28**, № 4, 288—300 (итал.)

Рассматривается задача: для чисел n и δ, удовлетворяющих условиям $n \geqslant 1$, $1 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2} n(n+3) - 1$, указать такое максимальное целое $\rho(n, \delta)$, чтобы во всякой δ-мерной вещественной системе квадрик в S_n нашлась квадрика, содержащая вещественное S_ρ.

При $2\rho > n$ числа n, δ, ρ оказываются связанными соотношением $\frac{1}{2}(2\rho-n+1)(2\rho-n+2) \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}(\rho+1)(\rho+2)$. Специально исследуется случай, когда δ достигает своей нижней границы. Основной результат работы: δ достигает своей нижней границы $\frac{1}{2} r(r+1)$ для всех значений n и ρ, для которых величина $\varkappa$ нечетная. Здесь $r = 2\rho - n + 1$, а $\varkappa$ задается для нечетного и четного r соответственно формулами:

$$\varkappa = \frac{0!\,2! \ldots (r-1)!}{r!\,(r+2)! \ldots (2r-1)!} \cdot \frac{(n+1)!\,(n+3) \ldots (n+r)!}{(n-r+1)!\,(n-r+3)! \ldots (n-1)!},$$

$$\varkappa = \frac{0!\,2! \ldots (r-2)!}{(r+1)!\,(r+3)! \ldots (2r-1)!} \cdot \frac{(n+2)!\,(n+4)! \ldots (n+r)!}{(n-r+1)!\,(n-r+3)! \ldots (n-1)!}.$$

В частности, условиям теоремы удовлетворяют числа $n = 2^h + (k-1)2^{h+1}$, $\rho = k \cdot 2^h - 1$ и $n = 2^h + k \cdot 2^{h+1} - 1$, $\rho = (k+1)2^h - 1$. Если $d(n)$ — такое число, что, какова бы ни была линейная d-мерная вещественная система квадрик в S_n, всегда найдется пара точек, взаимно сопряженных относительно всех квадрик этой системы

$(N(n+1) = d(n) + 2$ — максимальное число вещественных симметричных билинейных форм от двух наборов по $n+1$ переменных, образующих определенную систему, т. е. обращающихся в нуль тогда и только тогда, когда обращаются в нуль переменные одного набора), то из результата автора следует, что $d(2^h) = 2^{h+1} - 1$.

Указывается еще ряд случаев, когда можно дать явное выражение для $\rho : \rho(2m, 1) = m$ (в S_{2m} в каждой связке вещественных квадрик найдется квадрика, содержащая S_m); $\rho(2m+1,1) = m$; $\rho(4k+1,3) = 2k+1$; $\rho(4k+2,3) = 2k+1$. Некоторые из этих результатов, иногда в менее сильной форме, были получены ранее в работах Тольятти (Togliatti, Ann. mat., 1921, 30, 75—117) и Хопфа (Hopf, Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 1940, 85, 165—177). В. В. Морозов

3274. Некоторые признаки неприводимости плоских алгебраических кривых. Барлотти (Alcuni criteri di irriducibilità per le curve algebriche piane. Barlotti Adriano), Archimede, 1954, 6, № 6, 250—252 (итал.)

Доказывается, что если у плоской кривой n-го порядка существует обыкновенная точка A, в которой касательная имеет с кривой n-точечное пересечение, то кривая не распадается. Если у плоской кривой n-го порядка существует r-кратная точка B и простая точка A, в которой прямая AB имеет с кривой $(n-r)$-точечное пересечение, то кривая либо вовсе не распадается, либо в ее состав входят прямые (числом $\leqslant r$), проходящие через B. Если кривая n-го порядка ($n \geqslant 3$) имеет больше чем $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ точек возврата первого рода, то она не распадается Я. П. Бланк

3275. Теорема существования алгебраических кос. 1. Кизини (Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Chisini Oscar), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 5, 143—149 (итал.)

Пусть C_n^s ($n > 3$) — плоские алгебраические кривые порядка $n+s$ с s-кратной точкой V_∞, жанра $p = (n-1) \times (n-2)/2$ и пусть $r = p + 2 - n$. Две кривые C_n^s называются бирационально тождественными, если бирационально тождественны определяющие их алгебраические функции. Показывается, что: 1) размерность системы кривых C_n^r, бирационально тождественных с данной, равна $r+3$; 2) размерность системы всех C_n^r равна $n(n+3)/2 + 2r$; из доказательства последнего результата вытекают два предложения, устанавливающие связь между числом произвольно задаваемых точек разветвления кривой и ее порядком; 3) для кривой порядка $n+r$ задание r-кратной точки и $r(n-1)$ двойных точек — независимые условия; 4) для C_n^r $m = n(n-1)$ двойных точек могут задаваться и варьироваться произвольно. Доказательства отсутствуют. В. В. Морозов

3276. Некоторые новые свойства кривых на алгебраической поверхности. Нолле (Quelques propriétés nouvelles des courbes tracées sur une surface algébrique. Nollet Louis), Mém. Acad. roy. Belgique Cl. sci., 1953, 28, № 3, 40 (франц.)

С помощью введенных автором новых понятий устанавливаются некоторые свойства кривых на алгебраической поверхности.

Кривая C называется почти неприводимой, если она входит в неприводимое семейство, содержащее неприводимую кривую, и псевдонеприводимой, если hC при подходящем h линейно эквивалентна неприводимой. C называется позитивной, если для всякой неприводимой X $[C, X] \geqslant 0$; если $[C, X] > 0$, то C называется строго позитивной. Если для любой компоненты V кривой C $[C, V] > 0$, то C называется сильно позитивной. Если $C = \Sigma h_i C_i$ — приведенное выражение C, то эффективные кривые $\Sigma k_i C_i$ ($0 \leqslant k_i \leqslant h_i$, $0 < \Sigma k_i < \Sigma h_i$) называются частями C; $m_C = \min[X, C - X]$, где X пробегает все части C, называется индексом связности C; C называется почти связной при $m_C \geqslant 0$ и связной, если $m_C > 0$. Говорят, что F имеет арифметически эффективную или пустую a-каноническую кривую, если кратность aK канонической кривой K арифметически эквивалентна эффективной или пустой кривой.

Эффективная позитивная кривая будет неприводимой или почти связной; если степень ее положительна, то она неприводима или связна. Почти неприводимая кривая позитивна и неприводима или почти связна; если она — нулевой степени, то она неприводима или связна. Последняя часть этого предложения представляет «обобщенный принцип разложения» Франчетта. Псевдонеприводимая кривая неприводима или почти связна; если степень ее положительна, то она связна. Связная (почти связная) кривая представима в виде суммы двух неприводимых или связных (почти связных) кривых. Достаточное условие связности приводимой кривой C — выполнение неравенства $[X, C - X] > 0$ для всех ее неприводимых или связных частей X. Каждая F-кривая может быть представлена как разность двух сильно позитивных или двух эффективных строго позитивных кривых. Пусть F имеет арифметически эффективную или пустую a-каноническую кривую (т. е. F не является бирационально эквивалентной линейчатой поверхности). Тогда, если C сильно позитивна, то постоянная часть f_h системы $|hC|$ для бесконечного числа значений h равна некоторой кривой f. Пусть, кроме того, F не имеет кратных точек. Тогда, если C эффективна и положительной степени, то для достаточно большого h f_h удовлетворяет соотношению $[C, f_h] \leqslant [K, C]$. Если C эффективна и строго позитивна, то для бесконечного числа значений h система $|hC|$ неприводима и регулярна; также для бесконечного числа значений h кривая hC будет линейно эквивалентна разности двух неприводимых кривых.

Устанавливается также ряд результатов, связанных с фундаментальными кривыми и B-присоединением (рассмотрением системы $|C + B|$, где B арифметически эквивалентна K). В. В. Морозов

3277. Канонические системы, плюригенры, дивизоры нуля и базисные числа регулярных алгебраических поверхностей, несущих связку эллиптических кривых. Нолле (Système canonique, plurigenres, diviseurs du zéro et nombre-base des surfaces algébriques régulières ayant un faisceau de courbes elliptiques. Nollet Louis), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 9, 914—937 (франц.)

Классические инварианты неприводимой алгебраической поверхности F без кратных точек, несущей алгебраическую связку F' эллиптических кривых E, вычисляются (в предположении регулярности F) в функции бирациональных инвариантов F'. Выводы опираются на более раннюю работу автора (реф. 3276). Если приведенное выражение эффективной F-кривой C через неприводимые кривые C_i имеет вид $\Sigma_{i=1}^t h_i C_i$, то t называется длиной, общий наибольший делитель чисел h_i — дивизором и $\Sigma_{i=1}^t C_i$ — основанием кривой C. Связка F' содержит лишь конечное число $s \geqslant 0$ элементов вида $e_i E_i$ с дивизорами $e_i > 1$; эти дивизоры — бирациональные инварианты связки — называются дивизорами связки. Если для F $p_a \geqslant 0$, то алгебраические дивизоры F-нуля выражаются в виде $\Sigma_{i=1}^s z_i E_i - zE$, где z_i, z — неотрицательные целые, E — эллиптический

элемент и $0 \leqslant z_i < e_i$, $z = \Sigma z_i / e_i$. Число решений последнего уравнения равно порядку первой группы кручения F (или дивизору Севери t); для того чтобы F была поверхностью без кручения, необходимо и достаточно, чтобы а) $s = 0,1$, б) $s > 1$ и s дивизоров e_i были попарно взаимно просты.

Считая дополнительно, что F не содержит исключительных кривых 1-го рода и регулярна, автор получает выражение канонической системы F: $K \equiv (p_g - 1)E + \Sigma(e_i - 1)E_i$, откуда следует формула для плюригенров: при $t \geqslant 2$ $P_t = 1 + t(p_g - 1 + s) - \Sigma t_i$, где t_i — частное от деления по избытку e_i на t, т. е. $e_i = tt_i - r_i$, $0 \leqslant r_i < t$.

В общем случае приводимые элементы F' разбиваются на типы: А) длины 1, Б) длины > 1 с основанием степени 0 и В) длины > 1 с основанием степени -2. Тогда, если F иррегулярна, или F' иррационален, то инвариант Цейтена — Сегре $J = \Sigma_{\text{Б}} l - \Sigma_{\text{В}} (l-1) + U - 4$, где l — длина элемента, U — число имеющих двойные точки элементов F', которые либо неприводимы, либо типа А. Так как здесь иррегулярность q-жанру F', то знание J позволяет найти p_a и p_g.

Наконец, если F регулярна и F' содержит r приводимых элементов длин соответственно λ_i, то нижняя граница базисного числа F находится в виде $\Sigma\lambda_i - r + 2$. Вкратце излагается применение этих результатов к случаям поверхностей с детерминантом 1 и 2. В последнем случае дивизоры e_i могут принимать лишь значения 1 и 2. В связи с этим отмечается, что рассуждения стр. 15—18 и 25 работы Гаэта (Gaeta, Rend. Accad. Nat. dei XL, 1951, ser. 4, 2, 23—63) относятся к несуществующим кривым. В. В. Морозов

3278. О бирациональной эквивалентности двух многообразий Пикара, связанных с нерегулярным по поверхности многообразием. Розати (Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare. Rosati Mario), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, № 6, 708—715 (итал.)

С алгебраическим многообразием W с поверхностной нерегулярностью $p > 0$ можно связать два многообразия Пикара; первое V_p, соответствующее матрице Римана периодов простого интеграла первого рода на W; второе V'_p — образ полных линейных систем непрерывной системы ∞^p линейных систем гиперповерхностей на W. Эти многообразия для случая, когда W — поверхность, были введены Севери (Severi F., Atti Istit. veneto di Scienze, 1913, 72, 765—772) и Кастельнуово (Castelnuovo G., Rend. Accad. Lincei, 1905, (5), (14), причем первый из них отметил, что V_p и V'_p не всегда бирационально эквивалентны, и привлек внимание поэтому к исследованию соотношений между V_p и V'_p.

Андреотти (Andreotti A., Rend. Accad. Nazion., 1951, (4), 2, 1—9; Mém. Acad. de Belgique, 1952, 27, № 7) показал, что V'_p есть многообразие Пикара, построенное по способу Кастельнуово с помощью многообразия V_p и потому являющееся образом линейных систем гиперповерхностей, содержащихся в непрерывной системе ∞^p на V_p, и что, сверх того, это соотношение между V_p и V'_p взаимно.

Взяв какую-нибудь матрицу Римана, соответствующую V_p в нормальной форме $\omega = \|\Delta^{-1}\Omega\|$ с уровнем Δ и элементарными делителями $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, автор, согласно результатам Андреотти для V'_p, берет матрицу $\omega' = \|U\Omega\Delta\| = \omega \left\| \begin{matrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{matrix} \right\|$, приводит ее к нормальному виду $\omega' = \|(\Delta')^{-1}\Omega'\|$ и определяет элементарные делители Δ'; показывается, что если матрице ω соответствует многообразие Пикара V_p, то найденной ω' соответствует многообразие Пикара V'_p — образ линейных систем гиперповерхностей, содержащихся в непрерывной системе ∞^p на V_p. Обнаружив циклическое соответствие второго порядка между Δ и Δ', автор устанавливает симметричность отношения между ω и ω' и тем самым взаимное отношение V_p и V'_p.

Бирациональная эквивалентность многообразий V_p и V'_p имеет место, когда соответствующие матрицы ω и ω' эквивалентны в смысле Скорца, т. е. между ними имеется связь $\alpha\omega' = \omega A$. Показывается, что ω удовлетворяет уравнению (и обратно)

$$\omega M \omega_{-1} = 0 \quad (M \text{ — модулярна, } |M| = +1). \qquad (2)$$

Необходимым и достаточным условием бирациональной эквивалентности V_p и V'_p является условие, чтобы какая-нибудь матрица Римана ω, соответствующая V_p, удовлетворяла указанному уравнению.

В заключение намечаются пути исследования решений уравнения (2) и тех алгебраических многообразий, которые им соответствуют. С. С. Бюшгенс

3279. О преобразованиях в себя квазиабелевого многообразия Пикара, представимых линейными конгруэнциями между интегралами виртуально первого рода. Конфорто (Sulle trasformazioni in sè della varietà quasi abeliana di Picard, che sono rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. Conforto Fabio), Rend. mat. e applic., 1954, 13, № 2, 219—248 (итал.)

Манускрипт из архива профессора Конфорто, опубликованный почти без добавлений Марио Бенедикти и являющийся продолжением работы Конфорто в Ann. di Mat., 1949, 28, 299. Определение названных в заглавии работы преобразований приводится к решению относительно Λ матричного уравнения (обобщенное уравнение Гурвица) $\Lambda\omega = \omega I$, где I — целочисленная унимодулярная матрица порядка π', а ω — матрица периодов квазиабелевого поля от π переменных, имеющая вид

$$\omega = \left\| \begin{matrix} A(p,p) & \Omega(p,p) & 0 \\ 0 & \Omega_1(\delta_1,p) & B(\delta_1,\delta_1) \\ 0 & \Omega_2(\delta_2,p) & 0 \end{matrix} \right\|$$

где

$$\Omega_2(\delta_2,p) = \left\| \begin{matrix} C(p_1\,p) & \Omega'_2(\rho, p-\rho) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$\pi = p + \delta_1 + \delta_2$, $\pi' = 2p + \delta_1$, $\rho \leqslant p$ и в скобках у матриц указаны их размерности. Дается полное решение указанного уравнения для случая $\rho = p$ и случая $\rho < p$, при условии, что матрица периодов — производящая нормальная. Отсюда делаются заключения о структуре группы преобразований в себя рассматриваемого многообразия. В. В. Морозов

3280. Замечание к моей работе «Некоторые теоремы об абелевых многообразиях». Мацусака (A note on my paper «Some theorems on Abelian varieties». Matsusaka Teruhisa), Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 1954, 5, № 1, 21—23 (англ.)

Приводится полное доказательство одного результата теории нормализации, использованного в названной работе (РЖМат, 1955, 2838). В. В. Морозов

3281. **О геометрии направления. Стуббан** (Sur la géometrie de direction. Stubban John Olav), Kgl. norske videnskab. selskabs skr., 1954, № 1, 1—67 (франц.)

Изучаются ориентированные точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности в n-мерных евклидовых и неевклидовых пространствах. Метод изучения основан на том, что ориентированные точки и гиперплоскости n-мерных евклидовых и неевклидовых пространств изображаются точками соответственно гиперконуса второго порядка в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве и гиперповерхности второго порядка в $(n+1)$-мерном неевклидовом пространстве (при этом точки и гиперплоскости, отличающиеся ориентацией, изображаются парами точек гиперконуса или гиперповерхности, в определенном смысле симметричными относительно гиперплоскости, которую можно рассматривать как изображение данного n-мерного пространства или его многообразия гиперплоскостей). Ориентированные кривые и поверхности рассматриваются как огибающие семейств ориентированных прямых или плоскостей. Изучаются различные виды бирациональных преобразований указанных геометрических образов.

Б. А. Розенфельд

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3282. **К изучению спиральных минимальных поверхностей. Вундерлих** (Beitrag zur Kenntnis der Minimalspiralflächen. Wunderlich Walter), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 1—15 (нем.)

При помощи наглядных геометрических соображений исследуются спиральные поверхности (т. е. поверхности, образованные траекториями однопараметрической группы вращений относительно оси OZ с одновременным подобным преобразованием пространства с коэффициентом подобия $\mu = \epsilon^{p\omega}$, где ω — угол поворота), являющиеся вместе с тем минимальными поверхностями. Получены конечные уравнения таких поверхностей, проведена некоторая их классификация, найдены на них линии кривизны и асимптотические линии. Работа снабжена чертежами.

А. Е. Либер

3283. **К проективно-дифференциальной геометрии поверхностей комплекса. III. Сдвиги как качения. Особые кривые на поверхностях комплекса. Инвариантные образы. Барнер** (Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. III. Schiebungen als Abrollvorgänge. Singularitätenkurven auf Komplexflächen. Invariante Gebilde. Barner Martin), Math. Ann., 1955, **129**, № 3, 304—322 (нем.)

Статья продолжает работы автора (РЖМат, 1954, 3065, 5237). Сдвиг есть проективное движение пространства, при котором сохраняется нуль-система (линейного комплекса K), отображающая точку пространства на соприкасающуюся плоскость траектории этой точки. В пятимерном пространстве этому соответствует гиперболическое движение гиперквадрики Q, при котором касательная к траектории, описываемой произвольной точкой v плоскости E, проходит через точку ω (ω — точка, соответствующая комплексу K, E — полярно сопряженная с ней гиперплоскость относительно Q). Точкам пересечения прямой $v\omega$ с Q соответствуют в трехмерном пространстве две прямые, при сдвиге описывающие две расслояемые линейчатые поверхности. В частности, точкам пересечения с Q прямой $\omega\omega'$ (касательной к кривой, описываемой точкой ω) соответствуют направляющие линейчатые поверхности сдвига. Каждой паре расслояемых линейчатых поверхностей соответствует квадрика, касающаяся обеих поверхностей вдоль соответствующих лучей. В случае направляющих поверхностей получают ассоциированную квадрику сдвига. Трансверсальные образующие всех указанных касательных квадрик (эти образующие пересекают соответствующие образующие расслояемых линейчатых поверхностей) пересекают каждую пару соответствующих направляющих прямых. По этой причине сдвиг характеризуется как качение проективного пространства по направляющим поверхностям.

Каждая пара направляющих прямых в соответствующий ей момент времени представляет собой геометрическое место стационарных точек (momentanen Fixpunkte), т. е. точек, имеющих в этот момент скорость, равную нулю.

Формулируются предложения, указывающие безинтегральное представление сдвигов с произвольным заданием тех или иных элементов, относящихся к направляющим поверхностям.

Поверхности комплекса — это те, которые описываются произвольной кривой комплекса K при свиге. Как вся совокупность кривых, пробегаемая данной кривой, так и совокупность траекторий на получаемых поверхностях состоят из асимптотических линий этих поверхностей. Особой кривой на поверхностях комплекса называется место точек касания друг другом соседних кривых комплекса, иначе, точек касания кривых комплекса с соответствующими траекториями. Отсюда следует, что касательные к траекториям в точках особых кривых пересекают направляющие прямые. В зависимости от степени касания кривых комплекса с особыми кривыми последним приписывается определенная кратность. Двойная кратность характеризуется расположением одной из направляющих прямых в соприкасающейся плоскости кривой комплекса в особой точке. В случае тройной кратности направляющие прямые, соответствующие особой точке с указанной кратностью, совпадают и оказываются инцидентными соответствующей кривой комплекса. Если налицо четверная кратность, то совпадающие направляющие прямые касаются соответствующей кривой комплекса.

Указывается безинтегральное представление таких сдвигов, поверхности комплекса которых содержат кривые третьего порядка, принадлежащие комплексу K. На каждой из таких поверхностей находится по 4 особых кривых. Дается также построение поверхностей комплекса с двумя двукратными особыми кривыми, с одной трехкратной и одной простой особыми кривыми.

Если взять две какие-либо кривые комплекса и както попарно соединить их точки, то получится линейчатая поверхность. В случае, когда эта поверхность принадлежит комплексу K, выбранные кривые являются ее асимптотическими. В сдвиге эта линейчатая поверхность описывает конгруэнцию W, а отмеченные кривые — поверхности комплекса, являющиеся фокальными поверхностями конгруэнции.

В случае, когда линейчатая поверхность не принадлежит комплексу, ей полярно соответствует в комплексе K вторая, расслояемая с ней линейчатая поверхность, и обе эти поверхности описывают расслояемую пару конгруэнций. При этом расслояющими поверхностями оказываются поверхности комплекса. Доказываются определенным образом формулируемые обратные предложения и указывается широта класса соответствующих конгруэнций.

В зависимости от того, являются ли направляющие поверхности различными, совпадают ли с косой линейчатой поверхностью или совпадают с торсом — в указанном выше смысле они определяют соответственно или расслояемую пару конгруэнций, или конгруэнцию W, или просто поверхность комплекса. В каждом из

этих случаев отмечается количество особых кривых на соответствующих поверхностях комплекса.

Н. И. Кованцов

3284. Ангармонические семейства кривых на линейчатых поверхностях. Барнер (Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Barner Martin), Math. Z., 1955, 62, № 1, 50—93 (нем.)

Исследуются ангармонические семейства кривых линейчатой поверхности, проективно отображающие образующие этой поверхности друг на друга.

Совокупность касательных к кривым семейства вдоль образующей определяет касательную квадрику. Линейчатая поверхность оказывается частью огибающей однопараметрического семейства квадрик. Наоборот, в состав огибающей произвольного однопараметрического семейства квадрик всегда входит линейчатая поверхность, на которой образующие одной серии движущейся квадрики огибают ангармоническое семейство.

Образующие касательных квадрик, в состав которых входят образующие данной линейчатой поверхности, составляют конкордантную конгруэнцию. Совокупность касательных к кривым ангармонического семейства образует трансверсальную конгруэнцию. Если даны два ангармонических семейства, то на каждой образующей поверхности существуют две точки, в которых кривые этих семейств касаются друг друга. Совокупность таких точек определяет кривые касания. Если одним из семейств является семейство асимптотических, то кривые касания называются кривыми соприкосновения. Фокальные точки конкордантной конгруэнции на каждой касательной квадрике образуют кривую третьего порядка, соответствие между точками которой (фокусами конгруэнции), перенесенное на образующую линейчатой поверхности с помощью лучей трансверсальной конгруэнции, определяет на этой образующей некоторую инволюцию. Двойные точки этой инволюции есть зеркальные точки. Фокальные поверхности конкордантной конгруэнции плюс данная линейчатая поверхность есть полная огибающая семейства касательных квадрик.

В определенной системе отнесения каждой кривой ангармонического семейства может быть поставлен в соответствие определенный параметр. Если в некоторой вспомогательной плоскости взять произвольное коническое сечение, то, записывая параметрическое уравнение этого сечения, можно через равенство параметров каждой кривой ангармонического семейства поставить в соответствие определенную точку сечения. С каждой точкой вспомогательной плоскости, не принадлежащей коническому сечению, сопоставляется пара кривых, соответствующих точкам пересечения конического сечения с полярой точки относительно этого сечения. Тогда каждой паре кривых линейчатой поверхности, не принадлежащих ангармоническому семейству, будет соответствовать подвижная точка вспомогательной плоскости, описывающая некоторую кривую. Если взять какое-либо другое ангармоническое семейство, то ему указанным выше образом будет соответствовать некоторое проективное движение вспомогательной плоскости, переводящее коническое сечение в себя. Принимая коническое сечение за абсолют плоскости, получают гиперболическое движение. Тем самым оказывается возможным характеризовать свойства ангармонических семейств с помощью соответствующих им гиперболических движений.

Медианными точками некоторой пары кривых относительно данного ангармонического семейства называют пару точек образующей линейчатой поверхности, которые соответствуют точкам пересечения вспомогательного конического сечения с касательной к кривой, являющейся образом данной пары кривых. При перемещении образующей по поверхности медианные точки описывают медианные кривые. Заменяя касательную гиперболической нормалью, получают гармонические кривые. Гармонические точки на каждой образующей гармонически делят как медианные точки, так и точки исходных кривых. Главным семейством пары кривых относительно некоторого исходного ангармонического семейства называют такое ангармоническое семейство, которое содержит эти кривые, причем последние гармонически делят медианные кривые пары кривых касания этих двух семейств.

Отмечается много частных случаев и ряд предложений, относящихся к определенным выше понятиям. Например, если характеристическая кривая семейства касательных квадрик вырождается в четырехсторонник, то в этом случае образующие касательных квадрик огибают на каждой из четырех линейчатых поверхностей, образованных сторонами четырехсторонника, ангармонические семейства. Как конкордантная, так и трансверсальная конгруэнции становятся W-конгруэнциями с линейчатыми фокальными поверхностями. Ангармонические семейства, обладающие такими свойствами, называются расслояемыми. Отмечаются далее такие пары кривых, медианные кривые которых относительно семейства асимптотических гармонически делят флекнодальные кривые семейства асимптотических. Дается безинтегральное представление таких кривых. Отмечается связь между некоторыми из рассмотренных пар кривых с кривыми, рассмотренными в разное время Терračини, Кунле и Болом. Н. И. Кованцов

3285. О цилиндрических конгруэнциях. Сабан (Sur les congruences cylindriques. Saban Giacomo), Istanbul Üniv. fen fak. mec., 1954, A19, № 2, 108—118 (франц.; рез. турец.)

Развернутое изложение и доказательства результатов, сообщенных в докладе на Международном математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 г. (РЖМат, 1955, 6068). Р. Н. Щербаков

3286. Отражение прямолинейных конгруэнций: предложение Дюпена — Дарбу, преобразование пар изометричных поверхностей. Йонас (Reflexion von Strahlensystemen: Dupin — Darbouxscher Satz, Transformation isometrischer Flächenpaare. Jonas Hans), Math. Nachr., 1954, 12, № 5—6, 367—383 (нем.)

Пусть (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) — единичные векторы падающего и отраженного луча конгруэнций от точки (x, y, z) поверхности, симметричные относительно ее касательной плоскости. Задача решается в параметрах (α, β) развертывающихся поверхностей конгруэнций, сохраняющихся при отражении. Привлекается вспомогательная конгруэнция, лучи которой имеют направление (X) нормалей отражающей поверхности (x), а развертывающиеся поверхности соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнций (X_1) и (X_2). Выводится формула

$$\sum x_\alpha X_\beta - \sum x_\beta X_\alpha = (\rho - \rho')(AB + fT^2),$$

где f — коэффициент формы Куммера вспомогательной конгруэнции; A, B выражаются через ее параметры, T связывает ее с конгруэнциями (X_1) и (X_2). Если $AB + fT^2 = 0$, то получается случай Дюпена (Малюса). конгруэнции (X_1), (X_2) — нормальные, (α, β) — сопряженная сеть на поверхности (x). $\rho - \rho' = 0$ приводит к дополняющему предложению Дарбу: конгруэнции (X_1), (X_2), вообще говоря, не являются нормальными, и лучи их пересекаются с поверхностью по линиям, не образующим в общем случае сопряженной сети; для обеспечения действительности гауссова кривизна K поверхности (x) предполагается положительной; лучи (X_1),

(X_2) лежат в плоскости главного нормального сечения поверхности (x) с большим из r и r' радиусом кривизны, составляя с касательной плоскостью угол σ, удовлетворяющий соотношению $\sin\sigma = T = \sqrt{r'/r}$ (пусть $r > r'$).

Применяя параметры (u, v) линий кривизны поверхности (x), автор доказывает, что с произвольной поверхностью (x) $(K > 0)$ можно связать конгруэнции (X_1), (X_2) со свойствами, подразумеваемыми в предложении Дарбу.

Далее к условиям Дарбу добавляются новые требования: конгруэнции (X_1), (X_2) нормальны, их развертывающиеся секут поверхность (x) по сопряженным линиям; поверхность (x) отмечается соотношениями: $\sqrt{E} = U/\cos\sigma$, $U = U(u)$, $r = U/\sin\sigma$, $r' = U\sin\sigma$, что приводит к постоянству ее главной кривизны в сечении $(u = \text{const})$, перпендикулярном к плоскости лучей (X_1), (X_2). Эволюта $(x^{(v)})$ такой поверхности (x) имеет линейный элемент $\Sigma(dx^{(v)})^2 = dr'^2 + (U^2 - r^2)\,du^2$ и совпадает с огибающей плоскостей, несущих лучи (X_1) и (X_2); ее сопряженные сети соответствуют сопряженным сетям на (x), а асимптотические линии — асимптотическим.

Второй особый случай теоремы Дарбу характерен тем, что поверхность (x) имеет постоянную главную кривизну в плоскости $(v = \text{const})$ лучей (X_1), (X_2); их расположение относительно поверхности (x) подвержено ограничению: уравнение, определяющее абсциссы (t) фокусов луча конгруэнции (X_1) переходит в подобное же уравнение для конгруэнции (X_2) при замене σ на $-\sigma$, t на $-t$. Получается, что не соответствующие друг другу фокусы лучей (X_1), (X_2) симметричны относительно нормали отражающей поверхности (x). У эволюты $(x^{(u)})$ поверхности (x) линейный элемент $\Sigma(dx^{(u)})^2 = dr^2 + (r^2 - V^2)\,dv^2$, где $V = V(v)$.

При $U = V = 1$ оба особых случая сливаются.

Отнесем две изометричные поверхности (x) и $(\bar{x})$ к общей, сохраняющейся при изгибании сопряженной сети (α, β), определяемой уравнением Лапласа: $x_{\alpha\beta} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} x_\alpha + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} x_\beta$. Изометричность поверхностей (x) и $(\bar{x})$ не нарушается при параллельном преобразовании сопряженной сети (преобразование Петерсона)

$$x'_\alpha = px_\alpha, \quad x'_\beta = qx_\beta, \quad \bar{x}'_\alpha = p\bar{x}_\alpha, \quad \bar{x}'_\beta = q\bar{x}_\beta,$$

где p и q удовлетворяют уравнениям:

$$p_\beta = -\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}(p - q), \quad q_\alpha = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}(p - q).$$

Пусть φ и φ' связаны преобразованием Петерсона $\varphi'_\alpha = p\varphi_\alpha$, $\varphi'_\beta = q\varphi_\beta$. Тогда формулы $x_1 = x - (\varphi/\varphi')\,x'$, $\bar{x}_1 = \bar{x} - (\varphi/\varphi')\,\bar{x}'$ осуществляют бигармоническое преобразование сопряженных сетей (x), $(\bar{x})$ в сопряженные же (x_1), $(\bar{x}_1)$. При бигармоническом преобразовании изометрия поверхностей не нарушается, если положить $\varphi' = (\Sigma x'^2 - \Sigma\bar{x}'^2)/2$. Автор вновь доказывает (Ann. mat. pura appl., 1924, 4, 309), что по известному интегралу φ уравнения Лапласа сопряженной сети (α, β) можно найти без квадратур изометричные пары (x'), $(\bar{x}')$ преобразования Петерсона и (x_1), $(\bar{x}_1)$ частного случая бигармонического преобразования.

Заключительные результаты.

Пусть поверхность $(\bar{x})$ катится по поверхности (x). Луч $\bar{x}\bar{x}_1$ увлекается ею. Рассмотрим геометрическое место γ следов точек $\bar{x}_1$, неподвижное по отношению к поверхности (x). Существует поверхность (ξ), отражаясь от которой, лучи $x\gamma_1$ проходят через точки x_1. Точка γ_1 зеркально отображается в точку x_1 о касательную плоскость поверхности (ξ), содержащую прямую пересечения касательных плоскостей поверхностей (x) и (x_1) (конгруэнция таких прямых гармонична сопряженным сетям (x) и (x_1)). При одновременном качении поверхности $(\bar{x})$ по (x) и $(-x_1)$ по (x_1) или $(-x)$ по (x) и $(\bar{x}_1)$ по (x_1), соответствующие друг другу кинематически сопряженные касательные к поверхностям (x) и (x_1) пересекаются. К. Н. Тихоцкий

3287. Об одном отображении пространства прямых на E_4. Винченсини (Sur une représentation de l'espace réglé dans E_4. Vincensini Paul), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 262—263 (франц.)

Эффективность отображения прямых трехмерного евклидова пространства E_3 на гиперквадрику пространства E_5 в применении к метрическим задачам незначительна. Больший интерес, по мнению автора, представляет изучение соответствия (C) между прямыми $A(p_{ij})$ пространства E_3 и точками $a(x, y, z, t)$ евклидова пространства E_4, для которого E_3 есть его сечение $t = 0$; соответствие (C) определяется формулами: $\rho p_{12} = x + iy$, $\rho p_{13} = z + it$, $\rho p_{14} = -1$, $\rho p_{34} = x - iy$, $\rho p_{42} = z - it$, $\rho p_{23} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Две прямые A пересекаются, если их образы a лежат на одной изотропной прямой пространства E_4, и (C) ставит в соответствие линейным комплексам (конгруэнциям) пространства E_3 гиперсферы (соответственно сферы) пространства E_4.

Образами касательных поверхности S пространства E_3 служат точки гиперповерхности пространства E_4 — геометрического места ∞^2 изотропных прямых, образующих конгруэнцию (I); образы двух сопряженных касательных сопряжены относительно фокусов (образов асимптотических касательных). (I) сечет E_3 по поверхности, являющейся преобразованием Ли поверхности S; ее нормали являются ортогональными проекциями лучей (I) на E_3, а центры кривизны на них — проекциями фокусов конгруэнции (I).

Свойства указанного типа прилагаются к изучению метрических задач в линейчатом пространстве E_3. Пусть, например, фокусы φ, φ' конгруэнции (I) сопряжены относительно пересечений M, M' конгруэнции (I) с E_3 и гиперплоскость H пространства E_4 параллельна E_3, находясь от E_3 на расстоянии ik. Тогда в E_3 проекции F, F' фокусов φ, φ' — центров кривизны следа Σ конгруэнции (I) на пространстве E_3 — вместе с точкой M, в которой (I) сечет E_3, удовлетворяют соотношению $\overline{MF} \times \overline{MF'} = k^2$, и Σ оказывается поверхностью постоянной кривизны. Показано, что Σ является преобразованием Ли некоторой поверхности (R) Вильчинского.

Если H есть бесконечно удаленная гиперплоскость пространства E_4, то в силу симметрии F и F' относительно M, Σ оказывается минимальной поверхностью и вместе с тем также преобразованием Ли некоторой поверхности (R). Отсюда вытекает новая связь между поверхностями постоянной кривизны и минимальными: все они оказываются поверхностями, получающимися преобразованием Ли из поверхностей (R).

С. Д. Россинский

3288. О применении одного отображения пространства прямых на гиперпространство к изучению некоторых вопросов дифференциальной геометрии. Винченсини (Sur l'application d'une représentation hyperspatiale de l'espace réglé à l'étude de certaines questions de géométrie différentielle. Vincensini Paul), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 11, 1090—1105 (франц.)

Пространство прямых трехмерного евклидова пространства E_3 отображается на евклидово пространство $E_4(Ox_1x_2x_3x_4)$, из которого E_3 высекается гиперплоскостью $x_4 = 0$.

Отображение устанавливается посредством уравнений:

$$2p_{34}x_1 = -(p_{14} + p_{23}), \quad 2p_{34}x_2 = i(p_{14} - p_{23}),$$
$$2p_{34}x_3 = -(p_{24} + p_{31}), \quad 2p_{34}x_4 = i(p_{24} - p_{31}),$$

где p_{ik} суть плюккеровы координаты прямой в E_3. Эти уравнения относят комплексу, конгруэнции и демиквадрике E_3 соответственно гиперсферу (или гиперплоскость), сферу и окружность E_4; пучку прямых в E_3 отвечает в E_4 изотропная прямая. Комплекс ∞^3 касательных к поверхности S в E_3 изображается конгруэнцией изотропных прямых, причем фокусы конгруэнции соответствуют асимптотическим касательным S. Точки пересечения этой конгруэнции с E_3 образуют поверхность S', главные центры кривизны которой суть ортогональные проекции на E_3 фокусов конгруэнции; линии кривизны S' соответствуют асимптотическим S.

Полученные результаты позволяют привлечь свойства метрического пространства для изучения вопросов проективно-дифференциальной геометрии. В качестве примера приводится следующий результат: наиболее общая поверхность Вильчинского может быть получена при помощи преобразования Ли (переводящего прямые в сферы) из поверхности евклидова пространства, главные центры кривизны которой гармонически разделяют точки пересечения проходящей через них нормали к поверхности с двумя фиксированными плоскостями.

А. М. Березман

3289. О применении комплексных и гиперкомплексных чисел к теории прямолинейных конгруэнций. Габададзе Н. А., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 10, 641—645

Применяются обычные комплексные числа, двойные числа $a + be$, $e^2 = +1$ и вещественные матрицы второго порядка к теории прямолинейных конгруэнций соответственно 3-мерного пространства Лобачевского ${}^1S_3$, 3-мерного неевклидова пространства ${}^2S_3$ индекса 2 и 3-мерного проективного пространства P_3. В первых двух случаях абсолюты ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$ отображаются на плоскости комплексного и двойного переменного, дополненные идеальными точками, причем движения изображаются дробно-линейными преобразованиями. При этом всякой конгруэнции прямых соответствует функция комплексного или двойного переменного, отображающая друг на друга изображения точек пересечения прямых конгруэнции с абсолютом. С помощью этих функций находятся параметр распределения и центральные перпендикуляры прямых конгруэнций ${}^1S_3$ и ${}^2S_3$. В третьем случае многообразие прямых P_3 отображается на пространство матриц, дополненное идеальными точками, причем проективные преобразования изображаются дробно-линейными преобразованиями матриц. При этом всякой паре конгруэнций прямых (с соответствием прямых этих конгруэнций) соответствует функция матричного переменного, отображающая друг на друга изображения прямых конгруэнций. С помощью этих функций находятся предельные директрисы, предельный направляющий тетраэдр и параметр распределения соответственных прямых пары конгруэнций P_3.

Б. А. Розенфельд

3290. Семейства изотропных прямых в эллиптическом пространстве. Петканчин (Роеве изотропни прави в елиптичното пространство. Петканчин Боян), Изв. на Матем. ин-т Българ. АН, 1954, 1, № 2, 171—198 (болг.; рез. русс., нем.)

Рассматривается комплексное трехмерное эллиптическое пространство радиуса кривизны k. Его абсолют в ортогональной системе координат имеет уравнение $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Две точки x и y называются ортогональными, если $xy = \Sigma_{i=0}^3 x_i y_i = 0$. Бесконечно удаленными называются точки, лежащие на абсолюте. Для конечных точек $x^2 = \Sigma_{i=0}^3 x_i^2 \neq 0$. Расстоянием между конечными точками называется любое комплексное число δ, для которого $\cos\delta/k = xy/\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$. Прямая, определяемая точками x и p, называется изотропной, если она касается абсолюта, т. е. если $x^2 \neq 0$, $p^2 = 0$, $xp = 0$. Изучается однопараметрическое семейство G изотропных прямых $g(u)$, определяемых точками $x(u)$, $p(u)$, где u — комплексный параметр, изменяющийся в некоторой области D.

Предполагается, что при любом u:

$$\Delta = (pp_1xx_1) \neq 0, \quad px_1 \cdot p_1p_2 - p_1^2(p_1x_1 + px_2) \neq 0,$$

где $p_1 = dp/du$, $p_2 = d^2p/du^2$, $x_1 = dx/du$, $x_2 = d^2x/du^2$, Δ — определитель из координат четырех точек. Ранее автором (Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., XLII, кн. 1, ч. 1, 93—105) были введены инвариантно связанные с семейством G центральная точка

$$z = x + \frac{p_1^2 \cdot x_1^2 + p_1x_1 \cdot px_2 - px_1 \cdot p_1x_2}{px_1 \cdot p_1p_2 - p_1^2(p_1x_1 + px_2)} \cdot p$$

и естественный параметр

$$\sigma = \int_{u_0}^{u} \frac{px_1 \cdot p_1p_2 - p_1^2(p_1x_1 + px_2)}{p_1^2 \cdot px_1}\, du.$$

Проективная координатная система называется циклической, если уравнение абсолюта имеет в ней вид $y_0^2 + y_2^2 + 2y_1y_3 = 0$.

Доказывается, что циклическая система a_0, a_1, a_2, a_3, e вполне характеризуется свойствами: 1) a_1, a_3 — точки абсолюта, 2) a_0, a_2 ортогональны и лежат на абсолютной поляре прямой a_1, a_3, 3) полярные плоскости точки e относительно тетраэдра $a_0a_1a_2a_3$ и относительно абсолюта совпадают. Циклические координатные системы преобразуются в себя при проективном преобразовании, сохраняющем абсолют. С каждой прямой $g(\sigma)$ из G автор связывает инвариантным образом циклическую координатную систему и выводит ее деривационные формулы.

Доказываются теоремы: 1. Центральная линия $z(\sigma)$ на линейчатой поверхности F, образованной прямыми семейства G, является единственной линией кривизны, отличной от изотропных прямых из G. 2. Центральная точка $z(\sigma)$ является единственной точкой прямой $g(\sigma)$, для которой образующая поверхности Ли, отвечающей этой прямой, является изотропной. Поверхность Ли для прямой $g(u)$ определяется как линейчатая поверхность, каждая из прямых которой проходит через свою точку $m(\lambda, \mu)$ прямой $g(u)$ и получается как предельное положение прямой, проходящей через точки $m(\lambda, \mu, \varepsilon_1)$ на $g(u + \varepsilon_1)$ и $m(\lambda, \mu, \varepsilon_2)$ на $g(u + \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

Г. И. Кручкович

3291. Ранг 4-сетей кривых на плоскости. Дуа (Le rang des 4-réseaux de courbes dans le plan. Dou Albert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 211—212 (франц.)

Сеть кривых T^4 задается явными функциями $s = s(u, v) = 0$, $t = t(u, v) = 0$. Говорят, что T^4 имеет ранг 1, 2, 3, если существует соответственно одно, два или три линейно-независимых соотношения типа $R \equiv S(s) + T(t) + U(u) + V(v) = 0$.

Автор указывает простой способ получения дифференциальных соотношений для функций s и t, необходимых и достаточных для того, чтобы сеть имела тот или иной ранг. Эти условия естественным образом выражаются в терминах ранга матрицы, с помощью которой $\partial^m R / \partial u^k \partial v^l$, $2 \leqslant m \leqslant 5$, $k, l \geqslant 1$, выражаются через производные S и T.

И. З. Розенкноп

3292 К. Курс дифференциальной геометрии. Выпуск первый. Векторы и тензоры. Элементарная теория.

Жулиа (Cours de géométrie infinitésimale. Premier fascicule. Vecteurs et tenseurs. Théorie élémentaire. Julia Gaston. 2ème éd. Gauthier—Villars, Paris, 1953, XV+102 + I p., 2000 francs) (франц.)

Пересмотренное и дополненное автором издание учебника, написанного для студентов Политехнической школы. Содержит стандартный материал векторной алгебры и свойства вихря, дивергенции и градиента. В дополнении автор рассматривает свойства декартовых тензоров в прямоугольной и косоугольной системах координат. Главным нововведением сравнительно с первым изданием является рассмотрение симметрического тензора второго порядка в связи с соответствующей квадратичной формой.

С сожалением можно узнать из этой книги, что во Франции, так же как и в Соединенных Штатах, преподавание векторов и тензоров в университетах не связывается с современными теориями линейной алгебры и дифференциальных форм. C. B. Allendoerfer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 352.

3293 Д. Изгибание эллипсоида с коническими точками. Гебель (Biegungsflächen der Rotationsellipsoide mit konischen Punkten. Goebel Wolfgang), Diss. Techn. Univ., Berlin, 1953, 41 Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 21, 1774 (нем.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3294. Замкнутые минимальные поверхности. Пинл (Geschlossene Minimalflächen. Pinl M.), Compositio math., 1954, 12, № 2, 178—184 (нем.)

Рассматривается модель евклидовой плоскости в четырехмерном евклидовом пространстве R_4:

$$x_1 = \cos u,\ x_2 = \sin u,\ x_3 = \cos v,\ x_4 = \sin v.$$

Эта модельная поверхность в R_4 не будет минимальным многообразием V_2.

Обращая внимание на известную теорему: Если дано действительное многообразие V_m в некотором V_n и притом $n > m+1$, то для всякого $q \leqslant n-m-1$ существует бесчисленное множество многообразий V_{m+q}, содержащих V_m, по отношению к каждому из которых V_m будет минимальным многообразием (Schouten J. A., Śruik D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen, 1938, 94), автор ставит и решает задачу: для указанной модельной поверхности V_2 найти такое V_3, по отношению к которому V_2 будет минимальной поверхностью; V_3 будет гиперсферой пространства R_4. Кроме того, в соответствии с теоремой Бомпьяни о свойствах изотропных линий минимальной поверхности риманова пространства автор показывает, что изотропные линии модельной поверхности будут системой импримитивности (Ли) по отношению к группе неевклидовых переносов в сферическом трехмерном пространстве, но не будут таковыми по отношению к группе евклидовых переносов в евклидовом четырехмерном пространстве. Результаты обосновываются вычислениями тензорным методом. С. С. Бюшгенс

3295. Изгибание поверхности в евклидовом пространстве с жесткой линией и полосой. Бомпьяни (Deformazioni di superficie di uno spazio euclideo con linee e striscie rigide. Bompiani Enrico), Matematiche, 1954, 9, № 2, 154—175 (итал.)

Для случая поверхностей трехмерного пространства рассматриваются элементы второго порядка E_2 на паре налагающихся поверхностей такие, что их кривизны соответственно равны. Необходимое и достаточное условие равенства этих кривизн состоит в том, чтобы на обеих поверхностях соприкасающиеся плоскости этих элементов образовали с касательными плоскостями поверхностей равные углы $\neq \pi/2$. В каждой паре соответствующих точек налагающихся поверхностей определяется четыре направления, таких, что любые E_2 с указанными направлениями имеют на этих поверхностях равные кривизны, причем среди этих направлений может быть не более двух действительных различных. Получив классический результат о том, что жесткая линия изгибания, если она существует, обязана быть асимптотической, автор показывает обобщения этой теоремы для поверхностей в четырехмерном пространстве и для изгибаний высшего рода. В зависимости от размерности пространства требование, чтобы полоса первого порядка вокруг жесткой линии сама была жесткой, следует из жесткости линии или принимается как дополнительное ограничение. Во всех случаях, рассмотренных автором, выступает условие, чтобы соответствующая линия была квазиасимптотической того или иного типа. В. В. Рыжков

3296. Геометрия аффинной группы, оставляющей инвариантной каноническую внешнюю дифференциальную форму четырех переменных. Теория гиперповерхностей. Гриндей (Geometria grupului afin ce lasă invariantă forma diferențială exterioară canonică în patru variabile. Teoric hipersuprafețelor. Grindei Ion), Studiişi cercetări ştiinţ., 1954, 5, № 3—4, 85—97 (рум.; рез. русс., франц.)

Изучается трехмерная поверхность в четырехмерном пространстве, основной группой которого служит аффинная группа, оставляющая инвариантной внешнюю дифференциальную форму $[dx_1\,dx_2] + [dx_3\,dx_4]$. Находятся формулы Френе и условия, которым должны удовлетворять инварианты поверхности для интегрируемости этих уравнений. Специально рассматривается случай, когда все инварианты постоянны; поверхности, обладающие этим свойством, являются аффинными гиперсферами. Б. А. Розенфельд

3297. О классификации линейных комплексов плоскостей. Лонго (On the classification of linear complexes of planes. Longo Carmelo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 239—240 (англ.)

Классификации линейных комплексов плоскостей в проективном пространстве S_n с соответствующей проективной группой для $n = 5$ и $n = 6$ были даны рядом авторов ранее. Эти классификации основаны на рассмотрении: 1) особой линии (каждая плоскость, проходящая через нее, принадлежит комплексу); 2) области особых точек рода h (каждая особая прямая, проходящая через такую точку P, принадлежит $S_{2h+\varepsilon}$, где $\varepsilon = 0,1$ в зависимости от четности n. $S_{2h+\varepsilon}$ называется особым пространством, ассоциированным с точкой P); 3) порядка χ группы гомографических преобразований, переводящих комплекс в себя.

Автор сообщает о полной классификации линейных комплексов, найденной им для $n = 7$ и основанной на рассмотрении особой полной плоскости, характеризующейся тем, что каждая ее линия является особой. Для $n \leqslant 7$ проективно эквивалентные комплексы характеризуются своими конфигурациями особых полных плоскостей. Таким путем, кроме комплекса общего типа (без особых полных плоскостей), получают специальный тип комплексов, характеризующихся наличием только одной полной особой плоскости, и 11 частных типов с минимальным числом особых полных плоскостей, равным двум (каждый такой комплекс имеет, по меньшей мере, одну особую точку рода 2).

Сообщается о том, что автором найдена классификация комплексов, имеющих, по меньшей мере, одну осо-

бую точку рода 3 для $n = 8$, и о том, что им найдена классификация пучков (pensils) комплексов в S_5.
Н. И. Кованцов

3298. Теорема об обобщенных сопряженных сетях в проективном n-пространстве. Белл (A theorem on generalized conjugate nets in projective n-space. Bell P. O.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 323—327 (англ.)

Пусть M_0 — текущая точка r-мерного аналитического многообразия $V_0 \subset S_n$ ($r \leqslant n-1$); $M_0, M_1, \ldots, M_n$ — вершины локальной системы отнесения, причем $M_1, M_2, \ldots, M_r$ помещены на касательных к параметрическим линиям $u^1, u^2, \ldots, u^r$. Тогда $\partial M_i / \partial u^\alpha = \Gamma^h_{i\alpha} M_h$ ($\alpha = 1, \ldots, r$; $i, h = 0, 1, \ldots, n$). Параметрическую сеть на V_0 автор называет (α, β)-сопряженной, если $\Gamma^p_{\alpha\beta} = 0$ ($p = r+1, \ldots, n$). В работе рассмотрен случай, когда V_0 является r-сопряженной системой. Доказана теорема:

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_r$ — точки соответственно на $u^1, u^2, \ldots, u^r$-касательных, которые описывают многообразия $V_1, V_2, \ldots, V_r$, обладающие тем свойством, что касательная r-плоскость каждого V_α в M_α проходит через каждую точку M_β ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$). Тогда параметрическая сеть на V_α будет (α, β)-сопряженной и (α, β)-лапласово преобразование V_α в точке M_α есть точка $\partial M_\alpha / \partial u^\beta - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} M_\alpha$ (α фиксировано, $\neq \beta$), являющаяся пересечением u^β-касательной к V_α в M_α с $(r-2)$-плоскостью, определяемой точками $M_1, M_2, \ldots, M_{\alpha-1}, M_{\alpha+1}, \ldots, M_r$.
В. Т. Базылев

3299. О симметрических гармонических пространствах Уокера. Кути (Sur les espaces symétriques harmoniques de Walker. Couty Raymond), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 23, 1576—1577 (франц.)

Уокер нашел (J. London Math. Soc., 1946, **21**, 47—57) все симметрические гармонические римановы пространства 4 измерений (гармоническим называется римановo пространство, в котором для любой фиксированной точки A существует гармоническая функция вида $\varphi(s)$, где s — геодезическое расстояние переменной точки от точки A). Не считая пространств постоянной кривизны, это будут:

1) $ds^2 = f^{-2} b^{-1} (b dz^1 - c dz^2)(b d\bar{z}^1 - c^* d\bar{z}^2) + f^{-1} b^{-1} dz^2 d\bar{z}^2$,

где $z^1 = x^1 + ix^2$, $z^2 = x^4 + ix^3$, $f = 1 + K(z^1\bar{z}^1 + z^2\bar{z}^2)/2$, $b = 1 + Kz^2\bar{z}^2/2$, $c = Kz^1\bar{z}^2/2$, K — вещественная константа, звездочка означает комплексную сопряженность (комплексная запись (1) принадлежит автору)

2) $ds^2 = 2f^{-2}\beta^{-1}(\beta dx^2 - \delta dx^3)(\beta dx^1 - \gamma dx^4) + 2f^{-1}\beta^{-1} dx^3 dx^4$,

где $f = 1 + K(x^1x^2 + x^3x^4)$, $\beta = 1 + Kx^3x^4$, $\gamma = Kx^1x^3$, $\delta = Kx^2x^4$,

3) $ds^2 = K(x^2dx^1 - x^1dx^2)^2 + 2dx^1 dx^3 + 2dx^2 dx^4$.

Метрика 1) положительно определенная, а 2) и 3) имеют сигнатуру $(++--)$.

В этих пространствах автор находит всевозможные косые билинейные дифференциальные формы с нулевой ковариантной производной:

1) $2f^{-2}b^{-1}(bdz^1 - cdz^2) \wedge (bd\bar{z}^1 - c^* d\bar{z}^2) + f^{-1}b^{-1} dz^2 \wedge d\bar{z}^2$,

2) $2f^{-2}\beta^{-1}(\beta dx^2 - \delta dx^3) \wedge (\beta dx^1 - \gamma dx^4) + 2f^{-1}\beta^{-1} dx^3 \wedge dx^4$,

3) Любая форма φ, коэффициенты которой φ_{23}, φ_{14}, φ_{13} — произвольные константы, $\varphi_{34} = 0$, $\varphi_{24} = -\varphi_{13}$, $\varphi_{12} = K\{(x^1)^2\varphi_{14} - 2x^1x^2\varphi_{13} - (x^2)^2\varphi_{23} + C\}/2$, C — произвольная константа.

Кроме того, в случае 3) все линейные дифференциальные формы, у которых коэффициенты φ_1, φ_2 постоянны и $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$, также обладают нулевой ковариантной производной.
П. К. Рашевский

3300. О вырождающихся римановых пространствах. Янкевич (Sur les espaces riemanniens dégénérés. Jankiewicz Czesław), Bull. Acad. polon. sci. Cl 3, 1954, **2**, № 7, 301—304 (франц.)

О вырождающихся римановых пространствах. Янкевич Ч., Бюл. Польск. АН. Отд. 3, 1954, **2**, № 7, 305—308

Пусть матрица $(g_{\varkappa\lambda})$ формы

$$ds^2 = g_{\varkappa\lambda} dx^\varkappa dx^\lambda \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

имеет ранг $m < n$. Автор строит класс афинных связностей, связанных с формой (1) условием $\nabla_\alpha g_{\varkappa\lambda} = 0$ и некоторым другим соотношением, сохраняющимся только при преобразованиях вида

$$x^h = x^h(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m), \quad x^r = x^r(\bar{x}^{m+1}, \ldots, \bar{x}^n).$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ r = m+1, \ldots, n).$$

W. Ślebodziński

3301. Об инфинитезимальных изометриях и группе голономии риманова пространства. Герман (Sur les isométries infinitésimales et le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann. Hermann Robert), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 19, 1178—1180 (франц.)

Приводятся некоторые теоремы, касающиеся однопараметрических групп изометрий риманова пространства с полупростой или неприводимой группой голономии. Пусть V_n — связное дифференцируемое многообразие класса C^∞, η — векторное поле в окрестности точки $x \in V_n$, удовлетворяющей некоторым условиям регулярности, $\omega = \omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — базис для системы линейных форм класса C^∞. Через $\eta(\omega)$ обозначается производная Ли от ω по отношению к однопараметрической группе, порождаемой полем η. Найдется матрица a такая, что $\eta(\omega) = a\omega$. Пусть L_n — алгебра Ли всех вещественных матриц $(n \times n)$, $L_x(a)$ — минимальная подалгебра L_n, содержащая a в точке x. Пусть θ — матрица $(n \times n)$ из линейных форм. Полагаем $\Omega = d\theta - \theta \wedge \theta$, $D^q(\Omega) = d(D^{q-1}(\Omega)) - \theta \wedge D^{q-1}(\Omega) + (-1)^q D^{q-1}(\Omega) \wedge \theta$. Алгебра голономии $\tilde{H}$ определяется как $\tilde{H} = L_x(\Omega, D\Omega, \ldots)$ (т. е. минимальная подалгебра L_n, содержащая значения матриц $\Omega, D\Omega, \ldots$ на поливекторах касательных к V_n в точке x). В этом случае имеет место

Теорема 1. Если η удовлетворяет условию $da = \eta(\theta) + \theta \wedge a - a \wedge \theta$, точка x регулярная и $\tilde{H}$ полупростая, то $L_x(a) \in \tilde{H}$ + централизатор $\tilde{H}$ в L_n.

Указывается, что следствием из теоремы 1 является результат Яно (Yano K. Curvature and Betti numbers, Princeton, 1953, 58), в соответствии с которым всякая однопараметрическая группа аффинных изоморфизмов компактного риманова многообразия является группой изометрий. Пусть на V_n дана G-структура, где G — подгруппа действительной ортогональной группы $O(n)$.

Теорема 2. Если V_n снабжена G-структурой ($G \subset O(n)$) без кручения, удовлетворяющей условию $\tilde{G} \supset \tilde{H}$ + централизатор $\tilde{H}$ в $\tilde{O}(n)$, причем $\tilde{H}$ — полупростая или неприводимая, то всякая однопараметри-

ческая группа изометрий римановой структуры является в то же время группой автоморфизмов G-структуры.

Как следствие дальнейшей теоремы приводится утверждение, что на компактном симметрическом пространстве гармонические формы характеризуются обращением в нуль их производной Ли по отношению к любому полю векторов Киллинга.

В. В. Рыжков

3302. * **Замкнутые многообразия с однородной комплексной структурой.** **Ван Сянь-чжун** (Closed manifolds with homogeneous complex structure. Wang Hsien-Chung), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 1—32 (англ.)

В работе изучаются замкнутые однородные комплексно-аналитические многообразия с тривиальной фундаментальной группой, называемые автором C-пространствами.

Перечислим некоторые основные результаты.

Теорема 1. Каждое C-пространство гомеоморфно факторпространству K/X, где K — компактная полупростая группа Ли, а X — замкнутая связная подгруппа группы K, полупростая часть которой совпадает с полупростой частью централизатора тороидной подгруппы группы K (C-подгруппа по терминологии автора).

Теорема 2. Пусть X — C-подгруппа односвязной компактной полупростой группы Ли K. Если факторпространство K/X четномерно, то оно допускает комплексно-аналитическую структуру.

Теорема 3. Компонент единицы группы всех аналитических гомеоморфизмов C-пространства локально представим в виде прямого произведения комплексной полупростой группы Ли и комплексной векторной группы.

Теоремы 4—5. Каждое односвязное замкнутое многообразие с отличной от нуля эйлеровой характеристикой χ допускает только конечное число различных однородных комплексных структур. Если $\chi = 0$, то односвязное замкнутое многообразие либо вовсе не допускает однородную комплексную структуру, либо допускает несчетное множество различных структур.

Назовем факторпространство K/U M-многообразием, если K — односвязная компактная простая группа Ли, U — полупростая C-подгруппа группы K.

Теорема 6. Каждое C-пространство является базой расслоения прямого произведения M-многообразий с тором в качестве слоя. Каждое четномерное прямое произведение M-многообразий допускает бесчисленное множество различных однородных комплексных структур, не являющихся келеровыми.

Приведены полные доказательства теорем, основанные на теории алгебр Ли и на результатах Бохнера и Монтгомери (Bochner S., Montgomery D., Ann. Math., 1947, **48**, 659—669), относительно однородных комплексных многообразий. Р. В. Гамкрелидзе

3303. Линейные неприводимые группы и дифференциальная геометрия. **Кобаяси** (Des groupes linéaires irréductibles et la géométrie différentielle. Kobayashi Shôshichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 934—936 (франц.)

Доказывается лемма: Пусть H — связная, замкнутая и неприводимая подгруппа ортогональной группы $O(n)$. Если n нечетно, то связный нормализатор $N(H)$ группы H в $O(n)$ совпадает с H, если n четно, то или H можно рассматривать как подгруппу унитарной группы с детерминантом 1, или $N(H)$ совпадает с H.

Отсюда получается теорема: Пусть V_n — n-мерное неприводимое риманово пространство и σ_p — его группа голономии в точке p. Пусть далее G — группа изометрических преобразований V_n и H_p — группа изотропии точки p. Тогда или связная компонента стационарности группы H_p содержится в σ_p, или V_n является псевдокелеровым пространством, имеющим равную нулю кривизну Риччи. Если r и d обозначают размерности группы изометрических преобразований G и группы голономии σ_p, то в первом случае $r \leqslant n + d$, а если V_n — псевдокелерово с равной нулю кривизной Риччи, то $r \leqslant n + d + 1$. Г. И. Кручкович

3304. О кривых в келеровом пространстве. **Оцуки, Тасиро** (On curves in Kaehlerian spaces. Ōtsuki Tominosuke, Tashiro Yoshihiro), Math. J. Okayama Univ., 1954, **4**, № 1, 57—78 (англ.)

Пусть $z^\lambda = z^\lambda(s)$ — линия келерова пространства, $\mathbf{e}_1$ — касательный единичный вектор и $\mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_1$ ему ортогональный. Линии, вдоль которых $D\mathbf{e}_1/ds = 0$, являются геодезическими. В работе рассматриваются линии, вдоль которых $D\mathbf{e}_1/ds = \rho(s)\,\mathbf{e}_1$ или, что то же: $D\mathbf{e}_1/ds = \sigma(s)\,\mathbf{e}_2$, $D\mathbf{e}_2/ds = -\sigma(s)\,\mathbf{e}_1$, где $\sigma(s)$ — действительная функция дуги s кривой. Такие линии названы голоморфно плоскими линиями. При $\sigma(s) \equiv 0$ возвращаемся к геодезическим линиям. Доказывается, что кривые, лежащие на геодезических комплексных линиях, являются голоморфно плоскими и обратно. В случае пространства Фубини голоморфно плоские линии лежат на комплексных прямых.

Рассматривается отображение двух пространств с соответствием голоморфно плоских линий, названное голоморфно проективным соответствием. Для пространств, находящихся в таком соответствии, получены соотношения между символами Христоффеля. Доказывается, что эрмитово пространство, находящееся в голоморфно проективном соответствии с келеровым, само келерово; что пространство, находящееся в голоморфно проективном соответствии с пространством Фубини, является пространством Фубини (обобщение теоремы Бельтрами) и несколько подобных фактов.

Л. Е. Евтушик

3305. О действительных представлениях келеровых многообразий. **Яно, Моги** (On real representations of Kaehlerian manifolds. Yano Kentaro, Mogi Isamu), Ann. Math., 1955, **61**, № 1, 170—189 (англ.)

Приведены полные доказательства опубликованных раньше результатов (РЖМат, 1955, 1463).

М. В. Васильева

3306. Общие дифференциальные свойства пространств A_n с максимальной группой движений G_{n^2}. **Врэнчану** (Proprietăţi diferenţiale globale ale spaţiilor A_n cu grup maxim G_n^2. Vrănceanu G.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 1, 49—59 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются свойства геодезических в пространствах аффинной связности без кручения, допускающих полные группы движений G_{n^2} порядка n^2 (Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 9; 1949, **64**, № 5). Показывается, что необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство аффинной связности (с кручением или без кручения) допускало группу G_{n^2}, является наличие такой системы координат, в которой коэффициенты связности Γ^i_{jk} определяются формулами

$$\Gamma^1_{11} = \alpha,\ \Gamma^h_{k_1} = \delta^h_k \beta,\ \Gamma^h_{1k} = \delta^h_k \gamma,\ \Gamma^h_{11} = \delta x^h,$$

$$\text{остальные } \Gamma^i_{hk} = 0,$$

где α, β, γ, δ суть постоянные. Выясняется, что рассматриваемые пространства являются пространствами с постоянной связностью (так называются простран-

ства, коэффициенты связности которых в некоторой системе координат постоянны).

Затем выводится результат референта (РЖМат, 1954, 2317) о том, что группа движений G_{n^2} состоит из проективных преобразований n-мерного проективного пространства $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, оставляющих на месте абсолют

$$y^{i^2} + \varepsilon = 0,\ \varepsilon = 0,\ 1, -1.$$

Далее выписывается структура группы G_{n^2} и отмечается среди рассматриваемых пространств наличие двух симметрических пространств Картана (Егоров И. П., Докл АН СССР, 1952, 87, № 5). И. П. Егоров

3307. Геодезические поля направлений и проективные системы путей. Шапиро Я. Л., Матем. сб., 1955, **36**, № 1, 125—148

Семейство поверхностей X_m, зависящее от m параметров пространства аффинной связности A_{m+n}, определяет геодезическое поле, если совокупность X_m, проходящих через точки любой геодезической линии A_{m+n}, образует вполне геодезическую X_{m+1}. Независимые касательные векторы таких X_m удовлетворяют уравнению

$$\nabla_\beta \overset{a}{V}{}^\alpha = T^\alpha \delta^\alpha_\beta + \overset{a}{B}{}^{\ b}_{\beta}\overset{b}{V}{}^\alpha,$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m+n,\quad a, b, c = n+1, \ldots, n+m.$ Принимая эти X_m за координатные поверхности $x^i = \mathrm{const}$; $i, j, k = 1, \ldots, n$, будем иметь для коэффициентов связности A_{m+n}

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Pi^i_{\alpha\beta}(x^a) + \psi_{(\alpha}\delta^i_{\beta)};\ \Pi^i_{\alpha\beta} = 0,$$

а система уравнений геодезических линий содержит подсистему

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Pi^i_{jk}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt} + \psi_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0, \qquad (1)$$

совпадающую с полной системой геодезических в пространстве A_n с коэффициентами связности Π^i_{jk}.

Если пространство A_{m+n} риманово, а координатные X_m определяют геодезическое поле и неизотропны, то линейный элемент пространства может быть приведен к виду

$$ds^2 = g_{ab}(v^c)dx^a dx^b + e^{2T(v^c)}\,\Pi_{ij}(v^k)dx^i dx^j, \qquad (2)$$

а система (1) определяет вполне геодезическую поверхность $x^a = \mathrm{const}$.

Если форма $\Pi_{ij}dx^i dx^j$ имеет постоянную кривизну, то пространство будет общим субпроективным пространством Кагана (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1933, **1**, 12—101).

Пространство A_{m+1}, допускающее геодезическое поле траекторий аффинных коллинеаций, есть ассоциированное пространство Томаса для путей n-мерного пространства проективной связности, определяемых уравнениями (1).

Пространство Шварцшильда, соответствующее центрально-симметричному полю релятивистской теории тяготения, является частным случаем пространства с линейным элементом (2). В работе не отмечено, что римановы пространства с линейным элементом (2) рассматривались референтом (Матем., сб., 1949, **24** (66), № 1, 84). А. П. Норден

3308. Геометрия интеграла. Васильева М. В., Матем. сб., 1955, **36**, № 1, 57—92

Работа посвящена построению понятий и объектов, связанных с двойным интегралом $\iint f(x, y, z, p, q)dx\,dy$ и инвариантных относительно бесконечной группы точечных преобразований. Так как для задания интеграла достаточно указать подинтегральную функцию, то задачу можно сформулировать как изучение многообразия $f = f(x, y, z, p, q)$ в пространстве переменных (x, y, z, p, q, f). Это изучение ведется методом Г. Ф. Лаптева и А. М. Васильева, суть которого состоит в том, что к изучаемому многообразию, погруженному в пространство представления той или иной группы (конечной или бесконечной), присоединяется последовательность фундаментальных геометрических объектов и дальнейшее сводится к охвату этой последовательностью других объектов, связанных с многообразием. При этом многообразие должно быть задано системой дифференциальных уравнений Пфаффа, записанных с помощью инвариантных форм группы. В реферируемой работе эта система состоит из одного уравнения

$$dF - F\omega^{\hat{i}}_{\hat{i}} = a_i\omega^i - b^{\hat{i}}\omega^3_{\hat{i}};\quad i = 1, 2, 3;\ \hat{i} = 1, 2; \qquad (A)$$

которое получается следующим образом.

Пусть основное представление группы в пространстве точек (x, y, z) определяется инвариантными формами ω^i. Если формы $\omega^{\hat{i}}$ определяют базис дифференциалов dx и dy, то интеграл может быть записан в виде $\iint F[\omega^1\omega^2]$. В силу структурных уравнений группы

$$D\omega^i = [\omega^k\omega^i_k],\ D\omega^j_i = [\omega^k_i\omega^j_k] + [\omega^j_{ik}\omega^k], \ldots,$$

система форм ω^i, $\omega^3_{\hat{i}}$ вполне интегрируема и потому определяет представление группы. Пространством этого представления оказывается пространство переменных (x, y, z, p, q). Система ω^i, $\omega^3_{\hat{i}}$, $dF - F\omega^{\hat{i}}_{\hat{i}}$ тоже вполне интегрируема и определяет представление в пространстве переменных (x, y, z, p, q, F). Интеграл задается гиперповерхностью $F = F(x, y, z, p, q)$ этого пространства. Так как одновременное обращение в нуль форм ω^i и $\omega^3_{\hat{i}}$ фиксирует переменные x, y, z, p, q, то оно фиксирует и точку этой гиперповерхности, т. е. обращает в нуль также и форму $dF - F\omega^{\hat{i}}_{\hat{i}}$. Таким образом, эта форма должна представлять собой линейную комбинацию форм ω^i и $\omega^3_{\hat{i}}$, что и приводит к уравнению (A).

Система величин a_i, $b^{\hat{i}}$ и F образует фундаментальный объект 1-го порядка. Фундаментальные объекты следующих порядков получаются путем последовательных нормальных продолжений уравнения (A). Автор ограничивается двумя продолжениями и изучает окрестности только трех первых порядков.

Фундаментальными объектами охватывается ряд других объектов, связанных с интегралом. Например, фундаментальным объектом 1-го порядка охватывается относительный квазивектор $\tilde{b}^{\hat{i}} = \frac{b^{\hat{i}}}{F}$, определяющий инвариантное направление; фундаментальным объектом 2-го порядка — относительные тензоры $h^{\hat{i}\hat{j}}$ и $\tilde{g}^{ij}$; фундаментальным объектом 3-го порядка — относительный тензор $p^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}$ и др. Обращение в нуль тех или иных объектов соответствует особым случаям

в задаче. Например, если $p^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} = 0$, а $\det|\tilde{g}^{ij}| \neq 0$, то пространство основного представления оказывается римановым и все построенные объекты находят в нем истолкование. В общем случае для выяснения геометрического смысла построений автор обращается к вариационной задаче, рассматривая двойной интеграл $\int\int F[\omega^1\omega^2]$ на поверхности $z = z(x, y)$, $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$. Например, тензор $h^{\hat{i}\hat{j}}$ определяет экстремальную поверхность, направление $\tilde{b}^{\hat{i}}$ оказывается трансверсалью, а тензор $\tilde{g}^{ij}$ определит в локальном пространстве метрику, которая в римановом случае совпадает с основной.

Формы ω_i^k определяют связность в пространстве плоских элементов (x, y, z, p, q). Автором рассмотрены некоторые вопросы, связанные с теорией кривых, теорией поверхностей и теорией конгруэнций в этом пространстве. Библ. 15 назв. П. И. Швейкин

3309. О погружении пространства Финслера в пространство Минковского. Ингарден Р. С., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 7, 309—311

О погружении пространства Финслера в пространство Минковского. Ингарден (Über die Einbettung eines Finslerschen Raumes in einem Minkowskischen Raum. Ingarden R. S.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 7, 305—308 (нем.)

Пусть (F_n) — пространство Финслера, определенное, посредством формулы $ds = F(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n)$, где функция F удовлетворяет условиям регулярности Финслера. Автор дает метод определения пространства Минковского (M_{2n}), в которое может быть изометрично погружено пространство (F_n). Метрика (M_{2n}) определяется формулой $ds = F(dy_1/dy_{n+1}, \ldots, dy_n/dy_{2n}, dy_{n+1}, \ldots, dy_{2n})$, и погружение производится посредством подстановки $y_1 = x_1^2/2, \ldots, y_n = x_n^2)/2$, $y_{n+1} = x_1, \ldots, y_{2n} = x_n$. W. Ślebodziński

3310. Взаимные статические решения уравнений $G_{\mu\nu} = 0$. Букдал (Reciprocal static solutions of the equations $G_{\mu\nu} = 0$. Buchdahl H. A.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 18, 116—119 (англ.)

Как известно, решение уравнение поля в общей теории относительности: $G_{\mu\nu} = 0$ ($G_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна) называется статическим, если фундаментальный тензор удовлетворяет условиям: $g_{i4} = 0$, $\partial_4 g_{\mu\nu} = 0$ ($i = 1, 2, 3$; $\mu, \nu = 1, \ldots, 4$; x^4 — временная координата). Для $n \geqslant 4$ автор для тех же уравнений поля называет решение статическим, если определяемый им линейный элемент имеет вид:

$$(ds^2 = g_{ik}(x^j)\,dx^i\,dx^j + g_{aa}(x^j)\,(dx^a)^2, \quad (a \neq i, j, k), \qquad (1)$$

где a — фиксированный индекс, по которому не производится суммирования. Доказывается теорема: Если 1 — статическое решение уравнения поля $G_{\mu\nu}$, то

$$ds^2 = (g_{aa})^{2/n-3}\,g_{ik}\,dx^i\,dx^k + (g_{aa})^{-1}(dx^a)^2 \qquad (2)$$

также определяет статическое решение. Решения (1) и (2) называются взаимными.

Отмечается, что, в частности, при $n = 4$ решению Шварцшильда

$$ds^2 = -(\gamma^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) + \gamma dt^2, \quad \gamma = (1-2m)/r,$$

$m = \text{const}$, можно сопоставить взаимное

$$ds^2 = -\gamma^2(\gamma^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) + \gamma^{-1}dt^2.$$

Этот процесс позволяет находить новые нетривиальные статические решения уравнений $G_{\mu\nu} = 0$. А. З. Петров

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3311. Теория множеств с путями. I. Мидзогути (Theory of path structure. I. Mizoguti Yukitoyo), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 1, 1—8 (англ.)

Пусть S — множество с неоднозначной операцией $a — b$. Суммой $a + b$ называется множество таких x, что $a \in x — b$. Множество S называется множеством с путями (path structure), если: 1) $a — a = a$; 2) $a + b = b + a$; 3) если $x \in a — b$, то $a + x \subset a — b$; 4) если $(a + b) \cap (a + c) \neq 0$ (0 — пустое множество) и $b \neq c$, то или $b \in a + c$ или $c \in a + b$; 5) если $a — b \neq 0$, то $a + b \neq 0$. На обычной плоскости $a — b$ можно интерпретировать как луч, исходящий из a, лежащий на прямой ab и не содержащий b. Сходная аксиоматика предлагалась Преновицем (Prenowitz W., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 333—380). Множество $A \subset S$ называется вычитаемым (substractive), если $x — y \neq 0$ для любых x, y из A. Вычитаемое множество A называется псевдооткрытым, если для любых p, $q \in A$ существует такое x, что $x \in q — p$ и $q + x \in A$. Упорядоченная пара (a, b) называется суммируемой, если либо $a = b$, либо $a \neq b$, $a + b \neq 0$ и из x, $y \in a + b$, $x \neq y$, следует $a \in x — y$ или $a \in y — x$. Если пара (a, b) суммируемая, то $a + b$ называется открытым сегментом, а $a \oplus b = a \cup (a + b) \cup b$ — замкнутым сегментом. Если $p \in a + b$, то $p — (p + b)$ называется лучом a/p, исходящим из p. Говорят, что множество A поддерживает (supports) луч a/p, если A содержит p и такую точку x, что $a/p = x/p$. Множества A и B имеют совершенное пересечение ($A \tilde{\cap} B$), если для любого x из $A \cap B$ множество A поддерживает всякий луч, исходящий из x и поддерживаемый множеством B, и наоборот. Цепью сегментов называется конечная последовательность сегментов, в которой соседние сегменты имеют совершенное пересечение. Система сегментов $\mathfrak{S}$ называется связной, если любые два сегмента из $\mathfrak{S}$ можно соединить цепью сегментов из $\mathfrak{S}$. Максимальная связная система сегментов называется путем. Множество A называется вычитаемо-связным (substractive arcwise connected), если для любых двух точек p, $q \in A$ существуют такие точки $p = x_1, x_2, \ldots, x_n = q$, что пары (x_i, x_{i+1}) вычитаемы и $x_i \oplus x_{i+1} \subset A$. Максимальное вычитаемо-связное множество называется компонентой. Постулат линейности: если $a \cup b$ вычитаемо, то $(a + b) — x$ одно и то же для всех x из $a + b$, — позволяет доказать, что путь, содержащий $a + b$, есть

$$a \vee b = a \cup b \cup (a + b) \cup (a — (a + b)) \cup (b — (a + b)),$$

а для любых двух точек p, q из пути, отличных от его концов (точное определение конца пути не дается), имеет место $a \vee b = p \vee q$. Рассматриваются множества с путями, в которых, наряду с постулатом линейности, выполняется ассоциативный закон для одной из операций: $+$, $\oplus$, $\vee$, ∇, ($a \nabla b = (a+b) \cup (a — (a+b)) \cup (b — (a + b))$). Любая компонента в таких множествах с путями есть сферическая, дескриптивная или проективная геометрия (определение дескриптивной геометрии можно найти, например, в упомянутой выше статье Преновица). Другой способ выделения перечисленных геометрий состоит в наложении ограничений на множество с путями, обладающее системой $\mathfrak{R}$ псевдооткрытых множеств, подчиненных следующим требованиям: 1. Если A, B — два множества из $\mathfrak{R}$ и существует точка $p \in A \cap B$ такая, что множество B поддерживает всякий луч, исходящий из p и поддерживаемый множеством A, то $A \tilde{\cap} B$. 2. Если A, $B \in \mathfrak{R}$ и $A \tilde{\cap} B$, то для всякого сегмента $a \oplus b$, принадлежащего $A \cap B$, найдутся такие точки $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, $x_i \in a \oplus b$, и такие множества $A_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$,

что $A_i \subset A \cap B$, $x_i \oplus x_{i+1} \subset A_i$, $A_i \cong A_{i+1}$. Одним из дополнительных ограничений является ассоциативность операции $\oplus$, если слагаемые принадлежат специально выделенной подсистеме системы $\mathfrak{R}$. Указываются также направления теории, развивающиеся аналогично топологии. Вводятся понятия гомотопии, односвязности, размерности и т. п. Доказательства отсутствуют. Л. А. Скорняков

3312. Геометрия симплекса в E_n (первая часть). **Фидлер** (Geometrie simplexu v E_n (první část). Fiedler Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 4, 297—320 (чеш.; рез. русс., англ.)

Изучаются некоторые метрические свойства n-мерного симплекса. Выведена формула расстояния между двумя точками в барицентрических координатах (теорема 1). С помощью этой формулы автор выводит следующее условие, необходимое и достаточное для существования n-мерного симплекса, квадраты длин ребер которого равны заданным величинам l_{ij}: квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n+1} l_{ij}x_ix_j$ должна принимать отрицательное значение для всякой ненулевой системы чисел $x_1, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющей соотношению $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 0$ (теорема 4).

Дальнейшие рассмотрения автора связаны с величинами двугранных углов симплекса. Внутренний двугранный угол между гранью, не содержащей вершины O_i, и гранью, не содержащей вершины O_j, обозначим через φ_{ij}, $i \neq j$. При $i = j$ положим $\varphi_{ij} = \pi$. Тогда имеет место следующее условие, необходимое и достаточное, чтобы заданные величины a_{ij}, связанные соотношениями $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ii} = -1$, были косинусами внутренних двугранных углов некоторого симплекса: квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j$ должна быть неположительной и обращаться в нуль лишь при условии $\xi_i = \rho\sigma_i$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}$ — вполне определенная система положительных чисел (теорема 6). Найдено необходимое и достаточное условие существования симплекса, если предписано, какие его внутренние двугранные углы должны быть острыми, какие прямыми и какие тупыми. Это условие можно сформулировать следующим образом: ребра $[O_i, O_j]$, соответствующие острым углам φ_{ij}, образуют связное множество, содержащее все вершины симплекса (теорема 11). Таким образом, в каждом n-мерном симплексе имеется не менее n острых внутренних углов (теорема 12); из внутренних углов, прилегающих к одной грани симплекса, по крайней мере один является острым (теорема 13).

В заключение приведены некоторые формулы для радиусов сфер, их центров и т. д.; эти формулы автор предлагает использовать в дальнейших частях статьи. В. Г. Болтянский

3313. О мостовых представлениях узлов. **Шуберт** (Über Brückendarstellungen von Knoten. Schubert Horst), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 254—255 (нем.)

Всякий узел допускает мостовое представление, т. е. представление посредством отрезков, лежащих в двух параллельных плоскостях, и отрезков, перпендикулярных этим плоскостям. Мостовым числом представления называется половина числа этих перпендикулярных отрезков. Наименьшее мостовое число $b(x)$ во всех возможных представлениях узла x является инвариантом узла. Указываются некоторые свойства $b(x)$: аддитивность $b(x) - 1$ для произведения узлов, неравенство, связывающее $b(x)$ с такими же инвариантами сопутствующих узлов, и др. В. В. Морозов

3314. Лежандровы преобразования кривых. **Штернберг** (Legendre transformations of curves. Sternberg Shlomo), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 942—945 (англ.)

Пусть $y(x)$ — ограниченная выпуклая функция на интервале (a, b); j — множество значений x, где $y'_+(x) \neq y'_-(x)$; k — множество интервалов, внутри которых $y'_+(x)$ (или $y'_-(x)$) постоянна; K — множество интервалов, составленных y'-значениями при условии $y'_-(x) \leqslant y' \leqslant y'_+(x)$, $x \in j$; I — множество y'-значений, для которых $y' = y'(x)$, где x — точки интервалов из k. Далее полагается $\bar{x} = \bar{x}(X) = \sup T(X)$, где $T(X)$ — множество x-значений, для которых $y'_-(x) \leqslant X$. Данная функция $y = y(x)$ преобразуется в функцию $Y = Y(X)$, определяемую формулой

$$Y = \bar{x}(X)\,X - y(\bar{x}(X)). \qquad (1)$$

Штрихом обозначается дифференцирование по X. Доказывается теорема: Y'_+ и Y'_- существуют всюду, не убывают и $Y'_- \leqslant Y'_+$; $Y'_+(X) = \bar{x}(X)$; $Y'_- \neq Y'_+$ только на I; Y'_+ постоянна только на интервалах из K.

Наряду с соотношением (1) и равенством $Y'_+(X) = \bar{x}$, имеют место взаимные им:

$$y = y(x) = \bar{X}x - Y(\bar{X}),\ y'_+(x) = \bar{X}.$$

В силу указанной взаимности имеют место предложения: если одна из функций y, Y всюду дифференцируема, то другая строго выпукла (и обратно); если одна из функций y, Y строго выпукла и всюду дифференцируема, или обе всюду дифференцируемы, или обе строго выпуклы, то обе они строго выпуклы и всюду дифференцируемы. Н. В. Ефимов

3315. О соприкосновении регулярных дуг. **Пимия** (Über die Berührung regelmässiger Bogen. I. Pimiä Lauri), Turun yliopiston julkaisuja, 1954, **A16**, № 2, 20 S. (нем.)

Рассматривается непрерывная функция $f(x)$ $(x \geqslant 0)$, причем график ее касается Ox при $x = 0$.

Пусть $\lim_{x \to +0} \dfrac{f(x)}{x^n} = \begin{cases} 0 & (n < r_0) \\ \infty & (n > r_0), \end{cases}$

r_0 есть порядок малости $f(x)$ при $x \to +0$. Если $f'(x)$ непрерывная при $x = 0$, то $r_0 > 1$.

Вводятся характеристические числа: $\operatorname{Exp} f(x) = r_0 - 1$ (экспонент) и $\operatorname{Par} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) / x^{r_0} = p_0$ (параметр). Из двух функций одного типа $a(x)$ и $f(x)$ первая — аппроксимирующая для второй, если

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - a(x)}{x^n} = \begin{cases} 0 & (n < r) \\ p & (n = r), \\ \infty & (n > r) \end{cases}$$

где $r > r_0$. Число $r - 1$ называется рангом аппроксимации, $d(x) = f(x) - a(x)$ остаточной функцией. Функция $f(x)$ называется аппроксимируемой, если $r_0 - 1$ и p_0 конечны и положительны. Вводится аппроксимирующая функция первого порядка: $a(x) = Af(x) = p_0 x^{r_0}$ и остаточная функция первого порядка.

$$Df(x) = f(x) - Af(x).\ \operatorname{Exp}[Df(x)] > r_0 - 1,$$
$$\operatorname{Par}[Df(x)] \neq 0,\ A[Af(x)] = Af(x),$$
$$Adf(x) / dx = dAf(x) / dx.$$

Имеет место

Теорема. Если $a(x) = qx^s$, то $a(x) = Af(x)$.

Вводятся следующие обозначения: $Af(x) = f_1(x)$, $Df(x) = d_1(x) = f(x) - f_1(x)$, $Ad_1(x) = u_1(x) = p_1x^{r_1}$, $Dd_1(x) = d_2(x) = d_1(x) - u_1(x) = f(x) - f_2(x)$. $f_2(x) = f_1(x) + u_1(x) = p_0x^{r_0} + p_1x^{r_1}$ — аппроксимирующая функция 2-го порядка. Вообще $d_m(x) = f(x) - f_m(x)$, где $d_m(x) = Dd_{m-1}(x)$. Имеем: $f_m(x) = \sum_{i=0}^{i=m-1} p_ix^{r_i}$ — аппроксимирующая функция m-го порядка. $p_i = \operatorname{Par} d_i(x)$, $r_i = \operatorname{Exp} d_i(x) + 1$.

Теорема. Если $a_k(x) = \sum_{i=0}^{i=r-1} a_ix^s$ $(1 < s_0 < s_1 < s_2 < \ldots)$ есть аппроксимирующая функция для $f(x)$, то $a_k(x) = f(x)$, т. е. $f_k(x)$ однозначно определена при данном k.

Функция $f(x)$ называется вполне аппроксимируемой, если она имеет аппроксимирующую функцию $f_m(x) = \varphi(x)$ $(m < +\infty)$, которая в некотором интервале $(0, c)$ имеет бесконечный ранг. $\varphi(x)$ называется функцией полной аппроксимации. Приводится классификация всех возможных случаев.

А) Полная аппроксимация заканчивается на конечном m. Это возможно, когда:

а) $d_m(x) \equiv 0$ для $0 \leqslant x \leqslant x_m$, что имеет место, если $f(x) = \sum_{i=0}^{i=m-1} p_ix^{r_i}$ и тогда $\varphi(x) = f(x)$.

б) $\operatorname{Exp} d(x) = +\infty$, что имеет место, когда

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=m-1} p_ix^{r_i}.$$

Б) Полная аппроксимация продолжается неограниченно:

$$(1 < r_0 < r_1 < r_2 < \ldots).$$

а) $\lim_{m\to\infty} r_m = R < +\infty$. Тогда формально возникает бесконечный ряд $\sum_0^\infty u_m(x)$ и имеет место

Теорема. Необходимое и достаточное условие существования функции $\varphi(x)$ полной аппроксимации состоит в сходимости ряда $\sum_0^\infty p_k$. В этом случае ряд $\sum_0^\infty p_nx^n$ сходится равномерно на $(0,1)$ и его сумма есть функция $\varphi(x)$.

б) $\lim r_m = +\infty$. В этом случае имеет место

Теорема. Если ряд $\sum_0^\infty p_ix^{r_i}$ сходится равномерно в интервале $(0, c)$ $(c < 1)$, то его сумма есть функция $\varphi(x)$ полного приближения. Приводится ряд достаточных условий, налагаемых на p_i и r_i, при которых ряд $\sum_0^\infty p_ix^{r_i}$ сходится равномерно. А. С. Кованько

3316 Д. Аффинные геометрии без ограничения размерностей и полумодулярные структуры. Брейт (Affine Geometrien ohne Dimensionsbeschränkung und semimodulare Verbände. Breit Gerhard. Diss. Naturwiss. F. Erlangen, 1953, VI, 50 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 211, 774 (нем.)

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3317. Экстремальные свойства правильных многогранников. Фейеш Тот (Extremum properties of the regular polytopes. Fejes Tóth L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 1—2, 143—146 (англ.; рез. русс.)

Доказывается, что в четырехмерном пространстве описанный около сферы правильный многогранник строения $\{3,3,3\}$, или $\{3,3,4\}$, или $\{3,3,5\}$ имеет минимальный объем среди содержащих эту сферу многогранников той же топологической структуры. В. А. Залгаллер

3318. Кривые постоянной ширины на плоскости. Хаммер (Constant breadth curves in the plane. Hammer P. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 333—334 (англ.)

Пусть даны функция $p = p(\theta)$, удовлетворяющая условию Липшица и условию $p(\theta + \pi) = -p(\theta)$, и единичный вектор $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. Тогда координатный вектор

$$x(\theta) = -pu + \left(\int^\theta pd\theta\right)u \qquad (1)$$

определяет гладкую выпуклую кривую постоянной ширины при $c > \sup_\theta \left[Dp + \int_0^\theta pd\theta\right]$, где Dp — производные числа функции $p(\theta)$. Приближая c сверху к указанной границе, получим негладкую выпуклую кривую постоянной ширины (или точку, если $p \equiv 0$). Существенно, что таким путем может быть получена любая выпуклая кривая постоянной ширины. Функция $p(\theta)$ характеризует связанное с кривой «простое снаружи» семейство прямых (РЖМат, 1953, 1394; 1954, 2326). Опорная функция кривой равна $h = c - \int_0^\theta pd\theta$. При меньших c или несколько иных условиях периодичности $p(\theta)$ формула (1) приводит к невыпуклым кривым постоянной ширины. В. А. Залгаллер

3319. Полярно взаимные выпуклые тела. Бамбах (Polar reciprocal convex bodies. Bambah R. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 377—378 (англ.)

Пусть $V(Q)$ — объем тела Q. Справедливы леммы:

1. Пусть K — n-мерное выпуклое тело с центром в O и E — наименьший, содержащий K, эллипсоид с тем же центром. Тогда $V(E) \leqslant \sqrt{n}^n V(K)$.

2. Пусть K — n-мерное выпуклое тело (не обязательно имеющее центр) и P — наименьший, содержащий K, параллелепипед.

Тогда $V(P) \leqslant n!\,V(K)$.

3. Пусть P — параллелепипед, для которого O является внутренней точкой, и пусть Q — полярно взаимный к P относительно единичной сферы I_n с центром в O октаэдр. Тогда $V(P)V(Q) \geqslant 4^n/(n!)$.

Первая лемма принадлежит Джону (John F. Studies and essays presented to R. Courant, New York, 1948, 203) вторая — Макбету (Macbeath A. M., Canad. J. Math., 1951, 3, 54—61). Дается доказательство третьей леммы.

Из приведенных лемм вытекают неравенства:

$$(\sqrt{n})^{-n}V^2(I_n) \leqslant V(K)V(K'), \qquad (1)$$

$$V(K)V(K') \geqslant 4^n/(n!)^2, \qquad (2)$$

где K' — полярно взаимное к K относительно I_n выпуклое тело. Неравенство (1) справедливо, если O является его центром и усиливает неравенство Дворецкого — Роджерса (Dvoretzky A., Rogers C. A., Proc. nat. Acad. Sci. Wasch., 1950, 36, 192—197). Неравенство (2) справедливо, если O является внутренней для K точкой и усиливает неравенство Малера (Mahler K., Časopis Mat. a Fys., 1939, 68, 93—102). Оценка Сантало (Santalo A. L., Portug. Math., 1949, 8, 155—161) $V(K)V(K') \leqslant V^2(I_n)$, очевидно, не может быть улучшена. Г. И. Дринфельд

3320. О смешанных средних поперечных мерах выпуклых тел вращения. Хадвигер (Ueber gemischte Quermassintegrale konvexer Rotationskörper. Hadwiger H.), Istanbul Üniv. fen. fak. mec., 1954, A 19, № 2, 98—105 (нем.; рез. турец.)

Если A — выпуклое тело в k-мерном евклидовом пространстве, то его ν-я средняя поперечная мера $W_\nu(A)$ — Quermassintegral Минковского есть смешан-

ный объем тел A и единичного шара K, взятых соответственно $k-\nu$ и ν раз. ν-я средняя поперечная мера линейной комбинации $A+\rho B$ определяется равенством:

$$W_\nu(A+\rho B)=\sum_{\mu=0}^{k-\nu}\binom{k-\nu}{\mu}W_{\nu\mu}\rho^\mu,$$

в котором коэффициенты $W_{\nu\mu}=W_{\nu\mu}(A,B)$ — ν-е средние поперечные меры смешения тел A и B — могут быть представлены как смешанные объемы:

$$W_{\nu\mu}(A,B)=V(\underbrace{A,\ldots,A}_{(k-\nu-\mu)},\underbrace{B,\ldots,B}_{(\mu)},\underbrace{K,\ldots,K}_{(\nu)}).$$

Для смешанных средних поперечных мер в случае, когда A и B — соосные выпуклые тела вращения, автором устанавливается неравенство:

$$(\alpha-\beta)(a/b)W_{\nu\gamma}+(\beta-\gamma)(a/b)^\alpha W_{\nu\alpha}+$$
$$+(\gamma-\alpha)(a/b)^\beta W_{\nu\beta}\geqslant 0, \quad (1)$$
$$(0\leqslant\alpha<\beta<\gamma\leqslant k-\nu)$$

из которого вытекает неравенство:

$$W_{\nu\alpha}^{\beta-\gamma}W_{\nu\beta}^{\gamma-\alpha}W_{\nu\gamma}^{\alpha-\beta}\geqslant 1. \quad (2)$$

Частный случай (2) при $\alpha=\mu-1$, $\beta=\mu$, $\gamma=\mu+1$ содержится в установленных Фенхелем (Fenchel W., C. R. Acad. sci., 1936, **203**, 647—650) неравенствах, обобщающих теорему Брунна — Минковского.

А. Г. Школьник

3321. К дифференциальной геометрии замкнутых поверхностей в евклидовом пространстве. Хопф (Zur Differentialgeometrie geschlossener Flächen im euklidischen Raum. Hopf Heinz), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 45—54 (нем.)

В статье дается обзор перенесения основных результатов дифференциальной геометрии овалоидов в геометрию замкнутых поверхностей в целом.

Известно, что овалоиды с постоянной 1) гауссовой или 2) средней кривизной суть сферы. Предложение 1) сохраняет силу для всех замкнутых поверхностей. Предложение 2) доказано автором для двух классов поверхностей. К первому классу относятся все замкнутые поверхности рода 0 (Math. Nachr., 1951, 4); ко второму — замкнутые поверхности, обладающие конусом направлений выпуклости. Здесь направление называется направлением выпуклости, если всякая прямая этого направления пересекает поверхность не более, чем в двух точках. К. М. Белов

3322. Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей со сферическим краем. Рембс (Déformabilité des calottes convexes à bande sphérique de bord. Rembs Édouard), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 852—854 (франц.)

Рассматривается выпуклая поверхность, которая имеет край и вдоль этого края касается единичной сферы с центром в начале координат; $\bar{x}$ — радиус-вектор точки поверхности, $\bar{n}$ — единичный вектор нормали. Поверхность подвергается бесконечно малому изгибанию $\bar{x}\to\bar{x}+t\bar{z}$, где $\bar{z}$ — вектор скорости, t — параметр. При этом $\bar{n}\to\bar{n}+t[\bar{y}\,\bar{n}]$, где $\bar{y}$ — вектор бесконечно малого вращения (квадратные скобки обозначают векторное произведение); на краю $\bar{n}\to\bar{x}+t[\bar{y}\,\bar{x}]$. Предполагается, что в процессе деформации поверхность также касается некоторой сферы; радиус этой сферы $=1+\lambda t$ ($\lambda=$ const; центр сферы можно предполагать остающимся в начале координат). На краю соблюдается условие: $\bar{x}+t\bar{z}=(1+\lambda t)(\bar{x}+t[\bar{y}\,\bar{x}])$, или $\bar{z}=\lambda\bar{x}+[\bar{y}\,\bar{x}]$, или $\bar{s}=\lambda\bar{x}$ (где $\bar{s}$ — поле перемещений: $\bar{s}=\bar{z}-[\bar{y}\,\bar{x}]$). Так как $\oint\bar{z}d\bar{y}=-\oint\bar{y}d\bar{z}=0$ (вследствие $d\bar{z}=[\bar{y}d\bar{x}]$), то $\oint\bar{x}\,\bar{y}d\bar{y}=\oint(\bar{z}+[\bar{x}\,\bar{y}])\,d\bar{y}=\oint\bar{s}d\bar{y}$. На краю $\bar{s}d\bar{y}=\lambda\bar{x}d\bar{y}=\lambda\bar{n}d\bar{y}=0$. Отсюда следует, что левая часть известной формулы Бляшке обращается в нуль. Поэтому бесконечно малое изгибание поверхности при указанных выше условиях может быть только бесконечно малым движением. Н. В. Ефимов

См. также 2698, 2806, 2847, 2850, 2864, 3134

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3323. Решение дифференциальных уравнений параболического типа методом конечных разностей. I. Грин (The solution of parabolic partial differential equations by difference methods. I. Green John W.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 349—350 (англ.)

Рассматривается уравнение параболического типа

$$u_t=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+eu_x+gu_y+pu+q \quad (1)$$

в области R: $0\leqslant t\leqslant T$, $-\infty<x,y<\infty$ при начальном условии $u(x,y,0)=f(x,y)$. Коэффициенты (1) зависят от x, y и t. Берутся различные аппроксимации уравнения (1) разностными уравнениями вида

$$u(x,y,t+k)=\sum_{n,s}C^{n,s}(x,y,t,h)\,u(x+nh,y+sh,t)+$$
$$+kq(x,y,t), \quad (2)$$

где $\Delta t=k$, $\Delta x=\Delta y=h$, $k/h^2=$ const, а сумма Σ конечна, и исследуется, когда решения уравнений (2), удовлетворяющие начальному условию $u(x,y,0)=f(x,y)$, будут ограничены равномерно относительно h (устойчивость разностной аппроксимации). Утверждается, что необходимым для этого условием является выполнение неравенства

$$\left|\sum_{n,s}C^{n,s}(x,y,t,0)e^{i(n\varphi+s\theta)}\right|\leqslant 1$$

для всех θ и φ и всех $(x,y,t)\in R$, а достаточным — выполнение неравенства

$$\left|\sum_{n,s}C^{n,s}(x,y,t,0)\,e^{i(n\varphi+s\theta)}\right|\leqslant e^{-M(\theta^2+\varphi^2)}$$

при тех же θ, φ, x, y, t и $M>0$. Как отмечает автор, его результаты являются обобщением аналогичных результатов Иона (John F., Communs Pure and Appl. Math., 1952, 5, 155—211), полученных последним для одного пространственного переменного, и могут быть, в свою очередь, обобщены на любое число пространственных переменных, если потребовать большей гладкости данных задачи. О. А. Ладыженская

3324. Вычисление тока в катушке с насыщенным сердечником. Обобщение метода для получения приближенного решения и оценки погрешности. Гомес (El problema del calculo de la corriente en bobinas de nucleo saturable. Generalizacion del metodo seguido para obtener una solucion aproximada y una cota del error. Gómez Garcia J. A.), An. Real soc. española fis. y quim., 1953, 49(A), № 1—2, 37—48 (исп.)

Рассматривается приближенный метод (по идее близкий к методу Чаплыгина) интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений при данных начальных условиях, допускающий оценку погрешности.

В случае уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

при начальном условии $x = x_0$, $y = y_0$ предлагается разложение левой части уравнения на два слагаемых

$$F(x, y, y') \equiv f(x, y, y') + h(x, y, y') \qquad (2)$$

так, чтобы уравнение $f(x, y, y') = 0$ (f — главная часть F) легко допускало решение $y = \varphi(x)$ при том же начальном условии. Затем после подстановки $y = \varphi + \varepsilon$, $y' = \varphi' + \varepsilon'$ и разложения выражения (2) по формуле Тейлора

$$F(x, \varphi + \varepsilon, \varphi' + \varepsilon') \equiv f(x, \varphi, \varphi') + h(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon \frac{\partial F(x, \varphi, \varphi')}{\partial \varphi} + \varepsilon' \frac{\partial F(x, \varphi, \varphi')}{\partial \varphi'} + \delta = 0$$

(δ содержит вторые производные от F) получается дифференциальное уравнение вида

$$a\varepsilon' + b\varepsilon + h + \delta = 0, \qquad (3)$$

которому удовлетворяет погрешность ε. Решение уравнения (3) при условии $\varepsilon(x_0) = 0$ записывается в явном виде, откуда выводится оценка погрешности.

Даны примеры на применение рассмотренного метода. Имеется обобщение метода на случай дифференциального уравнения порядка n. Н. А. Бразма

3325. Исследование влияния сгущения сетки при решении плоской задачи теории упругости методом конечных разностей. Спирин Г. М., Изв. Ин-та гидрол. и гидротехн. АН УССР, 1954, **11**, 92—105

На примере вычисления напряжения водосливной плотины методом сеток с различным числом узлов выяснено, что сетки с 27 и 138 внутренними узлами дают расхождение для средней части области порядка 4—7% и во входящих углах и на контуре области — порядка 14—28%. Исследуется влияние сгущения сетки в различных частях области на решение. Приведено 9 графиков, наглядно показывающих расхождения решений, полученных при различном числе и расположении узлов. Задача с 138 узлами решалась на электроинтеграторе. В. К. Саульев

3326. Границы погрешности при определении собственных значений эрмитовых интегральных уравнений и бесконечных матриц. Виландт (Error bounds for eigenvalues of Hermitian integral equations and infinite matrices. Wielandt Helmut W.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 391—392 (англ.)

Даются оценки погрешности при определении собственных значений $\varkappa$ эрмитова интегрального уравнения

$$\int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \varkappa y(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

(A) при применении метода квадратур, (B) — метода Ритца. В случае (A) имеет место оценка $|\varkappa_\rho - \bar{\varkappa}_\rho| \leqslant C$, где C зависит от гладкости ядра и квадратурной формулы, в частности для формул Симпсона и трапеций соответственно

$$C_1 = 0{,}75\,(n-1)^{-2} \sup_{x,\,\xi} |K_{xx}(x, \xi)|;$$

$$C_2 = 0{,}54\,(n-1)^{-1} \sup_{x,\,\xi} |K_x(x, \xi)|,$$

причем граница C_2 неулучшаема. В случае (B), если используется система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, имеем

$$|\varkappa_\rho - \bar{\varkappa}_\rho| \leqslant \frac{1}{2\,|\bar{\varkappa}_\rho|} \inf_{c_1, \ldots, c_n} \int_0^1 \int_0^1 \Big| K(x, \xi) - \sum\sum c_{ij} \varphi_i(x)\, \bar{\varphi}_j(x) \Big|^2 dx\, d\xi.$$

Последняя оценка опирается на аналогичную оценку для близости собственных значений λ_ρ бесконечной матрицы $\|a_{ij}\|$ и α_ρ — срезанной конечной матрицы n-го порядка, именно

$$|\lambda_\rho - \alpha_\rho| \leqslant \frac{1}{2\,|\alpha_\rho|} \left[\sum_1^\infty \sum_1^\infty |a_{ij}|^2 - \sum_1^n \sum_1^n |a_{ij}|^2 \right].$$

Автор считает неожиданным тот факт, что оценка имеет второй порядок относительно степени аппроксимации ядра, нам напротив это представляется естественным, так как погрешность в определении собственных значений самосопряженного оператора обычно 2-го порядка по сравнению с ошибкой в определении элементов. Л. В. Канторович

3327. Численное решение интегральных уравнений типа Фредгольма. Лонсет (Approximate solutions of Fredholm-type integral equations. Lonseth A. T.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 5, 415—430 (англ.)

Дается обзор оценок погрешности при численном решении интегральных уравнений Фредгольма. Рассматриваются методы: 1) основанные на замене ядра на вырожденное, 2) разыскания наилучшего решения в определенной форме (типа Ритца и Галеркина), 3) итеративные. Характер оценок близок к приведенным в книге Канторовича Л. В., и Крылова В. И., Приближенные методы высшего анализа, 1950, гл. 2, § 3. Для случая 2) дается также оценка снизу для погрешности. Приведены числовые примеры. Библ. 29 назв. Л. В. Канторович

3328. Приближенные методы в линейной теории упругости вязких сред: приближения при помощи δ-функции. Лидерман (Approximations in linear viscoelasticity theory: delta function approximations. Leaderman Herbert), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 3, 294—296 (англ.)

Решение задачи о деформации упругих вязких сред под воздействием силы, изменяющейся во времени, приводит к необходимости решения интегральных уравнений типа $\psi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(-e^{n-z})]\, L(z)\, dz$ и сходных с этим. Как легко видеть, $\psi'(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(n-z)\, L(z)\, dz$, где $\varphi(x) = e^x \exp(-e^x)$ достигает максимума при $x = 0$, быстро убывает при возрастании $|x|$, и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$. Заменяя приближенно $\varphi(x)$ на $\delta(x)$, получим $\psi'(n) \approx L(n)$. Получен ряд аналогичных, в том числе более точных, формул для $L(n)$, часть которых была ранее получена из других соображений. М. Л. Бродский

3329. Решение систем линейных уравнений минимизацией квадрата длины невязки. Покорная (Řešení soustav lineárních algebraických rovnic minimisací součtu čtverců residuí. Pokorná O.), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 111—116 (чеш.; рез. русс., англ.)

Для решения системы $Ax = a$, $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$, предлагается (согласно Свобода, «Разговоры о машинах для обработки данных») одношаговый итерационный процесс $x_l^{(k+1)} = x_l^{(k)} - \Delta_l^{(k)}$, $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}$, $j \neq l$. Постоян-

ная $\Delta_l^{(k)}$ определяется из условия минимизации $|r^{(k)}|^2 = |Ax^{(k)} - a|^2$. Номер l изменяемой на k-ом шагу компоненты определяется после вычисления всех $\Delta_j^{(k)} = (a_j, r^{(k)})$, так что $\Delta_l^{(k)}$ есть наибольшее из всех $\Delta_j^{(k)}$. Здесь через a_j обозначен j-й столбец матрицы. Очевидно, $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \Delta_l^{(k)} a_l$. Автор показывает целесообразность вычисления возможных поправок по формуле $\Delta_j^{(k+1)} = \Delta_j^{(k)} - \Delta_l^{(k)} b_{jl}$, где $b_{jl} = (a_j, a_l)$, что равносильно предварительному преобразованию системы к виду $A'Ax = A'a$. В. Н. Фаддеева

3330. Об общих методах вычисления собственных значений и собственных функций. Фикера (On general computation methods for eigenvalues and eigenfunctions. Fichera Gaetano), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 79—82 (англ.)

Для решения задачи о собственных значениях $L[u] + \lambda M[u] = 0$, $\|u\| = 1$, где $L[u]$ и $M[u]$ — два линейных оператора в комплексном гильбертовом пространстве, вводится вещественный функционал $P(u, \lambda) = \|L[u] + \lambda M[u]\|^2$, исчезающий на единичной сфере только в случае, если λ есть собственное значение. Считая систему элементов $\{v_k\}$ полной в H, автор полагает

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, \quad P_n(c_i, \lambda) = P(u_n, \lambda) = \sum_{h,k}^{1,n} A_{hk}\, c_h \overline{c_k},$$

$$A_{hk} = (L[v_h], \overline{L[v_k]}) + \lambda (M[v_h], \overline{L[v_k]}) + \overline{\lambda}\,(\overline{M[v_k]}, L[v_h]) + \lambda\overline{\lambda}\,(M[v_h], \overline{M[v_k]}),$$

$$Q_n(c_i) = \|u^{(n)}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

где P_n и Q_n — две эрмитовы квадратичные формы переменных c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Требование минимума P_n при условии $Q_n = 1$ приводит к системе линейных алгебраических уравнений $\sum_{k=1}^{n} A_{hk}\overline{c_k} - \mu\overline{c_h} = 0$ с определителем $D(\lambda, \overline{\lambda}, \mu)$. Для каждого фиксированного λ уравнение $D(\lambda, \overline{\lambda}, \mu) = 0$ имеет n вещественных корней. Полученные таким путем минимизирующие значения $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{\nu_n}^{(n)}$ предполагаются n-ми аппроксимациями соответствующих ν первых собственных значений из ряда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

Аналогичным методом решается задача о собственных значениях для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведены числовые примеры. В. К. Саульев

3331. Решение линейных систем уравнений на релейной машине. Фрёберг (Solutions of linear systems of equations on a relay machine. Fröberg Carl-Erik), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 39—42 (англ.)

Автор коротко напоминает основные данные универсальной вычислительной машины БАРК (Kjellberg — Neovius, Math. Tables and Other Aids Comput., 1951, 5, 29), а также известные методы решения линейных систем (Гаусса, Жордана и Холески), а затем говорит о возможности использования метода Гаусса и Жордана на машине БАРК. При этом показывается, что метод Гаусса предпочтительнее метода Жордана. Приводится примерное количество времени, употребляемое на решение систем методами Гаусса и Жордана.

Я. И. Алихашкин

3332. Обращение матрицы и решение совместных линейных алгебраических уравнений на электронном вычислительном перфораторе ИБМ-604. Петри (Matrix inversion and solution of simultaneous linear algebraic equations with the IBM 604 electronic calculating punch. Petrie George W.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 107—112 (англ.)

Для обращения матрицы порядка N методом Жордана предлагается вычислительная схема, состоящая из N одинаковых этапов и использующая комплект машин ИБМ в составе двух репродукторов, электронного вычислительного перфоратора 604 и табулятора.

Основные последовательные операции на каждом этапе: 1) массив пропускается через первый репродуктор, который переносит i-й элемент главного столбца на карты остальных элементов строки для всех i; 2) этот же массив пропускается через электронный вычислительный перфоратор, который преобразует матрицу по формулам исключения и перфорирует новый (i,j)-й элемент на карту старого (i,j)-го элемента; 3) при прохождении массива через табулятор последний образует суммы новых элементов по столбцам и табулирует их рядом с соответствующими новыми элементами контрольной строки; 4) при проходе массива через второй репродуктор новые элементы матрицы переносятся на новый массив, являющийся исходным для следующего этапа.

Особенностью схемы является то, что на каждом этапе как обрабатываемый, так и новый массивы не нуждаются ни в какой сортировке, что позволяет при обращении матриц высокого порядка организовать непрерывную совместную работу всех четырех машин. Это, в частности, достигается тем, что на каждом этапе карты в массиве располагаются так, что главная строка и главный столбец являются всегда первой строкой и первым столбцом в матрице, располагающейся в массиве по столбцам.

Схема обращения непосредственно применима к решению системы совместных линейных алгебраических уравнений с той только разницей, что на каждом этапе главный столбец убирается из массива после операции1).

А. П. Ершов

3333. Эксперименты с обращением матрицы 16-го порядка. Тодд (Experiments on the inversion of a 16 × 16 matrix. Todd John), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 113—115 (англ.)

Матрица B обращалась следующими способами: по методу Жордана на электронном вычислительном перфораторе ИБМ-604 (см. реф. 3332), итерациями по схеме $X_{n+1} = X_n(2 - BX_n)$ и методом Монте-Карло (Forsythe G. E., Leibler R. A., Math. Tables and Other Aids Comput., 1950, 5, 127—129) на вычислительной машине СЕАК. Псевдослучайные числа для метода Монте-Карло образовывались как наименьшие вычеты по модулю 2^{42} степеней некоторой нечетной степени 5. При этом выбор в качестве X_0 результата одной серии испытаний (по тысяче случайных блужданий на строку матрицы) в обращении матрицы по методу Монте-Карло существенно не отразился на числе приближений по отношению к выбору в качестве X_0 единичной матрицы.

А. П. Ершов

3334. Обращение симметрических определенных матриц методом окаймления на вычислительной машине с программой на перфокартах. Уагнер (A partitioning method of inverting symmetric definite matrices on a card-programmed calculator. Wagner Harvey M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 139—143 (англ.)

Краткое описание схемы обращения симметрических матриц методом, известным в нашей литературе под названием метода окаймления (Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М.— Л., 1950),

на вычислительной машине ИБМ с программой на перфокартах, работающей в комплекте со следующими машинами: электронным вычислительным устройством ИБМ-605, табулятором ИБМ-418, итоговым перфоратором ИБМ-527 и раскладочной машиной.

Принятая схема для матрицы n-го порядка требует $2n-1$ ячеек внутреннего запоминающего устройства и состоит из n этапов. Каждый r-й этап требует трех прогонов массива, состоящего из $(r-1)^2$ карт, причем последний прогон сопровождается перфорацией, и одного прогона нового массива из r^2 карт на раскладочной машине, подготавливающего массив к следующему этапу. В целом для решения задачи требуется произвести примерно $^2/_3n^3+{}^1/_2n^2$ картопрогонов. При средней скорости прогона для этой задачи 60 карт/мин обращение матрицы 30 го порядка занимает 5 час. 20 мин.

А. П. Ершов

3335. О методах интерполяции. Мартин-Доминес (Sobre los metodos de interpolacion. Martin Dominguez Ricardo), Ingenieria naval, 1954, **22**, № 227, 332—337 (исп.)

Изложение известных интерполяционных формул (Грегори — Ньютона, Бесселя, Эверетта) сопровождается таблицей, облегчающей вычисления по формуле Эверетта. Таблица содержит значения коэффициентов E_0^2, E_1^2, E_0^4, E_1^4, E_0^6, E_1^6 при $p=n\cdot 0{,}01$ ($n=0, 1, \ldots, 99$) с точностью до 10^{-7}. Через эти коэффициенты значение $f(x)$ вычисляется по формуле $f(x)=f_0+p\delta_{1/2}+{}+E_0^2\delta_0^2+E_1^2\delta_1^2+E_0^4\delta_0^4+E_1^4\delta_1^4+E_0^6\delta_0^6+E_1^6\delta_1^6$, $p=(x-x_0)/h$.

М. Л. Бродский

3336. О методах интерполяции. Мартин-Доминес (Sobre los metodos de interpolacion. Martin Dominguez Ricardo), Ingenieria naval, 1954, **22**, № 228, 404—408 (исп.)

Дана таблица значений функций с шагом h; требуется построить таблицу с шагом h/n. Заменяя на каждом отрезке длины h функцию интерполяционным полиномом третьей степени, вычисляют значения этого полинома методом суммирования; выводятся формулы, выражающие разности до третьего порядка на первом отрезке длины h/n через разности первоначальной таблицы. Процесс требует нескольких запасных знаков.

М. Л. Бродский

3337. О методах интерполяции. Интерполяция методом суммирования. Мартин-Доминес (Sobre los metodos de interpolacion. Interpolacion arrastrada. Martin Dominguez Ricardo), Ingenieria naval, 1954, **22**, № 230, 519—524 (исп.)

Добавление к методу, изложенному в реф. 3336, состоящее в том, что для двух соседних отрезков длины h исходные разности для таблицы с шагом h/n также вычисляются методом добавления к предыдущим исходным разностям малой поправки.

М. Л. Бродский

3338. Способ Гаусса для нахождения приближенного значения интеграла и погрешности. Го Хуаньтин (續分近似值的Gauss求法及其誤差.郭煥庭) 新科學, (Синь Кэсюэ), 1953, № 4, 28—30 (кит.)

Упрощается доказательство уже известной формулы Маншона:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x)\,dx=$$

$$=\frac{f^{(2n)}(Q)}{(2n)!}\cdot\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right)^2,$$

где $f(x)$ имеет непрерывные производные $f^{(2n)}(x)$ в $(-1, 1)$, а $Q_{n-1}(x)$ — полином порядка $n-1$, удовлетворяющий условию $Q_{n-1}(x_i)=f(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. При этом автор пользовался полиномом $R_{2n-1}(x)$ порядка $2n-1$, удовлетворяющим условиям $R_{2n-1}(x_i)=f(x_i)$, $R'_{2n-1}(x_i)=f(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Ли Ен Пир

3339. О вычислении осциллирующих интегралов. Льюк (On the computation of oscillatory integrals. Luke Yudell L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, part 2, 269—277 (англ.)

Рассматривается вычисление интегралов вида $\int_a^b f(y)\,e^{i\lambda y}dy$ для случая, когда требуется составить таблицу значений такого интеграла для различных значений λ (в том числе больших), опираясь на определенную сетку значений функции f. Записывая требуемый интеграл в форме

$$A_n=\int_{-nrh}^{nrh} f(x)\,e^{i\lambda x}dx=B_n+iC_n$$

и заменяя $f(x)$ интерполяционным полиномом порядка $2n$, автор получает для C_n (и B_n) явные выражения через центральные разности функции f с шагом h и числа $k_m=r^m g^{(m)}(\theta)(\theta=\lambda nrh;\ g(\theta)=\sin\theta/\theta)$, для вычисления которых удобно использовать известные Гарвардские таблицы функции g и ее производных; например,

$$C_3=rh\left[-9k_1\delta+{}^3/_2(k_1+9k_3)\,\delta^3-\right.$$
$$\left.-{}^3/_{40}(4k_1+45k_3+81k_5)\,\delta^5\right]2\mu f_0$$
$$(\delta f_0=f_{1/2}-f_{-1/2};\qquad \mu f_0={}^1/_2(f_{1/2}+f_{-1/2})).$$

Приводятся другие варианты подобных формул, вместе с формулами для оценки остаточных членов, также содержащими величины k_m, приведенные к удобной для использования форме. Во второй половине статьи исследуется вопрос о том, в каких интервалах ядра в выражениях остаточных членов являются знакопостоянными. Примененный метод в принципе сходен с предложенным в упоминаемой автором работе М. В. Николаевой (Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 1949, 28, 26). В литературе по вопросу упущена статья Н. П. Еругина и С. Л. Соболева (Прикл. матем. и механика, 1950, № 2, 193).

Л. В. Канторович

3340. Функционально-аналитическая разработка общего метода построения остаточных членов для различных линейных формул многомерного приближенного анализа. Эзрохи (Функціонально-аналітична розробка загального методу побудови залишкових членів для різних лінійних формул многомірного наближеного аналізу. Езрохі Т. Г.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-ту, 1954, **16**, физ.-матем. сер., № 5, 41—87 (укр.)

Пусть дан линейный оператор $F(f)$ на некотором пространстве функций. Значения его заменяются приближенно другим линейным оператором $P(f)$, который сходится к первому на общих нулях некоторых линейных операций $U_j(f)$ ($j=1,2,.., i$). Так как разность этих двух линейных операторов $F(f)-P(f)=V(f)$, т. е. остаток формулы приближения, есть также линейный оператор, то вопрос о выражении остаточного члена сводится к нахождению общей формы линейного оператора $V(f)$, который обращается в нуль на общих нулях операций U_j. Ответ на этот вопрос для произвольного полного линейного нормированного пространства дает теорема 1 (раздел I).

В разделах II и III автор дает алгоритм нахождения остаточного члена для некоторых важных, с точки зрения практических применений, пространств, которые охватывают пространства непрерывных функций n действительных переменных с непрерывными частными производными некоторого порядка s.

В теореме 2 (раздел III) устанавливается общая форма аналитического представления линейного функционала $V(f)$, который обращается в нуль для многочленов, суммарная степень которых не выше $s-1$. Эта теорема дает алгоритм нахождения остаточных членов формул приближения, в обеих частях которых могут находиться как сама непрерывная функция f, так и ее непрерывные частные производные до s-го порядка, принимая во внимание, что формула приближения имеет s-й порядок точности, т. е. точна для всех многочленов, суммарная степень которых не выше $s-1$. В теоремах 3 и 5 (раздел III) видно, какие изменения допускает алгоритм нахождения остаточного члена в тех случаях, когда в формуле приближения s-го порядка точности в выражениях функционала и его приближениях находятся лишь сама непрерывная функция и ее непрерывные производные до $s-p$ порядка.

В разделе IV даются применения к задачам приближенного вычисления кратных интегралов. На основании общих теорем разделов I—III дается общий вид остаточного члена формул n-мерных квадратур, а также даются применения метода на более общие типы формул приближенного вычисления кратных интегралов с линейными комбинациями ординат и производных в направлении радиуса-вектора. В виде примеров даны выражения остаточных членов для некоторых формул приближения кратных интегралов.

Д. Г. Гребенюк

3331. Системы уравнений. Островский (Simultaneous systems of equations. Ostrowski A. M.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 29—34 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании решения системы нелинейных уравнений

$$f_\mu(X) \equiv f_\mu(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $X(x_1 \ldots, x_n)$ — вектор с вещественными составляющими и $f_\mu(X)$ — непрерывные вместе с первыми производными вещественные функции. Пусть $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $Y_0 = (f_1(X_0), \ldots, f_n(X_0))$. Обозначим через J якобиан системы (1). В предположении $J \neq 0$ матрица $(J) = (\partial f_\mu / \partial x_\nu)$ имеет обратную, которая обозначается так: $(J^{-1}) = (\partial x_\nu / \partial x_\mu)$. Пусть p и q—числа, удовлетворяющие условиям $1/p + 1/q = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ и

$$\Delta_p(X) = \left[\sum_{\mu,\nu} \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial f_\mu}\right|^p\right]^{1/p}, \quad |X|_p = \left[\sum_\nu |x_\nu|^p\right]^{1/p}.$$

Формулируется теорема: Если для некоторого $D > 0$ в сфере $|X - X_0|_p \leqslant D|Y_0|_q$ выполнено неравенство $\Delta_p(X) \leqslant D$, то в этой сфере система (1) имеет решение.

Для $p = 2$ приведено доказательство. В случае, когда $f_\mu(X)$ имеют ограниченные вторые производные, рекомендуется оценивать $\Delta_p(X)$ следующим образом: вычислить $\Delta_p(X_0)$ и затем применять неравенство

$$\left|\frac{1}{\Delta_p(X_2)} - \frac{1}{\Delta_p(X_1)}\right| \leqslant |X_2 - X_1|_p \int_0^1 \Delta_q^*[X_1 + t(X_2 - X_1)]\,dt,$$

где

$$\Delta_q^*(X) = \left[\sum_{\nu,k,\lambda} \left|\partial^2 f_\nu / \partial x_k \partial x_\lambda\right|^q\right]^{1/q}.$$

Указанная теорема позволяет автору уточнить его прежние результаты (1936 г.), а также результаты К. Буземана о сходимости метода Ньютона для систем нелинейных уравнений. Приведен числовый пример. Библ. 9 назв.

И. П. Мысовских

3342. Решение алгебраических уравнений. Олдрич (Solution of algebraic equations. Aldrich Leland E.), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 1, 59—69 (англ.)

Предлагаемый в работе метод для решения алгебраических уравнений известен и носит наименование метода Даниила Бернулли (см., например, Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, 1933, ГТТИ, 95—96). Приведено много числовых примеров.

И. П. Мысовских

3343. Итерационная схема вычисления корней алгебраических уравнений высоких порядков и построение переходных процессов. Гранат Ю. Л., Инженерный сб., 1954, 20, 168—176

Описан способ представления многочлена $F(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x^{n-s}$ в виде: $F(x) = C \cdot f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены соответственно m-й и $(n-m)$-й степени. Обозначения: $f^{(k)}(x)$ и $\varphi^{(k)}(x)$ — k-е приближения многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$; $f_-^k(x)$ — многочлен $f^{(k)}(x)$, расположенный по убывающим степеням x; $f_{1-}^{(k)}(x)$ — многочлен $f_-^{(k)}(x)$, деленный на коэффициент при x^m; $\varphi_+^{(k)}(x)$ — многочлен $\varphi^{(k)}(x)$, расположенный по возрастающим степеням x, а $\varphi_{1+}^{(k)}(x)$—многочлен $\varphi_+^{(k)}(x)$, деленный на его свободный член — предполагается, что в процессе вычислений свободные члены у $\varphi^{(k)}(x)$ будут отличны от нуля.

Сущность способа: берется какой-нибудь исходный многочлен $f^{(0)}(x)$ (например, $f^{(0)}(x) = x^m$) и строятся последовательности многочленов $f^{(\alpha)}(x)(\alpha = 1,2, \ldots)$ и $\varphi^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\varphi^{(\alpha)}(x)$ представляет частное от деления $F_-(x)$ на $f_{1-}^{(\alpha)}(x)$, а $f^{(\alpha+1)}(x)$ — частное от деления $F_+(x)$ на $\varphi_{1+}^{(\alpha)}(x)$, обрываемое на члене m-й степени. Тогда пределы последовательностей многочленов $f^{(k)}(x)$ и $\varphi^{(k)}(x)$, если они существуют, дают искомые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ (условия сходимости этих последовательностей не освещены).

Даны схемы расположения вычислений для выделения множителей первой и второй степени. Показано приложение описанного метода к построению переходного процесса, когда операционное изображение является дробной рациональной функцией: $H(p) = P(p)/Q(p)$ и $Q(p)$ не имеет кратных корней.

А. П. Доморяд

3344. Решение уравнений при помощи степенных рядов. Отакар (Řešení rovnic potenčními šadami. Otakar Kodl), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 3, 263 (чеш.)

Рассматривается уравнение $x^n + px^m + q = 0$, где $p \neq 0$ $q \neq 0$, $n > m > 0$ $(n, m$ — целые). Строится вспомогательная функция $F(x, u) = x^n = upx^m + q$. Методом неопределенных коэффициентов находятся n рядов $f_i(u) = q_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} u^k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы они удовлетворяли условию $F(f_i(u), u) = 0$. Эти ряды сходятся в некоторой окрестности точки $u = 0$ и имеют радиус сходимости ρ, который определяется из уравнений $F(x, u) = 0$, $F'_x(x, u) = 0$. Числа $x_i = f_i(u)$ удовлетворяют уравнению $x^n + upx^m + q = 0$. Если $\rho > 1$, то числа $f_i(1)$ будут корнями исходного уравнения. Этот метод можно применить и для уравнений более общего вида.

М. С. Горнштейн

3345. Представление корней алгебраических или трансцендентных уравнений с помощью ряда. Кальво-Карбонель (Serie que da la raíz de una ecuación algebraica o transcendente. Calvo

Carbonell Carlos), Rev. Real. acad. cient. exact., fis. y natur. Madrid, 1954, 48, № 4, 189—201 (исп.)

Пусть

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

— алгебраическое или трансцендентное уравнение, левая часть которого имеет производные n-го порядка. Если $x = F(y)$ — функция, обратная к $y = f(x)$, то для корня x_1 уравнения (1) получается разложение

$$x_1 = F(y_0) - y_0 F'(y_0) + \frac{1}{2} y_0^2 F''(y_0) - \frac{y_0^3}{3!} F'''(y_0) + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{y_0^n}{n!} F^{(n)}(\theta y_0), \quad 0 < \theta < 1, \qquad (2)$$

где $y_0 = f(x_0)$, а x_0 выбирается заранее достаточно близко к x_1. Если x_1 — простой корень данного уравнения, то остаточный член $R_n = (-1)^n \frac{y_0^n}{n!} F^{(n)}(\theta y_0)$ будет тем меньше, чем x_0 ближе к x_1, и первые n членов разложения (2) дают приближенное значение искомого корня.

Приводятся примеры, показывающие выгоду применения указанного способа приближенного вычисления корней уравнения (1). Э. Апарисио

3346. «Ветвящиеся» ряды, извлечение квадратных корней и решение уравнений третьей степени. Сарафьян (Nested series, computation of square roots and solution of third degree equations. Sarafyan Diran), Math. Mag., 1953, 27, № 1, 19—36 (англ.)

Рассматриваются итерационные процессы вида $x_{n+1} = a + f(x_n)$; $x_0 = a$ при помощи следующей механической интерпретации: пусть a — расстояние между точками A_1 и A_2; из точки A_1 выходит точка, движущаяся по закону $s = t$, из точки A_2 — по закону $s = f(t)$. Когда первая точка будет в A_2, вторая — в A_3, где $A_1A_3 = x_1 = a + f(a)$, когда первая точка будет в A_3, творая — в A_4, где $A_1A_4 = a + f(x_1) = x_2$ и т. д. Если скорость второй точки до встречи меньше скорости первой точки, то $A_n \to A$, где A — точка встречи.

Рассматриваются простейшие частные случаи: геометрическая прогрессия ($f(t) = ct$, $|c| < 1$), итерационные методы извлечения квадратного корня, решение трехчленных уравнений третьей и высших степеней ($f(t) = c\sqrt[n]{t}$); причем для уравнений третьей степени получены процессы, сходящиеся во всех случаях ко всем вещественным корням. М. Л. Бродский

3347. Полиномиальнообразные приближения. Гросс (Polynomial-like approximation. Gross Oliver), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 58—60 (англ.)

Функция $z(x, y)$, непрерывная в области $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, аппроксимируется выражением $M(x, y) \equiv f(x) + g(y)$. Приближение понимается в смысле обращения в минимум: а) $\int_0^1 \int_0^1 [z(x, y) - M(x, x)]^2 \, dx \, dy$ и b) $\max_{0 \leqslant x, y \leqslant 1} |z(x, y) - M(x, y)|$.

Решение задачи а) дается в виде

$$f(x) = \int_1^1 z(x, y) \, dy + c_0; \quad g(y) = \int_0^1 z(x, y) \, dx + c_1,$$

где c_0 и c_1 — вещественные постоянные такие, что $c_0 + c_1 = -\int_0^1 \int_0^1 z(x, y) \, dx \, dy$.

Для решения задачи b) указываются рекуррентные формулы:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left\{\max_y [z(x, y) - g_n(y)] + \min_y [z(x, y) - g_n(y)]\right\}$$

и аналогично для $g_n(y)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где f_0 — произвольная непрерывная функция. Доказательство сходимости процесса дано Дилиберто и Штраусом (Diliberto S. P., Straus E. G., Pacif. J. Math., 1951, 1, 195—210).

Задачи обобщаются на случай, когда $M(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(y)$. Б. А. Рымаренко

3348. Аппроксимация π тригонометрическими иррациональностями. Годдард (Approximation to π by trigonometrical surds. Goddard L. S.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 308—313 (англ.)

Указываются два способа приближений числа π алгебраическими иррациональностями. Оба основаны на следующих соображениях: если $f(u, v)$ — рациональная функция и $f(\sin\theta, \cos\theta) \approx \theta$, для малых θ, то, используя тот факт, что $\sin(n\pi/60)$, $\cos(n\pi/60)$ (n — целое) суть алгебраические числа, имеем $\pi \approx (60/n) f(\sin n\pi/60, \cos n\pi/60)$. Среди приводимых автором приближений два имеют 18 верных знаков. М. К. Гавурин

3349. О сглаживании кривых методом компенсации для разностей. Мартин-Домингес (Sobre la rectificacion de curvas por el metodo de compensacion por diferencias. Martin Dominguez Ricardo), Ingenieria naval, 1953, 21, № 222, 722—729 (исп.)

Единичная погрешность ε в таблице равноотстоящих значений эмпирической функции порождает в таблице третьих разностей погрешности ε, -3ε, 3ε, $-\varepsilon$. Учитывая это, в таблицу вносят последовательно ряд поправок так, чтобы ход третьих разностей стал более плавным. М. Л. Бродский

3350. Оценки погрешностей методов графического интегрирования Граммеля и Мейснера-Людвига. Гаучи (Fehlerabschätzungen für die graphischen Integrationsverfahren von Grammel und Meissner-Ludwig. Gautschi Walter), Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel, 1953, 64, № 2, 401—435 (нем.)

Излагаются основы графических методов Граммеля и Мейснера-Людвига и выводится более точная, чем данная ими, оценка погрешности при различных способах аппроксимации искомой функции в малых интервалах аргумента для квадратур, дифференциальных уравнений n-го порядка и систем таких уравнений. Для оценки погрешностей, следуя Мизесу, составляются системы дифференциальных уравнений, на основе решения которых и находится оценка. Введен вектор погрешностей $E_r' = (|\varepsilon_r|, |\varepsilon_r'|, \ldots, |\varepsilon_r^{(n-1)}|)$, где $\varepsilon_r^{(\nu)} = y_r^{(\nu)} - y^{(\nu)}(x_r)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) — погрешность r-го шага ν-й производной решения $y(x)$ дифференциальчого уравнения $y^{(n)}(x) = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$. Для оценки $\varepsilon_r^{(\nu)}$ и E_r составляются характеристические уравнения погрешностей $\det(\lambda I - K) = \lambda^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu \lambda^\nu = 0$, где K — матрицы, содержащие постоянные $k_\nu \geqslant |df/dy_\nu|$, удовлетворяющие условию Липшица, λ^ν — искомые характеристические числа.

Оценки ошибок в матричных формах выведены для «грубого» метода, соответствующего первому приближению по Эйлеру, для метода хорд, касательных и комбинированного метода Людвига. Доказано, что условием сходимости метода касательных является не равенство $\lambda_1 \operatorname{tg}(h/2) < 1$ и условием сходимости комбинированного метода — неравенство $(\lambda_1/3)\operatorname{tg}(h/2) < 1$.

На основе доказанных теорем подробно рассмотрен частный случай $n=1$ и $n=2$. Приведена таблица результатов при различных λ. Библ. 15 назв.

М. А. Дмитриева

3351. Графический прием обработки компрессионных кривых гиперболического типа. Азарова Н. В., Гидротехн. стр-во, 1953, № 5,29—30

Дается графический прием построения кривой гиперболического вида

$$\varepsilon = A + B/(P + P_c) \qquad (A, B, P_c = \text{const}),$$

приближенно выражающей зависимость между коэффициентом пористости грунта ε и давлением P. Из числа экспериментально найденных точек, нанесенных в прямоугольной координатной системе εOP, берутся три точки a, b, c, через которые предположительно должна проходить искомая кривая. Через них проводятся параллельные осям координат прямые, образующие прямоугольники $aMbN$ и $bM'cN'$. Точка O' пересечения диагоналей NM и $N'M'$ является началом параллельных осям асимптот равнобочной гиперболы, которая относительно исходной системы εOP как раз является искомой. После этого легко построить сколько угодно ее точек. А. Б. Штыкан

3352. Графический рационализатор. Мишкович (Графички рационализатор. Мишковић Војислав В.), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 5—10 (серб.; резюме франц.)

Излагается содержание неопубликованной рукописи известного сербского ученого Михаила Петровича и сообщаются обстоятельства, при которых возникла эта работа, содержащая простой графический прием нахождения рациональной дроби, близкой к данному числу $\lambda = M/N$ $(M<N)$. А. Б. Штыкан

3353. Построение номограмм для применения в статистике. Ч. І. Лайл (The construction of nomograms for use in statistics. Part 1. True and empirical nomograms. Lyle Philip), Appl. Statist., 1954, 3, № 2, 116—125 (англ.)

Вначале кратко излагаются основы построения сетчатых номограмм и номограмм из выравненных точек и связь между ними. Далее изложен способ построения приближенных номограмм из выравненных точек для уравнений с тремя переменными методом последовательных графических приближений (Городской М., Уч. зап. МГУ, 1939, № 58, Номография). Рекомендуется предварительно по возможности выпрямить абак Декарта для номографируемого уравнения и за исходные шкалы при построении первого приближения взять шкалы, получающиеся на осях этого абака. Сходимость процесса последовательных приближений и оценка погрешности приближения не исследуются. Отмечается, что приведенный способ может быть применен и тогда, когда точные номограммы возможны, но построение их затруднительно.

Выполнение последовательных приближений показано на примере построения номограммы уравнения

$$Y = (9{,}228X_1 - 1{,}208X_1^2) + (27{,}229X_2 - 5{,}457X_2^2) + \\ + 1{,}230X_1 \cdot X_2 - 26{,}918,$$

где пределы изменения переменных $1{,}0 \leqslant X_1 \leqslant 4{,}0$; $1{,}0 \leqslant X_2 \leqslant 3{,}0$; $0 \leqslant Y \leqslant 40$.

Библ. 19 назв. М. В. Пентковский

3354. К номографируемости функций высшего анализа. Хендлер (Zur Nomographierbarkeit höherer Funktionen. Händler W.), Z. angew Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 293—294 (нем.)

Отмечается, что новым направлением в номографии является исследование номографируемости отдельных классов функций. Для функций комплексного переменного такие исследования проведены И. А. Вильнером (Матем. сб., 1950, 27(69), № 1, 3—46). М. В. Пентковский

3355. Номограмма для определения излучения черного тела и интенсивностей — в максимуме и интегральной — для спектральных линий с допплеровским контуром. Кавано, Бьёрнеруд, Пеннер (Nomogram for the evaluation of blackbody radiancy ans of peak and total intensities for spectral lines with Doppler contour. Kavanagh R. W., Björnerud E. K., Penner S. S.), J. Opt. Soc. America, 1953, 43, № 5, 380—382 (англ.)

Составная номограмма с параллельными шкалами (19 шкал) для расчета спектральной светимости черного тела, светимости в максимуме и суммарного излучения допплеровской линии. Приведены формулы, на основании которых построена номограмма. Указан метод применения номограммы к линиям с контуром, отличающимся от допплеровского. Номограмма может быть полезной и для других расчетов, например для определения интенсивностей линий или концентраций газов из экспериментальных данных. Г. С. Хованский

3356. Какую нагрузку может безопасно нести сварной шов. Гофман (What load will a welded joint carry safely? Hoffman R. J.), Welding Engr, 1954, 30, № 2, 33 (англ.)

Приведена номограмма из выравненных точек, позволяющая определять допустимую нагрузку при различных видах сварных швов, в зависимости от характера действия нагрузки. Номографируемая формула не приводится. Г. Е. Джемс-Леви

3357. Номограмма для определения по интерполяции 50% конечного момента. Лим (A nomogram for 50% end-point interpolation. Lim K. A.), J. Hyg., 1954, 52, № 3, 387—399 (англ.)

Приводится номограмма из выравненных точек для определения степени разведения, необходимой для 50% смертности вирусов при титровании. Номограмма соответствует формуле $E = AD^f$, где $f = (a-50)/(a-b)$. Г. Е. Джемс-Леви

3358. Номограмма реактивного сопротивления. Содаро (Reactance nomograph. Sodaro Joseph F.), Tele-Tech, 1954, 13, № 3, 89—90 (англ.)

Приводится ряд номограмм на параллельных шкалах, служащих для определения реактивного сопротивления и связанных с ним величин. Номографируемые формулы не приводятся. Г. Е. Джемс-Леви

3359. Пример упрощения вычислений при помощи номографических вспомогательных средств. Фер (Beispiel einer Rechenvereinfachung mit Hilfe nomographischer Rechenhilfsmittel. Fehr Raimund), Bergbau-Rundschau, 1954, 6, № 12, 628—637 (нем.)

Пропаганда номографических методов расчета. Автор со всеми подробностями приводит построение номограммы из выравненных точек для расчета несущего сечения шахтного каната по формуле $F = P/(\sigma B/S - 0{,}0095\ L)$. Г. Е. Джемс-Леви

3360. Номограмма для подогревания сока. Хьюлетт (Nomograph for juice heaters. Hewlett Allen M.), Sugar J., 1954, 16, № 8, 26—27 (англ.)

Приведена номограмма из выравненных точек для формулы $\Delta T_{lm} = (\Delta T_i - \Delta T_f)/\ln(\Delta T_i/\Delta T_f)$, встречающейся в расчетах, связанных с определением температуры сока сахарного тростника при выпаривании. Г. Е. Джемс-Леви

3361 К. Оценка ошибок и улучшения метода характеристик при решении задачи с начальными значениями в газодинамике. Бауэр (Fehlerabschätzungen und Verbesserungen der numerischen Charakteristikenmethoden für Anfangswertprobleme in der Gasdynamik. Bauhuber Franz (Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Klasse. Sonderdruck aus d.

Sitzungsber., 1955, 3), München, Verl. Bayer. Akad. Wiss, 1955, 2.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 24, 1322 (нем.)

3362 К. **Повышенный курс прикладной математики. Грин** (Advanced level applied mathematics. Green Stanley Lawson, London, Univ. Tutorial Press, 1955, 4, 324 p., ill., 12 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 272, 10 (англ.)

3363 К. **Прикладная математика. Т. 1, 2. Вальтер** (Angewandte Mathematik. Walther A., T. 1., 307 S., Abb., kart. 20; T. 2., 161 S., Abb., kart. 10, 1953), Neue techn. Bücher, 1954, 31, Ausg. 3, 57 (нем.)

3364 К. **Методы численного дифференцирования и интегрирования, приложения. Зиллер** (Méthodes de différentiation et d'intégration numériques, applications. Ziller Albert, Paris, Service docum. et inform. techn. aéronaut., 1955, XX, 151, ill., 1500 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 30—31, 706 (франц.)

3365 К. **Сокращенный способ Эггерта выравнивания больших геодезических систем по методу наименьших квадратов. Арнольд** (Das abgekürzte Eggert'sche Verfahren zum Ausgleichen grosser geodätischer Systeme nach der Methode der kleinsten Quadrate. Arnold Kurt (Veröff. d. Geodät. Inst. in Potsdam № 7). Berlin, Akad. Verl., 1955, 45 S., ill., 11.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 23, 1258 (нем.)

3366 К. **Счетная линейка. Панов Д. Ю.,** Изд. 10-е, стереотип., М., Гостехиздат, 1955, 128 стр. с илл., 2 р. 75 к.
См. РЖМат, 1953, 983 К.

ТАБЛИЦЫ

3367. **Таблицы гамма-функции комплексного аргумента** (Table of the gamma-function for complex arguments), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1954, № 34, 105 pp. (англ.)
Даются таблицы $U = \mathrm{Re}\ln\Gamma(x+iy)$ и $V = \mathrm{Im}\ln\Gamma(x+iy)$ с 12 знаками после запятой для $x = 0(0{,}1)10$, $y = 0(0{,}1)10$. Каждая страница таблиц содержит значения функций U и V для всех y и одного x. Кроме этого, имеются дополнительные таблицы $\sin\pi x$, $\cos\pi x$ с 15 десятичными знаками и $\mathrm{sh}\,\pi x$, $\mathrm{ch}\,\pi x$ с 15 значащими цифрами для $x = 0(0{,}1)10$. Во введении к таблицам приводятся некоторые свойства $\Gamma(z)$, формулы для вычисления $\Gamma(z)$ вне прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 10$, интерполяционные характеристики таблиц, библиографические ссылки (42 названия). Подробно описан процесс вычисления таблиц. Следует заметить, что при выбранном в таблицах шаге 0,1 интерполяция получается весьма сложной. Л. Н. Кармазина

3368. **Таблицы интегральных синусов и косинусов для аргументов от 10 до 100** (Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1954, № 32, 187 pp. (англ.)
Таблицы $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x (\sin u/u)\,du$ и $\mathrm{Ci}(x) = \int_0^x (\cos u/u)\,du$ вычислены с 10 десятичными знаками для $x = 10(0{,}01)100$. Для интерполирования по формуле Эверетта даны вторые центральные разности, а также с 7 десятичными знаками для $p = 0(0{,}001)1$ таблицы коэффициентов $E_2(p) = \frac{1}{6}p(1-p^2)$ и $F_2(p) = \frac{1}{6}q(1-q^2)$, $p+q=1$ при вторых центральных разностях. С 6—7 десятичными знаками для $p = 0(0{,}001)1$ даны таблицы интерполяционных коэффициентов $\frac{1}{2}p(1-p)$ интерполяционной формулы Ньютона. Книга снабжена вспомогательными таблицами $n\cdot\pi/2$ на 15 десятичных знаков, $n = 1(1)100$. Библ. 19 назв. А. В. Лебедев

3369. **Таблицы вырожденных гипергеометрических функций. Рашон, Ланг** (Tables of the confluent hypergeometric function. Rushton S., Lang E. D.), Sankhyā, 1954, 13, № 4, 377—411 (англ.)

3370 К. **Таблицы интегралов квантовой механики. Торн, Баркер, Эйринг** (Tables of quantum mechanical integrals. I. Some two parameter integrals. Thorne C. J., Barker R. S., Eyring H.), Studies appl. Math., 1953, 10, 38 (англ.)

3371 К. **Таблицы для быстрого умножения и деления чисел, меньших тысячи; для больших чисел вычисления облегчаются и становятся более точными. Крелле, Зелигер** (Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Crelle A. L. Neue Ausg. Bearb. Seeliger O. Berlin, de Gruyter, 1954, VII S., 999 Sp. Taf. d. Quadrat- u. Kubikzahlen v. 1—1000. 48 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 39, 2220 (нем.)

3372 К. **Таблицы умножения. О'Рурк, М.,** Госстатиздат, 1953, 336 стр., 6 р. 90 к.

3373 К. **Логарифмы. Логарифмические, тригонометрические и арифметические таблицы. Браска, Леви** (Logaritmi. Tavole logaritmiche, trigonometriche, aritmetiche. Brasca Luigi, Levi Eugenio. Milano, Ed. Ghisetti e corvi, 1954, 182, XVII p., 450 L.), Bibliogr. ital., 1954, 88, № 641, 397 (итал.)

3374 К. **Таблицы десятичных логарифмов** (Daftar logaritma dalam empat desimal; tjetakan ke-5. Djakarta, Noordhoff-Kolff, 1955, 87 hal., 7 гр.), Berita bulanan, 1955, 3, № 8, 1 (индонез).

3375 К. **Пятизначные логарифмы и другие математические таблицы. Мюллер** (Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln. Müller Fritz. 3. Aufl., Leipzig, Fachbuchverl., 1954, VII, 206 S., 6. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 46, 2270 (нем.)

3376 К. **Пятизначные логарифмические таблицы чисел и тригонометрических функций при новоградусном делении. Пеевский, Венедиков** (Петзначни логаритмични таблици на числата и тригонометричните функции при ново градусно деление. Пеевски Васил, Венедиков Михаил, 4 изд., София, Наука и изкуство, 1954, 195 с., 6 лв.), Българ. книгопис, 1954, 58, № 11, 375 (болг.)

3377 К. **Счетная линейка и логарифмические таблицы. Кларк** (Slide rule and logarithmic tables, 3 ed., Clark John Jesse, Drake F. J., 1954, 222 pp., ill., 2 doll.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 4, 24 (англ.)

3378 К. **Таблицы возведения в степень (При основаниях от 0,0001 до 1000 и показателях от 0,01 до 3). Тишин С. Д.,** М., Госстатиздат, 1954, 224 стр., 5 р. 15 к.

3379 К. **Математические таблицы и формулы для инженеров и студентов технических учебных заведений. Камм** (Mathematical tables and formulae for engineers and technical students. Camm Frederick James, 5 ed., London, Newnes, 1954, 145 pp., tabl., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 262, 10 (англ.)

3380 К. **Математические таблицы. Андреев П. П.** 2-е изд., М., Госстатиздат, 1955, 284 стр., 9 р. 60 к.

См. также: 2897, 2898, 2902, 3042, 3156

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3381. Матричный анализ линейных цепей с параметрами, зависящими от времени. Пайпс (Matrix analysis of linear time-varying circuits. Pipes Louis A.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 9, 1179—1185 (англ.)

Исследуются решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в линейных цепях с периодическим меняющимся во времени параметром (например, колебания в электрическом контуре, емкость которого есть заданная периодическая функция времени). Эти уравнения приводятся к виду

$$\ddot{x}+F(t)\,x=0;\quad F(t+T)=F(t);\qquad x(0)=x_1(0);\quad \dot{x}(0)=x_2(0). \tag{1}$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два линейно независимых решения этого уравнения в интервале $0\leqslant t\leqslant T$. Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{matrix}x(t)=x_1(t)\\ \dot{x}(t)=x_2(t)\end{matrix};\qquad \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}u_1(t) & u_2(t)\\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t)\end{bmatrix}=[u(t)];\ [u(T)]\,[u(0)]^{-1}=[M].$$

Тогда имеют место соотношения

$$[x(T)]=[M]\,[x(0)],\qquad [x(nT)]=[M]^n\,[x(0)].$$

Исследование решений дифференциального уравнения (1) сводится к вычислению собственных значений матрицы $[M]$. Так как $\det[M]=1$, то задача сводится к вычислению величины $\mathrm{sp}\,[M]$. Такое вычисление и соответствующие исследования решений приводятся для случаев «прямоугольных волн» и «пилообразных» колебаний, т. е. когда

$$F(t)=\begin{cases}F_1 & 0\leqslant t\leqslant T/2,\\ F_2 & T/2\leqslant t\leqslant T,\end{cases}\qquad \text{либо } F(t)=At+B.$$

М. Л. Цетлин

3382. Структурные параметры сетей связи. Шимбел (Structural parameters of communication networks. Shimbel Alfonso), Bull. Math. Biophys., 1953, **15**, № 4, 501—507 (англ.)

Сеть связи S между n местами (sites) описывается матрицей $S=\|s_{ij}\|$, где $s_{ij}=1$, если из места i в место j идет канал связи, а иначе $s_{ij}=0$; $s_{ii}=1$. Матрица S (и ее сеть) называется адэкватной, если, начиная с $t=T$, $S^t>0$ (Shimbel A., Bull. Math. Biophys., 1951, **13**, № 3, 165—178). Цепочка последовательных каналов есть путь в S. Длина пути есть число каналов в нем. Расстояние $l(i,j)$ от i до j есть длина кратчайшего пути из i в j; $l(i,i)=0$. Доказывается, что $l(i,j)$ равно числу нулей в i-й строке и j-м столбце всех матриц $S^0, S^1, \ldots, S^T$ и что $\|l(i,j)\|$ однозначно определяет S. Сумма $A(i,S)=\sum_{j=1}^{n} l(i,j)$ названа доступностью сети S месту i, $A^{-1}(j,S)=\sum_{i=1}^{n} l(i,j)$ — доступностью места j сети S и $D(S)=\sum_{i=1}^{n} A(i,S)$ — дисперсией сети S. Дисперсия есть мера «компактности» сети. $D(S)$ определяет S неоднозначно. Вводятся средние длины путей

$$\bar{l}(S)=D(S)/n^2,\qquad \bar{l}(i,S)=A(i,S)/n,$$
$$\bar{l}^{-1}(i,S)=A^{-1}(i,S)/n.$$

Даются формулы, связывающие доступность, дисперсию и среднюю длину пути сети с доступностью, дисперсией и средней длиной пути подсетей в случае двустороннего канала между адэкватными подсетями M и N и в случае центральной станции между k адэкватными подсетями N_i. В частности,

$$D(S)=D(M)+D(N)+m\,[A(b^*,N)+A^{-1}(b^*,N)]+$$
$$+n\,[A(a^*,M)+A^{-1}(a^*,M)]+2mn,$$

где m, n — порядки M и N; a^* — конец двустороннего канала в M; b^* — его конец в N;

$$D(C)=\sum_{i=1}^{k}D(N_i)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\delta_{ij}n_i\,[A(x_j^*,N_j)+$$
$$+A^{-1}(x_j^*,N_j)]+2\sum_{i=1}^{k}n_i+4\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}n_in_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}[A(x_i^*,N_i)+A^{-1}(x_i^*,N_i)],$$

где C — вся сеть; x_i^* — место в N_i, соединенное со станцией; n_i — порядок N_i; δ_{ij} — кронекеровы символы. Формулы позволяют минимизировать $\bar{l}(S)$ и $\bar{l}(C)$ включением каналов связи между подсетями в подходящих местах. В заключение приводятся соображения об оценке «загрузки» (stress) отдельных мест сети (без формул); загрузка определяется как число всех минимальных путей, проходящих через место.

Опечатки. В формулах (11) и (12) вместо m стоит n. Г. Н. Поваров

3383. Сто лет булевой алгебры. Фракт (Cien años de álgebra de Boole. Frucht Roberto W.), Scientia (Valparaiso), 1954, **21**, № 3, 167—174 (исп.)

Популярный очерк булевой алгебры (в логической интерпретации) и ее применения к релейно-контактным схемам и вычислительным машинам, работающим по двоичной системе счисления. Написан по случаю столетия со времени выхода работы Буля «An investigation of the laws of thought», Лондон, 1854. Библ. 8 назв. Г. Н. Поваров.

3384. Алгебраическая теория для использования при конструировании цифровых вычислительных машин. Нелсон (An algebraic theory for use in digital computer design. Nelson E. C.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 3, 12—21 (англ.)

Краткое и популярное изложение алгебры Буля и ее возможного приложения к конструированию цифровых вычислительных машин. Время рассматривается в качестве дискретной переменной величины, что отвечает устройству цифровых машин с внутренним хронизатором, дающим синхронизирующие импульсы через определенные промежутки времени. Числа и «команды» представляются в виде двоичных чисел, алгебраические преобразования над которыми осуществляются схемными элементами.

Приведены алгебраические операции, соответствующие вентильным схемам на диодах, осуществляющим операции «и» и «или», фазообращающему каскаду на триоде, каскаду на пентоде, управляемому управляющей и экранной сетками, каскаду на двойном триоде с общей анодной нагрузкой и др. Представляет интерес алгебраическое представление триггерной (пересчетной) ячейки. Статья примыкает к кругу вопросов, изложенных в книге «Синтез электронных вычислительных и управляющих схем» (Москва, Изд-во ин. лит., 1954). М. Л. Цетлин

3385. Релейные схемы с вентильными сетками. Гаврилов М. А., Автоматика и телемеханика, 1955, 16, № 4, 328—343

Автором разработан аналитический метод построения релейных схем с сетками из вентилей и контактов, позволяющий создать схему, в которой на каждом реле требуется не более одного переключающего контакта. В общем случае преобразование схемы сводится к приведению структурной формулы к виду:

$$F = R_a(X_a + K_a^0) + R_b(X_b + K_b^0) + \ldots + R_i(X_i + K_i^0) + \\ + R_j(Y_j + K_j^0) + R_f(Y_f + K_f^0) + \ldots + R_m(Y_m + K_m^0) + \\ + \ldots + R_p(W_p + K_p^0) + R_r(W_r + K_r^0) + \ldots + R_v(W_v + K_v^0),$$

где R_a, R_b, ..., R_v — дополнительные сопротивления, X_a, X_b, ..., X_i, Y_j, ..., W_v — обмотки реагирующих органов промежуточных и исполнительных элементов X, Y, ..., W; K_a^0, K_b^0, ..., K_v^0 — конституенты нуля, содержащие контакты всех элементов схемы. Выделив в полученном выражении при помощи знака многополюсного параллельного соединения часть, содержащую все контакты, и введя в цепь каждого из них вентиль, можно каждый из контактов вынести за скобку, т. е. получить схему, содержащую не более одного замыкающего или размыкающего контакта каждого реле. Число вентильных элементов в схеме можно уменьшить исключением их из неразветвленных цепей, примыкающих к выходной точке, а также разделяя контакты на группы и производя объединение их в каждой группе в отдельности с последующим объединением всей схемы. Разделение схемы на группы и преобразование внутри каждой группы позволяет получить схему с заданным числом контактных пружин на каждом из элементов. Приведены примеры применения предложенного метода.

В. Н. Р.

3386. О синтезе контактных схем с шаговыми переключателями. Остиану В. М., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 5, 827—830

Рассматривается применение метода универсальных многополюсников к синтезу контактных схем с шаговыми переключателями, т. е. с переключателями, имеющими l_i положений, причем в каждый момент может быть замкнута только одна из l цепей. Переключатель может иметь несколько щеток, переключающихся синфазно. Структурная проводимость между двумя полюсами схемы из n переключателей $X_1, X_2, \ldots, X_n$ может быть представлена функцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемой автором предикативной и принимающей значение 0 (разомкнутая цепь) или 1 (замкнутая цепь). Аргумент x_i передает состояние переключателя X_i и принимает l_i значений.

В соответствии с этим (p, q)-полюсник изображается (p, q)-матрицей $\| f_{ij} \|$ предикативных функций, где f_{ij} — полная проводимость между i-м входом и j-м выходом. Любая предикативная функция может быть однозначно представлена как сумма некоторого числа обобщенных конституентов единицы, общее число которых равно 2^H, где $H = \sum_{i=1}^{n} \log_2 l_i$.

Автор указывает два способа построения разделительных и квазиразделительных (т. е. таких, в которых любой путь от выхода i к выходу j при $i \neq j$ проходит хотя бы через один вход) контактных многополюсников и указывает верхнюю границу числа контактов для таких универсальных многополюсников.

Доказывается теорема 1, утверждающая, что любую (p, q)-матрицу $\| f_{ij} \|$ предикативных функций n многозначных переменных при любом m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ можно реализовать соединением p пучков по q деревьев $(n - m)$ переменных и q квазиразделительных универсальных многополюсников остальных m переменных.

Теорема 2 утверждает, что число контактов в (p, q)-полюснике, построенном таким методом, не превосходит

$$\frac{p \cdot q \cdot 2^{H+1}(l_1 + 1)}{\log_2 p + H - 2\log_2[\log_2 p + H - 2\log_2(l_1 + 1)]}.$$

Излагается метод построения схем, реализующих симметрические предикативные функции n переменных.

В. Н. Р.

3387. Циклические релейные схемы и аналитические соотношения в них. Иванов В. И. Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 2, 239—241

Классифицируя многотактные циклические схемы, автор выделяет простые циклические схемы, т. е. такие циклические схемы, у которых за каждый период работы все исполнительные элементы изменяют свое состояние ровно два раза. Если же при этом условия работы всех элементов являются функциями одинакового типа, то такие схемы автор называет простыми циклическими однотипными схемами. Автор указывает четыре основных вида этих схем, имеющих одну последовательность включений: 1) элементы включаются в порядке их индексов, а отключаются одновременно; 2) элементы включаются одновременно, а отключаются в порядке индексов; 3) элементы включаются в порядке индексов, а отключаются в обратном порядке и 4) элементы включаются и выключаются в порядке их индексов.

Для таких схем выведен ряд соотношений, учитывающих заданную последовательность действия реле. Так, если схема с элементами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принадлежит к виду 1), 2) или 3), то может быть получен ряд равносильностей вида:

$$x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = x_i f(1, 1, \ldots, 1, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Приведены аналогичные соотношения и для других видов схем. Эти соотношения могут найти применение в анализе простых циклических схем как самостоятельных, так и являющихся частью более сложных релейных схем.

В. Н. Р.

3388 Д. Исследование контактных схем с минимальным числом контактов. Поваров Г. Н. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ин-т автомат. и телемех. АН СССР, М., 1954

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

3389. Представление чисел в вычислительных машинах с фиксированной запятой. Уэрсли (Numerical representation in fixed-point computers. Worsley Beatrice H.), Computers and Automat., 1955, 4, № 5, 10—13 (англ.)

Описывается методика программирования для машины с фиксированной запятой, используемая на машине ФЕРУТ. Для подбора масштабов предлагаются следующие методы: 1) предварительное фиксированное масштабирование, когда числа, с которыми опери-

рует машина, умножаются на масштабный множитель, позволяющий заключить новые значения чисел в допустимые пределы; 2) предварительное масштабирование с поправками, позволяющее менять значение масштабного множителя при переходе от одной серии параметров к другой с тем, чтобы в каждой серии значения параметров укладывались в допустимые пределы; 3) раздвижное (sliding) масштабирование, позволяющее изменять значение масштабного множителя в процессе вычислений с тем, чтобы значения параметров не выходили за допустимые пределы; 4) переменное представление чисел, позволяющее с помощью изменения числа разрядов, с которыми оперирует машина, расширять допустимые пределы значений чисел; 5) представление чисел с учетом порядков, позволяющее вести автоматически раздвижное масштабирование.

Описывается также техника кодирования, позволяющая ускорить и упростить процесс программирования. Широко применяется составление программ из ряда подпрограмм или из псевдокоманд, которые хранятся в запоминающем устройстве машины и затем расшифровываются с помощью специальной программы.

Б. И. Шитиков

3390. **Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования. Рид** (A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme. Reed Irving S.), Trans. I. R. E., 1954, **PGIT-4**, 38—49 (англ.)

Кодирование сообщений с последующим выявлением и исправлением ошибок, происшедших в процессе передачи данных, найденное Хаммингом (Hamming R. W., Bell System Tech. J., 1950, **26**, № 2, 147) для случая не более одной ошибки, развито для случая, когда максимальное число ошибок и число двоичных разрядов закодированного сообщения равно некоторой степени двойки. Кодирование является систематическим и может быть произведено с помощью регистра, содержащего кодируемое сообщение, двоичного счетчика и сумматора.

Кодирование сильно удлиняет число двоичных разрядов сообщения. Например, для осуществления возможности исправить 3 ошибки и выявить 4, сообщение, состоящее из 5 двоичных разрядов, кодируется в сообщение, состоящее из 16 двоичных разрядов. Схема кодирования найдена с помощью представления сообщений в виде точек n-мерного пространства и использования аппарата булевой алгебры. Первичное сообщение восстанавливается путем определения четности сумм заранее известных разрядов принятого сообщения.

В. В. Кобелев

3391. **Решение краевых задач с помощью автоматических вычислительных машин. Верзу** (Solutions of boundary- value problems on automatic computing equipment. Verzuh Frank M.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 813—821 (англ.)

Сравниваются различные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью следующих вычислительных машин: 1) настольная механическая машина, 2) электромеханическая машина ИБМ-602А, 3) электронный вычислительный перфоратор ИБМ-604 (РЖМат, 1955, 994, 3464), 4) машина КПК фирмы ИБМ с программным управлением на перфокартах (РЖМат, 1954, 1432; 1955, 994), 5) Вихрь I (РЖМат, 1954, 4934—4935), 6) моделирующее устройство Массачусетского технологического института.

Рассматривались четыре способа решения краевых задач: сведение к системе линейных уравнений, вариационные методы, сведение к интегральному уравнению и метод пристрелки, т. е. решение задачи с начальными условиями, подбираемыми путем последовательных приближений. Автор приходит к выводу, что последний метод наиболее удобен при использовании автоматических быстродействующих машин. Рассматриваются вопросы о выборе шагов, квадратурных формул, точности вычислений и т. п. при применении этого метода, о подготовке задач к решению на машине (разработка программы, ее ввод в машину и т. п.) и о характеристиках машины, определяющих ее возможности (виды команд, объем запоминающего устройства, скорость работы отдельных устройств и др.). Приведены фото перечисленных машин, кроме машины Вихрь I, и общая блок-схема машин ИБМ-602А и ИБМ-604.

В заключение приводятся данные о решении дифференциального уравнения Шрёдингера $d^2p/dx^2 = (\lambda + G)\,p$, где $G = (a/x^2) - (b/x)$, с краевыми условиями $p(0) = p(\infty) = 0$. Эта задача с помощью преобразования Нумерова сводится к разностному уравнению $\Delta^2 y_n = h^2(\lambda + G_n)\,p_n$, $p_n = y_n : \left[1 - \frac{h^2}{12}(\lambda + G_n)\right]$, $y_0 = 0$, $y_\infty = 0$. Автор упоминает о трудностях, связанных с наличием особой точки ($x = 0$), но не говорит о путях их преодоления. На всех машинах автоматически выполняется лишь интегрирование каждого отдельного приближения, подбор же начальных данных для следующего приближения осуществлялся вручную. Приведены блок-схемы решения задачи для упомянутых выше машин, кроме ИБМ-604. Время, затрачиваемое на получение одного приближения, дается следующей таблицей:

Машина	Метод	Число точек	Число дес. знаков	Время в мин.
Настольная	Разностный	192	6	1440
Моделирующее устройство	—	3 участка	5	60
ИБМ-602А-1	3-член. ф-ла	150	7—12	12,5
ИБМ-602-III	Нумерова	1 50	7—12	25
ИБМ-604	3-член. ф-ла	15 0	10	3
ИБМ-604	Нумерова	15 0	1 0	3
КПК	»	150	8	20
КПК	Рунге—Кутта	15 0	8	40
Вихрь 1	Нумерова	150	7	19

На машине Вихрь I из 19 мин. 17 уходит на печать. Существенным является время подготовки. На моделирующем устройстве подготовка схемы, изготовление перфоленты и первый просчет заняли 8-часовой рабочий день. Подготовка и коммутация машины ИБМ-602А потребовали около недели, а машины ИБМ-604 8 час. Для машины КПК схема и перфокарты были изготовлены за 3 часа. Подготовка программы для машины Вихрь I отняла несколько недель из-за неопытности персонала. Приводятся краткие характеристики упомянутых машин.

К. А. Семендяев

3392. **Логические и управляющие функции, выполняемые магнитными сердечниками. Гутерман, Кодис, Руман** (Logical and control functions performed with magnetic cores. Guterman S., Kodis Robert D., Ruhman S.), Proc. I. R. E., 1955, **43**, № 3, 291—298, 345—346 (англ.)

Вкратце излагается принцип работы регистра на магнитных сердечниках, более подробно описанного ранее (РЖМат, 1955, 2963), и описывается большое число схем, предназначенных для осуществления логических и арифметических операций посредством таких регистров. Основными логическими операциями являются здесь следующие: операция дизъюнкции $A \vee B$ («A или

B») и операция «запрещения» (inhibition) $A \cdot \bar{B}$ («A и не-B»), представляющая собой отрицание импликации $A \rightarrow B$ («если A, то B»).

Для осуществления операции $A \vee B$ предлагаются две схемы, в одной из которых выходные обмотки сердечников A и B присоединяются порознь к двум входным обмоткам сердечника C, а в другой — они через диоды соединяются параллельно и затем присоединяются к одной входной обмотке сердечника C.

Операция «запрещения» $A \cdot \bar{B}$ сигнала A сигналом B осуществляется магнитным сердечником с двумя входными обмотками — нормальной и «запрещающей», на которые подаются сигналы A и B соответственно. Ток, протекающий через «запрещающую» обмотку, уничтожает магнитный поток, созданный током, протекающим по нормальной обмотке. Можно, как указывается, осуществить магнитные сердечники и с несколькими «запрещающими» обмотками. Однако применение таких сердечников не является необходимым, ибо осуществляемые этими сердечниками операции (например, $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$) всегда можно осуществить также и посредством схем, осуществляющих операцию дизъюнкции (например, $B \vee C$) и обычную операцию «запрещения» (например $A \cdot (\bar{B \vee C})$).

Используя описанный в статье генератор непрерывной последовательности импульсов (генератор единиц), можно построить с помощью схем, осуществляющих операции дизъюнкции и «запрещения», генераторы различных периодических последовательностей импульсов и схемы, осуществляющие все элементарные логические и арифметические операции. Операция дополнения или отрицания $\bar{A}$ («не-A») реализуется схемой, осуществляющей операцию $1 \cdot \bar{A}$ «запрещения» сигналом A импульсов 1, поступающих от генератора единиц. Операцию конъюнкции $A \cdot B$ («A и B») можно реализовать либо посредством схемы, осуществляющей операцию $A \cdot (\bar{\bar{B}})$ «запрещения» A отрицанием $\bar{B}$ сигнала B, либо посредством схемы, осуществляющей двукратную операцию «запрещения» $A \cdot \overline{(A \cdot \bar{B})}$. Операцию строго разделительного «или» $(A \cdot \bar{B}) \vee (B \cdot \bar{A})$ можно осуществить, присоединяя выходы схем, осуществляющих операции «запрещения» $A \cdot \bar{B}$ и $B \cdot \bar{A}$, к входам схемы, осуществляющей операцию дизъюнкции. Объединяя эту схему со схемой, осуществляющей конъюнкцию $A \cdot B$, получают схему так называемого полусумматора, выдающего произведение и сумму по модулю 2 двоичных цифр A и B, поступающих на его вход. Добавляя третий выход, выдающий $B \cdot \bar{A}$, получают комбинированную схему, выполняющую также и функцию «полувычитателя» (half-substracter). Приведенная в статье такого рода комбинированная схема содержит всего лишь 5 магнитных сердечников.

Помимо схем, указанных выше, приведены и обсуждаются функциональные схемы триггеров, различных управляющих устройств, двоичных счетчиков, двоичных сумматоров, вычитающих, множительных и делительных устройств, построенных из магнитных сердечников. В заключение указывается что булева алгебра применима для функционального описания таких схем с тем лишь условием, чтобы принимались во внимание запаздывания, вносимые магнитными сердечниками. Библ. 11 назв. В. И. Шестаков

3393. Возможности новой вычислительной машины НОРК. Эккерт (The significance of the new computer NORC. Eckert W. J.), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 10—13 (англ.)

Новая быстродействующая вычислительная машина НОРК (NORC) (РЖМат, 1955, 3459—3460, 6146) предназначается для решения весьма больших задач, которые не могут быть эффективно решены на уже имеющихся в эксплуатации вычислительных машинах из-за их относительно малой скорости и емкости. Скорость работы машины НОРК при решении таких задач примерно в 20 раз больше, чем у ИБМ-701. Большая скорость работы машины обеспечивается соответствующей скоростью работы всех узлов машины. Машина оперирует с 13-разрядными десятичными числами по системе с учетом порядков. Каждое число представлено 16 десятичными знаками. Действия производятся внутри каждого десятичного разряда по параллельной системе, между отдельными десятичными разрядами по последовательной системе. Система инструкций трехадресная. В машине используется шесть типов субблоков: 2 типа линий задержки, инвертер, блок формирования, схема «или-или» и схема «и-и». В качестве основной ячейки использован динамический триггер. Стоимость машины 2,5 миллиона долларов. Основные задачи, которые будут решаться на машине НОРК: 1) задача «кавитации», т. е. расчет пустотной оболочки, образующейся вокруг движущегося под водой управляемого снаряда и влияющей на его управляемость; 2) расчет управляемых снарядов на прочность при сверхзвуковых скоростях; 3) задача, представленная физиками Колумбийского университета и связанная с атомным и молекулярным анализом; она включает решение уравнения Шредингера и требует в самом простом случае выполнения 1 биллиона арифметических операций.

А. Б. Залкинд

3394. Вычислительная машина ТРАДИК использует полупроводниковые триоды (Tradic computer uses transistors), Electronics, 1955, 28, № 5, 222, 224 (англ.)

Сообщение о том, что в лаборатории фирмы «Белл» построена миниатюрную вычислительную машина ТРАДИК (TRADIC — Transistor Digital Computer) для самолетов, летающих со сверхзвуковыми скоростями. В ней используются 800 полупроводниковых триодов. См. РЖМат, 1954, 5807—5808. В. К. Зейденберг

3395. Новая вычислительная машина УНИВАК II фирмы «Ремингтон Ранд» (New Remington Rand UNIVAC II computer), Mach. Design, 1955, 27, № 6, 39 (англ.)

Сообщение о том, что в новой вычислительной машине УНИВАК II фирмы «Ремингтон Ранд» имеется быстродействующее запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью 120 000 знаков. Выборка 720 знаков занимает 50 мсек. Приведена фотография устройства. В. К. Зейденберг

3396. Новые вычислительные машины, использующие кристаллические триоды (New computers use more transistors), Aviat. Week, 1955, 62, № 16, 87 (англ.)

Сообщение о новой машине ИБМ-608, использующей более 3000 кристаллических триодов. Внутреннее запоминающее устройство представляет собой объемную матрицу на магнитных сердечниках. В качестве входных и выходных устройств используется перфокартное оборудование. Скорость работы новой машины будет в 2,5 раза превосходить скорость ИБМ-607. Два девятиразрядных числа будут перемножаться на ИБМ-608 за 11 мсек., деление требует 13 мсек. Скорость пробивки перфокарт достигает 155 карт в 1 мин., что в 2 раза быстрее, чем на ИБМ-607. А. Б. Залкинд

3397. Электронная вычислительная машина (Electronic calculating machine), Aircraft. Prod., 1955, 17, № 3, 126—128 (англ.)

Описывается работа цифровой вычислительной машины на перфокартах с электронным множительным устройством (электронный вычислительный перфоратор), разработанной фирмой «Пауэрс-Сеймас» (Powers-

Samas). Перфокарты, с которыми оперирует машина, перфорируются вручную, обычным способом. На них наносятся числа, подлежащие перемножению (обычно цена и количество материала), а также данные, характеризующие род выполняемой работы (дата, порядковый номер, код операции и т. п.). Перфокарты пачками в 600—1000 шт. загружаются в приемное устройство машины, из которого по одной поступают во входное устройство машины. Электронное арифметическое устройство производит перемножение чисел и результат передается на перфорирующее устройство, причем карта пробивается лишь в случае повторения результата при втором просчете. Одновременно пробивается кодовое отверстие, указывающее, что результат правилен. По отсутствию этого отверстия находятся перфокарты с неправильными результатами. Первая модель машины производила только попарное перемножение чисел. Последующие модели производят более сложные операции типа: $(A \times B) \pm C \pm D \pm E$. Машина оперирует с числами, имеющими не более семи десятичных разрядов. Скорость работы машины 120 перфокарт в 1 мин. Стоимость 6000—7000 долл. Для удобства обслуживания электроника машины выполнена в виде сменных одноламповых блоков. Несколько блоков образуют съемный узел, который может быть легко извлечен из машины и заменен новым. В конце статьи указывается, что устройство подобного типа является первым образцом, который фирма собирается выпускать серийно. Следующим этапом явится разработка электронного вычислительного перфоратора с программным управлением. Машина будет иметь запоминающее устройство на магнитном барабане и будет обрабатывать 120 перфокарт в 1 мин.; предполагаемая стоимость машины 13000 — 15000 долл. Б. И. Шитиков

3398. Новый вычислительный центр ИБМ в Нью-Йорке (IBM opens New York data processing center for service, program testing), Office Manag., 1955, **16**, № 8, 51, 52, 69 (англ.)

Фирма ИБМ открыла новый вычислительный центр в Нью-Йорке, оборудованный большими цифровыми машинами ИБМ-702 и ИБМ-701, малой цифровой машиной ИБМ-650, а также счетно-аналитическими машинами. Машина ИБМ-701, предназначенная для научных расчетов, в ближайший месяц будет заменена более совершенной ИБМ-704. Предполагается, что оборудование, установленное в здании центра, позволит удовлетворять заказы любой фирмы, нуждающейся в проведении расчетов или обработке большого количества данных. В ближайшее время фирма открывает еще несколько центров в других городах США. Центры, открываемые в Лос-Анжелосе, Чикаго и Хаустоне, оборудуются машинами ИБМ-650. Города, в которых будут установлены машины ИБМ-702, не сообщаются. Установленная в нью-йоркском центре вычислительная машина ИБМ-702 обработала за 8 мин. 2500 инвентаризационных ведомостей, на которые обычно требуется не менее одного рабочего дня.

3399. Вычислительная машина ускоряет снабжение морской авиации («Brain» speeds navaer supply at aso philly), Naval Aviat. News, 1954, Apr., 30 (англ.)

Сообщение об использовании машины ИБМ-701, установленной в Управлении снабжения авиации в Филадельфии, для учета запасных частей на складах и ремонтных базах, обслуживающих морскую авиацию США. Машина ведет регистрацию расхода частей и вычисляет потребность различных баз в зависимости от хранящихся в машине графиков профилактического и капитального ремонта, а также перераспределяет между базами излишки. Квартальный отчет на 400 000 наименований по 60 базам составляется примерно за 1 час, в то время как раньше при выполнении этой работы с помощью счетно-аналитических машин затрачивалось около 3 месяцев.

Упоминается также о ряде других цифровых устройств: аэродиспетчере фирмы «Ремингтон Ранд», устройстве для ввода информации в машину непосредственно с печатного текста и запоминающего устройства на магнитных дисках. Т. М. Александриди

3400. УНИВАК в ночь выборов. Дрейпер (UNIVAC on election night. Draper A. F.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 4, 291—293 (англ.)

Сообщение о том, что универсальная вычислительная машина УНИВАК была использована 4 ноября 1952 г. для предсказания возможных результатов президентских выборов в США. Машина использовала при этом предварительно введенную в нее «информацию о выборах 1944 г. и 1948 г.», а также «анализ движения голосов, начиная с 1928 г.» В. М. Курочкин

3401. Большие электронные цифровые вычислительные машины. III. Применение и перспективы использования. Земанек (Große elektronische Zahlenrechenmaschinen. III. Teil: Verwendbarkeit und Ausblick. Zemanek Heinz), Österr. Z. Telegr.-, Teleph.-, Funk- und Fernsehtechnik, 1954, 8, № 5/6, 73—85 (нем.)

Указывается, что область применения вычислительных машин обусловливается точностью и надежностью их работы. Отмечается, что современные цифровые машины работают точнее, чем человек-вычислитель. Точность результатов обеспечивается соответствующим контролем вычислений и повышением надежности работы применяемых устройств. Применение вместо ламп кристаллических триодов, потребляющих незначительные токи, повысит надежность работы вычислительного устройства, сократит габариты машины и увеличит ее быстродействие, повысив рабочую частоту до 10 *Мец*.

Применение цифровых машин не ограничится узко вычислительными целями, так как машины, автоматизирующие отдельные функции человеческого мозга, способны сообразно с составленной человеком программой производить логические действия и даже накапливать «жизненный» опыт, смогут, «специализируясь» в определенной области, заменить разумные действия человека. Примером подобных машин могут явиться машины-переводчики, машины, оркестрирующие музыкальные произведения, машины, играющие в шахматы, различные управляющие машины и т. п.

В заключение приводится список и данные пятидесяти построенных или находящихся в процессе постройки больших электронных вычислительных машин. Г. М. Грязнов

3402. Сообщение Института по разработке коммерческих приборов общества «Макс-Планк» (Institut für Instrumentenkunde in der Max-Planck Gesellschaft z. F. d. W.), Naturwissenschaften, 1954, **41**, № 23, 540—541 (нем.)

Краткое сообщение о разработке группой «Числовые вычислительные машины» вычислительных машин типа G-1 и G-2 (РЖМат, 1953, 479, 1432—1434). В. Б.

3403. Автоматические вычислительные машины и их применение в нефтяной промышленности. Тюринг (Programmgesteuerte Rechenmaschinen und ihr Einsatz in der Erdölindustrie. Thüring Bruno), Erdöl und Kohle, 1954, **7**, № 4, 230—231 (нем.)

Дается перечень некоторых задач, которые ставятся в настоящее время химической и нефтяной промышленностью. Подчеркивается эффективность решения их с помощью современных вычислительных машин. Кратко излагается основной принцип работы последних.

Указывается, что в настоящее время в Западной Германии выпускаются два типа машин: Z и G. Даются

К реф. 3403

некоторые характеристики машины Z5 (РЖМат, 1954, 3864). Приводится общий вид программного устройства машины (см. фото). Г. М. Грязнов

3404. Обзор коммерческих вычислительных машин. Брейер (Facts for management: Is 1955 the year for EDP? Brayer Herbert O.), Amer. Business, 1955, **25**, № 2, 22—24, 41 (англ.)

Перечисляются коммерческие машины и оборудование для них, выпущенные или разработанные к 1955 г. Фирма ИБМ выпустила более 2600 машин и имеет заказы еще на 1500. 2200 из выпущенных фирмой ИБМ машин являются малыми машинами типа 604. В течение 1955—56 г. предполагается выпустить 470 машин типа 650. Кроме этого, выпущено 18 машин типа 701. В 1955 г. фирма ИБМ предполагает выпустить 16 машин типа 702 и наладить выпуск универсальных машин типа 705, на которые имеется 69 заказов. В настоящее время фирма изготовляет опытную машину на кристаллических триодах на базе схемы выпускающейся машины типа 604.

Фирма «Ремингтон Ранд» выпустила свыше 260 машин УНИВАК 60 и УНИВАК 120. Первая стоит 75 000, вторая 97 000 долл. Кроме того, выпущено 16 больших машин типа УНИВАК. Стоимость их равна, приблизительно, миллиону долларов. Фирма в состоянии выпускать 4 таких машины в месяц. Эта же фирма выпустила 11 больших машин «Унивак Сайнтифик» модель 1103 (ИРА 1103. *Ред.*), предполагает выпустить в 1955 г. еще 4. Большой интерес представляет регистрирующая машина УНИВАК (UNIVAC FILE) стоимостью от 300 000 до 500 000 долл., которая, кроме высокой скорости работы, обладает запоминающим устройством, позволяющим хранить балансы, насчитывающие до 1 800 000 цифр или букв. Ввод может осуществляться с перфокарт, с клавишного устройства, магнитной и перфорированной ленты.

Фирма «Берроус» выпускает настольную электронную вычислительную машину. Размер такой машины 152 × 96 *см*, стоимость 32 500 долл. Две такие машины будут установлены в Детройте. Эта же фирма собирается выпустить быстродействующую электронную бухгалтерскую машину, модель *G*, способную печатать до 900 строк в 1 мин., давая одновременно 7 экземпляров.

Фирма «Нейшнл Кэш Реджистер» разработала и изготовила электронную вычислительную машину общего назначения 102-D, снабженную магнитной лентой. Стоимость ее от 150 000 до 200 000 долл. Предназначена она для инвентарного контроля, контроля закупок и продаж и т. д. на предприятиях средней величины. 102-D является вариантом машины 102-A, предназначенной для научных и технических вычислений.

Приводятся некоторые данные и о других фирмах, выпускающих вычислительные машины и оборудование для них. В. Н. Лаут

3405. Вычислительные машины, способные принимать административные решения. Шрёдер (Computers to make administrative decisions? Schroeder H.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 3, 28—29 (англ.)

3406. Использование больших цифровых вычислительных машин в инженерной практике. Келлер (Extending engineering skills with large-scale digital computers. Keller Allen), J. Amer. Soc. Naval Engrs, 1954, **66**, № 1, 175—184 (англ.)
См. РЖМат, 1955, 5457.

3407. Вычисление на быстродействующих машинах термодинамических функций идеального газа. II. Двуатомные свободные радикалы изотопных гидридов кислорода и серы. Хар, Фридман (High-speed machine computation of ideal gas thermodynamic functions. II. The diatomic free radicals of the isotopic hydrides of oxygen and sulfur. Haar Lester, Friedman A. S.), J. Chem. Phys., 1955, **23**, № 5, 869—875 (англ.)

3408. Некоторые задачи, решаемые на вычислительных машинах. Лоткин (Some problems solvable on computing machines. Lotkin Mark), Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Md., Memo., 1953, Rep. № 693, 15 pp. (англ.)
См. РЖМат, 1955, 5347

3409. Обработка информации в общественных и экономических исследованиях. Мак-Ферсон, Александер, Хортон, Глазер (Information processing in social and industrial research. McPherson a James L., Alexander Samuel N., Horton H. Burke, Glaser Ezra), Scient. Monthly, 1953, **76**, № 2, 100—108 (англ.)

Рассматриваются некоторые проблемы математической экономики, связанные с использованием для расчетов и обработки данных электронных вычислительных машин, в частности возможности применения вычислительных машин в экономике и общественных науках для обработки большого количества данных от многих источников. Для целей исследования информации необходима их сложная обработка и классификация, после чего могут быть сделаны полезные выводы. Создание так называемой «экономической модели» промышленного производства с требуемыми соотношениями между различными отраслями является слишком сложным. Необходимые результаты можно получить с помощью вычислительных машин, если разработать способы программирования. Рассматриваются также методы формального программирования и системы классификации полученной информации. Указывается, что методический экономический анализ не может быть реализован в полном объеме без применения скоростного вычислительного оборудования и систем кодирования, применяемых в этих машинах. Приводятся примеры применения машины СЕАК в коммерческих предприятиях (банковский отдел департамента запасов). Основная трудность заключается в процессе получения информации и программирования вычислительных операций. Задача программирования связана с более общими вопросами формальной логики, являющейся разделом прикладной математики. Ф. В. Майоров

3410. Предлагается обслуживание вычислительных работ (Computation services offered), Steel, 1953, **133**, № 10, 132 (англ.)

Краткое сообщение Филадельфийского исследовательского центра фирмы «Берроус» (Philadelphia Research Center of Burroughs Corp.) о выполнении вычислительных работ для производственных и научных организаций на лабораторной модели быстродействующей вычислительной машины модель I. Основные ее характеристики следующие: запоминающее устройство на магнитном

барабане, ввод и вывод данных на перфоленте (ввод фотоэлектрический). И. М. Старостин

3411. Электронные цифровые вычислительные машины (Electronic digital computers), Engineer, 1955, 199, № 5169, 232—233 (англ.)

Сообщается о выполнении фирмой «Эллиотт» вычислительных работ на машине «402» этой фирмы. Приводится краткое описание машины «402» (РЖМат, 1955, 3451; 1956, 2502), а также ее вычислительные возможности. Заказчики могут программировать задачи сами, либо пользоваться для программирования услугами фирмы. А. И. Щуров

3412. Западная конференция и выставка по вычислительным машинам в Лос Анжелосе 1—3 марта 1955 г. Названия и краткое содержание статей (Western Computer Conference and Exhibit, Los Angeles; March 1—3, 1955. Titles of papers and abstracts), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 38—40 (англ.)

Приводятся названия и краткое содержание 24 статей, представленных на Западную конференцию по вычислительным машинам, состоявшуюся в марте 1955 г. Сообщается, что на выставке приняло участие 36 различных фирм и организаций. С. И. В.

3413. Самолетные вычислительные машины («Fly» unbuilt planes), Sci. News Letter, 1953, 64, № 25, 386 (англ.)

Сообщение о моделирующих устройствах и специальных самолетных цифровых вычислительных машинах, демонстрировавшихся на Восточной объединенной конференции по вычислительным машинам (1953 г.). Б. Я. Коган

3414. Основные характеристики цифровых и моделирующих устройств. Солзер (Fundamental characteristics of digital and analog units. Salzer John M.), Proc. Nat. Electronics Confer. vol. 8, Chicago, 1953, 621—628 (англ.)

В связи с расширением областей применения вычислительной техники создаются устройства, включающие как цифровые элементы, так и элементы непрерывного действия. Кроме того, некоторые простые механизмы, например счетчик пройденного пути в автомобиле, затруднительно отнести к какому-либо из двух классов устройств. Предлагается следующая классификация представления данных в вычислительных устройствах: позиционная система представления; дискретное представление величин по модулю (quantization); дискретное представление величин во времени (sampling). Популярно раскрыт смысл этих характеристик. О. В. Росницкий

3415. Новый подход к моделированию. Боннелл (A different approach to analog computation. Bonnell C. R.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 629—635 (англ.)

Описываются новые вычислительные элементы для моделирующих устройств, датчик моментов и датчик сигналов, обладающие хорошей линейностью и большой разрешающей способностью. При использовании их в моделирующих устройствах входное напряжение воздействует на датчик моментов, представляющий собой простой электромагнитный прибор с ротором и статором из мягкого железа. Перемещение вала датчика соответствует решению уравнения моментов, действующих на вал. Датчик сигналов преобразует перемещение вала в напряжение. Такие моделирующие системы могут выполнять математические операции суммирования, усиления, различного рода нелинейные преобразования (умножение, извлечение квадратного корня и т. п.), интегрирования, вычисления аналитических функций. Преимуществом такого рода систем как интегрирующих является отсутствие дрейфа при длительном интегрировании. Описываемые устройства, помимо целей моделирования, могут найти применение в качестве модуляторов и демодуляторов для стабилизации дрейфа «нуля» и увеличения коэффициента усиления усилителей постоянного тока. Такого рода системы могут найти применение в качестве запоминающих устройств благодаря явлению гистерезиса датчика моментов. Остаточные моменты могут иметь место при возбуждении сердечника постоянным током и последующем уменьшении возбуждения до нуля. Предварительные испытания таких моментных моделирующих систем показали хорошие результаты. Б. Ш. Беркович

3416. Применение электронного моделирующего устройства к изучению колебаний брусьев с учетом усилий среза и сил инерции. Хау, Хау (Application of the electronic differential analyzer to the oscillation of beams, including shear and rotary inertia. Howe C. E., Howe R. M.), J. Appl. Mech., 1955, 22, № 1, 13—19 (англ.)

Основные дифференциальные уравнения, описывающие колебания бруса с учетом усилий среза и сил инерции, преобразованы в форму, удобную для набора их на моделирующем устройстве. По полученным уравнениям составлена электрическая схема соединений с учетом установки начальных условий. Решение производится методом последовательных приближений, который проиллюстрирован осциллограммами. Упрощенная задача колебания бруса (без учета усилий и инерции) решается с точностью $\pm 0{,}1\%$. Решение колебания однородного бруса с учетом усилий среза, инерции и толщины бруса производится с точностью $\pm 0{,}2\%$. Полученные данные сведены в графики, дающие зависимость частотных параметров бруса от сил среза и отношения сечения бруса к его длине, а также показано влияние сил инерции на форму гармоник. Изложено решение колебания неоднородного бруса методом ступенчатой аппроксимации переменных характеристик вдоль бруса.

Авторы заключают, что использование моделирующих устройств помогает быстро и точно изучать вопросы колебания однородных брусьев и совершенно незаменимо при изучении колебаний неоднородных по длине брусьев. Библ. 12 назв. П. В. Тихонов

3417. Использование моделирующих устройств при решении инженерных проблем. Майлс (Analogue methods in the solution of engineering problems. Miles J. G.), Metropol.-Vickers Gaz., 1953, 25, № 412, 108—114 (англ.)

Рассматриваются методы исследования электрических систем и решения практических задач при проектировании с помощью моделирующих устройств. Приводятся различные типы представления исследуемых объектов при моделировании с помощью либо электрических схем, либо механических систем. Большое место отводится описанию электрических схем и принципов работы расчетных столов переменного тока и других специальных моделирующих устройств.

Описывается моделирующее устройство для исследования полей, представляющее собой электролитическую ванну, в которую помещаются электроды. Форма электродов выбирается такой, чтобы она соответствовала геометрической конфигурации поля в граничных точках. Глубина электролита устанавливается в соответствии с диэлектрической проницаемостью среды, через которую распространяется исследуемое поле. С помощью подвижного щупа измеряется напряжение в некоторых точках электролита. Дается общее описание механического и электронного дифференциальных анализаторов. Г. И. Танетов

3418. Анализ интенсивности охлаждения жилых зданий при помощи электронного моделирующего устройства. Уилкокс, Оргел, Рек, Лар, Брискен (Analogue computer analysis of residential cooling leads. Willcox T. N., Oergel C. T., Reque S. G., toeLaer C. M., Brisken

W. R.), Heat. Piping and Air Condit., 1954, **26**, № 10, 149—159 (англ.)

Анализ был выполнен при помощи электронного моделирующего устройства и подкреплен натурными испытаниями. В приложении приводится как пример аналогия между тепловой цепью и электрической цепью с усилителем. В конце статьи имеются высказывания ряда специалистов по обсуждаемой проблеме.

Г. К. Кузьминок

3419. Управление ракетами. Британское снаряжение для Австралии (Control of guided weapons british equipment for Australia), Achievement, 1954, **21**, № 11, 5,7 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 6185.

3420. Вычислительное устройство для построения конформных отображений в гидродинамике. Томлинсон, Хоровиц, Рейнолдс (Analog computer construction of conformal maps in fluid dynamics. Tomlinson N. P., Horowitz H., Reynolds C. H.), J. Appl. Phys., 1955, **26**, № 2, 229—232 (англ.)

См. РЖМех, 1955, 4927.

3421. Электромеханическое моделирующее устройство. Уолстадт (Eulogy on the differential analyzer. Wollstadt Roger D.), Tech Engng News, 1954, **36**, № 2, 42—43 (англ.)

Описывается электромеханическое моделирующее устройство, построенное в 1942 г. в Массачусетском технологическом институте. Сообщается, на каких работах использовалась данная установка. Приводятся некоторые технические данные. Автор считает, что создание электромеханического моделирующего устройства было необходимо и сыграло важную роль в создании современных вычислительных машин. В. В. Карибский

3422. Ошибки фрикционных интеграторов с роликом. Мичел (Errors of friction wheel integrators. Michel J. G. L.), J. Scient. Instrum., 1955, **32**, № 2, 43—44 (англ.)

Рассматриваются ошибки из-за проскальзывания ролика интегратора по диску. Это проскальзывание, вызываемое трением в подшипниках ролика, имеет место лишь при наличии радиального перемещения диска относительно ролика (изменения радиуса сцепления). Относительная величина проскальзывания ролика в единицу времени находится из выражения

$$L = \frac{\dot{y}}{2\pi y \dot{x} \sqrt{k^2 - 1}}, \qquad (1)$$

где y — радиус сцепления диска с роликом; $\dot{y}$ — скорость его изменения; x — число оборотов диска в 1 сек; $K = \mu Pr/\tau$ — отношение силы трения μP ролика по диску к усилию τ/r, требуемому для преодоления момента τ, развиваемого трением в подшипниках ролика; r — радиус диска. Выражение (1) справедливо лишь при условии

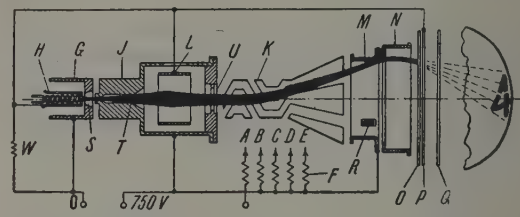
$$y \geqslant y_m = \frac{\dot{y}}{2\pi \dot{x} \sqrt{k^2 - 1}}. \qquad (2)$$

при радиусах сцепления y, меньших критического y_m («мертвая» зона прохождения ролика через центр диска), вращение ролика прекращается. Как видно из (1) и (2), ошибки от проскальзывания ролика могут быть уменьшены путем уменьшения скорости $\dot{y}$ по отношению к скорости диска, т. е. путем увеличения времени интегрирования. Приведен пример, показывающий, что эти ошибки практически очень малы и составляют сотые доли процента от величины интеграла.

Н. Н. Ленов

3423. Электронно-лучевая трубка для десятичного счета. Холлуэй (A decimal counter electron tube. Hollway D. L.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 1, 96—115 (англ.)

Описание конструкции и принципа работы специальной электронно-лучевой трубки. Электронный луч в трубке (см. фото) проходит вдоль оси цилиндра, образованного пятью изолированными отклоняющими пластинами, и фокусируется в плоскости коллектора, состоящего из пяти изолированных секторов, образующих круг, который лежит в плоскости, перпендикулярной лучу. Каждый сектор соединен с соответствующей отклоняющей пластиной и через сопротивление включен на источник питания оконечного анода лампы. Если луч случайно отклонится от оси и попадет на один из секторов, то падение напряжения на сопротивлении, вследствие прохождения по нему электронов луча, вызовет дальнейшее смещение пятна по радиусу к внешней части сектор. Если повернуть коллектор на 0,1 окружности против часовой стрелки по отношению к отклоняющим пластинам, то отклонение луча, вызванное падением электронов на какой-либо сектор, будет направлено в сторону соседнего (по часовой стрелке) сектора. При переходе пятна на следующий сектор изменится и направление отклонения его. Таким образом, луч будет непрерывно вращаться по часовой стрелке. Повернув коллектор в другую сторону на 0,1 окружности, можно получить вращение луча против часовой стрелки.



К реф. 3423

Схематический вид электронно-лучевой трубки для десятичного счета. F — сопротивления, присоединенные к секторам коллектора; G — сетка; H — катод; J — анод; K — отклоняющие пластины; L — фокусирующий электрод; M — ограничивающий кольцеобразный электрод; N — перебрасывающий кольцеобразный электрод; O — коллектор для вращения луча по часовой стрелке; P — электрод, отсасывающий вторичные электроны; Q — коллектор для вращения луча против часовой стрелки; R — электрод для переноса десятков.

В лампе сделаны две системы секторов: одна для вращения по часовой стрелке, вторая — для противоположного вращения. В первой системе секторов вырезаны щели, сквозь которые луч может попадать на второй коллектор. Когда луч при своем вращении по часовой стрелке подходит к радиальной границе такой щели, то дальнейшее вращение его прекращается вследствие противодействия второго коллектора, и на луч действует только радиальная составляющая отклоняющей силы.

В первом коллекторе имеются две системы радиальных щелей: первая, состоящая из щелей, идущих от центра до середины радиуса коллектора, и вторая, щели которой идут от внешнего края коллектора, но не доходят до центра. Специальный электрод в виде кольца, имеющий потенциал коллектора, нормально ограничивает радиальное перемещение луча так, что он не может попасть на щель второй системы и поэтому стоит на одной из щелей первой системы (стабильное состояние).

При подаче сигнала на второй кольцеобразный электрод луч отклоняется по радиусу к внешней части коллектора и сходит со щели (щель «0»), на которой стоял до прихода сигнала. Противодействие второго коллек-

тора прекращается, и пятно передвигается по часовой стрелке, пока не подойдет к краю ближайшей щели второй системы (щель «$\frac{1}{2}$»), где и будет стоять до окончания сигнала (промежуточное стабильное положение). После окончания сигнала луч переместится по радиусу ближе к центру, сойдет со щели второй системы и будет вращаться по часовой стрелке до тех пор, пока не подойдет к следующей щели первой системы (щель «1»). При поступлении следующего импульса пятно переместится сначала на щель «$1\frac{1}{2}$», а после окончания сигнала — на щель «2» и т. д. При приходе 10-го импульса пятно перейдет со щели «9» на щель «0» и пересечет при этом специальный электрод. Напряжение, снимаемое с этого электрода, является сигналом переноса для следующего разряда счетчика. Для удобства работы во втором коллекторе прорезаны цифры (от «0» до «9»). Проходя через эти отверстия, луч падает на светящийся экран, на котором таким образом получается светящаяся цифра, соответствующая числу импульсов, сосчитанных трубкой.

Даются расчеты оптимальной формы электродов трубки на основании учета электрических полей, а также схемы включения трубки в схеме десятичного счетчика, в каждом разряде которого имеется также триод для усиления импульса переноса. Напряжение питания трубки 850 *в*, максимальная частота следования входных импульсов от 70 до 180 *кгц*. В. Н. Лаут

3424. Реверсивный двоичный счетчик. Фенемор (A reversible binary counter. Fenemore R. W.), Electronic Engng, 1955, **27**, № 327, 204—206 (англ.)

Рассматривается схема двоичного счетчика на вакуумных триодах, который может складывать или вычитать поступающие на него импульсы в зависимости от управляющего напряжения. Импульсы с одного разряда счетчика на другой подаются через 2 диодных клапана, к которым подводятся управляющие напряжения с анодов триггера «сложение» — «вычитание». Через клапаны сложения импульсы проходят только в случае, если предыдущий разряд счетчика стоял на 1, а через клапан вычитания, если он был на 0.

Указывается, что для устранения возможности переброса триггера фронтами управляющего напряжения последнее должно иметь время нарастания много больше времени нарастания пусковых импульсов, а переходная емкость должна быть достаточно малой. В приводимой схеме время нарастания управляющего напряжения было равно 10 μсек, а импульсов счета 0,01μсек при амплитуде — 20 *в*. Указывается также, что импульсы счета должны быть задержаны относительно управляющего напряжения на время установления последнего. Приводятся примеры использования обратимых счетчиков в практических схемах. А. И. Щуров

3425. Реверсивный двоичный счетчик на кристаллических триодах. Трент (A transistor reversible binary counter. Trent Robert L.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 346—357 (англ.)

Рассматривается схема двоичного счетчика, позволяющая производить как суммирование импульсов, поступающих на его вход, так и вычитание их из кода, находящегося в счетчике. Каждый из двух выходов двоичного разряда счетчика подается на свой каскад совпадения. Выходы обоих каскадов совпадения соединены с общим входом следующего разряда счетчика. Таким образом передача в счетчике может производиться по одной из двух имеющихся групп каскадов совпадения. Для выбора группы служит управляющая схема, имеющая два выхода. Один выход ее связан с каскадами совпадения первой группы, а другой выход — с каскадами совпадения другой группы. В зависимости от того, какое действие требуется выполнять — сложение или вычитание, управляющая схема переключает группы каскадов совпадения и, как нетрудно убедиться, подаваемые на вход счетчика импульсы будут соответственно прибавляться или вычитаться из кода, уже имеющегося в счетчике.

В качестве триггерной ячейки использовался триггер на двух точечно-контактных германиевых триодах (Trent R. L., Electronics, 1952, 25, № 7, 100). В качестве каскада совпадения используется регенеративный усилитель (Anderson A. E., Proc. I. R. E., 1952, 40, 1541). Рассматриваемая схема счетчика была опробована при частоте входных импульсов 30 *кгц*.

Для запуска счетчика применялись импульсы длительностью 1μсек. Амплитуда их менялась в пределах от 3 до 6 *в*. Изменение напряжения смещения на ±15% оказалось вполне допустимым. Полная мощность, потребляемая 4-каскадным двоичным счетчиком, составляла 3,5 *вт*.

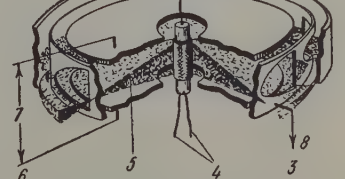
В имеющихся приложениях приводится подробное описание работы схем триггера и каскада совпадения, а также расчеты, связанные с надежностью работы счетчика при изменении сопротивления коллектора от 40 до 12 *ком*, которое может быть вызвано изменением окружающей температуры. Разброс амплитуды импульсов, снимаемых с коллектора, при этом составлял +23,8 — +14,4 *в*. А. Б. Залкинд

3426. Счетчик на лампах с холодным катодом. Тук (A cold cathode batching counter. Tooke P. E.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 314, 160—162 (англ.)

Описана схема счетчика на декатронах и тиратронах с холодным катодом, предназначенная для дозирования составных частей стали. М. Г.

3427. Широкополосной квадратичный усилитель. Солтс (A wide-band square-law computing amplifier. Soltes A. S.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 2, 37—41 (англ.)

Описывается усилитель, амплитуда выходного сигнала которого пропорциональна квадрату амплитуды входного сигнала. Он может включаться в усилительный тракт как обычный усилитель. Квадратичным элементом усилителя служит специально разработанная



К реф. 3427

Электроннолучевая лампа QK-256 (разрез). *1* — катод; *2* — коллектор; *3* — ширма; *4* — накал; *5* — электронный луч (в форме заостренного диска); *6* — отклоняющие пластины; *7* — $E_{вх}$; *8* — $I_{вых}$

электроннолучевая лампа типа QK-329. Электронно-оптическая система этой лампы обеспечивает плоский электронный луч в виде заостренного диска (см. фото), помещенного между отклоняющими пластинами. На пути к коллектору электронный луч встречает кольцеобразный электрод-маску с вырезами в виде квадратичных парабол. При изменении отклоняющего напряжения изменяется положение электронного луча относи-

тельно этих отверстий и токи, протекающие в цепи коллектора и маски, оказываются пропорциональными квадрату отклоняющего напряжения.

Квадратичный элемент может включаться в цепи высокой частоты, видеочастоты или работать в качестве квадратичного детектора. Наиболее выгодным является первый режим, так как в этом случае работа схемы не зависит от выбора рабочей точки на статической характеристике квадратичной лампы. Модель широкополосного квадратичного усилителя испытывалась на основной частоте 40 *Мгц* с полосой пропускания 5 *Мгц*. Приведены схемы модели и рабочие характеристики, намечены пути улучшения предложенной схемы.

И. Д. Визун

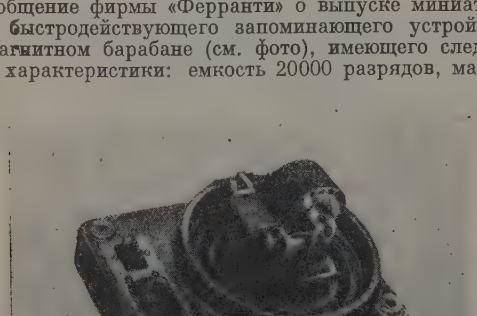
3428. **Разработка усовершенствованной запоминающей трубки — графехона. Дайалл, Фаднер, Харш** (Development of an improved graphechon storage tube. Dyall W. T., Fadner G. R., Harsh M. D.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 535—542 (англ.)

Описывается запоминающая электроннолучевая трубка графехон, имеющая две электронно-оптические системы, расположенные в разных концах трубки. Посредине трубки помещена мишень, окруженная цилиндрическим коллектором. Запись и считывание сигналов производится различными лучами. Описываются улучшения конструкции трубки. Основной причиной расхождения между записанной и прочитанной информацией является неперпендикулярность лучей к мишени. Даются способы центровки обеих половин трубки и мишени при сборке с помощью охлаждаемой водой оправки и металлических установочных цилиндров, которые припаиваются твердым припоем к электродам пушек и шлифуются. Смещение читающего луча по отношению к диаметру изображения уменьшено с 2,8 до 0,75%. Для уменьшения затемняющего действия фона из-за неравномерного распределения вторичных электронов, выходящих с мишени, к мишени прикрепляется экранное кольцо с положительным потенциалом 40 *в* относительно коллектора. Благодаря этому отношение сигнала к шуму увеличилось в 2 раза. После хранения сигнала в течение 20 сек. отношение сигнала к шуму равно ~20 : 1.

И. В. Соловьев

3429. **Миниатюрное быстродействующее запоминающее устройство на магнитном барабане фирмы «Ферранти»** (Ferranti miniature rapid access magnetic drum), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 34 (англ.)

Сообщение фирмы «Ферранти» о выпуске миниатюрного быстродействующего запоминающего устройства на магнитном барабане (см. фото), имеющего следующие характеристики: емкость 20000 разрядов, максимальное время выбора 2,5 *мсек*. Барабан состоит из медного ротора мотора, покрытого окисью железа, который вращается со скоростью 23500 об/мин. Двадцать низкоомных головок расположены в один ряд по образующей барабана. Плотность записи 6,3 разряда на 1 *мм* при методе записи с возвратом к нулю. Ток записи 1 *а*, выходной сигнал головки 30 *мв* на частоте 400 *кгц*.



К реф. 3429

В. В. Карибский

3430. **Металлические ультразвуковые линии задержки** (Metal ultrasonic delay lines), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1954, 38, № 3, 38—39 (англ.)

Национальное бюро стандартов (NBS) сообщает об исследовании металлических ультразвуковых линий задержки и о возможности применения их для вычислительных машин и артиллерийских приборов. При исследовании обнаружено, что сплавы, содержащие в себе комбинации железа, никеля, хрома и других элементов, могут обеспечить стабильность времени задержки в диапазоне температур —50—+200°. Были изучены характеристики затухания и искажения (полоса пропускания) металлических линий, изготовленных из различных металлов и сплавов. Для изучения этих характеристик было рассмотрено распространение ультразвука в зависимости от химического строения вещества, холодной деформации, термической обработки, длины и поперечного сечения испытуемых образцов.

При изучении температурной стабильности времени задержки установлено, что температурный коэффициент модулей упругости и скольжения имеет отрицательную величину, во много раз превышающую положительный коэффициент расширения, поэтому для получения хорошей стабильности времени задержки материал должен иметь малый отрицательный температурный коэффициент модуля скольжения.

Испытанию подвергались следующие материалы: 2 магниевых сплава, химически чистый и обычный никель, инвар, 32%-ный сплав никеля с железом, хромоникелевая сталь (18 : 3), 1%-ная углеродистая инструментальная сталь, кристалл алюминия и 5 изоэластичных сплавов. Из 14 исследованных металлов и сплавов только 2 изоэластичных железных сплава обладали удовлетворительной стабильностью задержки в диапазоне температур —50 — +200°. Эти сплавы содержали 36% никеля, 7—8% хрома и некоторые другие второстепенные примеси. Температурный коэффициент задержки для этих сплавов составлял $8 \cdot 10^{-4}$ % на 1°, тогда как для ртути и магниевых сплавов этот коэффициент составил $300 \cdot 10^{-4}$% и $400 \cdot 10^{-4}$%.

Г. И. Танетов

3431. **Органы памяти в электронных вычислительных машинах. Мор е** (Les organes de mémoire dans les machines électroniques. Maurer P.), Electricien, 1955, 83, № 1941, 94—96 (франц.)

3432. **Об основных вопросах конференции. Тейлор** (Keynote address. Taylor Norman H.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 1—2 (англ.)

Отмечается, что оборудование ввода и вывода данных цифровых вычислительных машин является обширной, запутанной и трудной проблемой, в особенности применительно к электронным быстродействующим машинам. Существующие устройства ввода и вывода по своей скорости не соответствуют скоростям работы электронных машин. Это несоответствие проявляется более резко в машинах, предназначенных для коммерческих и статистических расчетов, чем в машинах, для решения научных задач с меньшим количеством вводимых и выдаваемых данных. Счетные машины для управления реальными объектами требуют специального оборудования для перевода данных из непрерыв-

ной формы в дискретную и обратно. Утверждается, что в настоящее время существуют две совершенно противоположные точки зрения на работу счетных машин. При рассмотрении этого вопроса с первой точки зрения в центре ставится машина, устройства ввода и вывода должны обеспечить бесперебойную работу машины. Вторая точка зрения совершенно обратная — в центр внимания помещаются источники данных, машина же должна обеспечивать своевременную обработку данных. Указывается, что на конференции представлены на обсуждение устройства ввода и вывода данных, разрабатываемые или применяемые пятью вычислительными группами США. Е. И. Мамонов

3433. Картины, производимые вычислительной машиной (Computer pictures), Bussiness Week, 1954, № 1318, 78 (англ.)

Сообщение фирмы ИБМ о приборе мод. 740 для воспроизведения результатов вычислений (РЖМат, 1955, 3502). На большой трубке изображение сохраняется до 20 сек. на малой — доли секунды. А. Б. Залкинд

3434. Электронная вычислительная машина снабжена экраном («Giant brain» has «window»), Amer. Business, 1955, 25, № 2, 45 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 3502.

3435. Записывающее устройство для работы с вычислительными машинами (Recorder for use with computers), Electronics, 1953, 26, № 7, 321—322 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир» (Goodyear Aircraft Corp.) о выпуске прибора, построенного специально для работы с моделирующими устройствами. Прибор обеспечивает непрерывную запись шести величин или в криволинейных координатах (чернильные перья) или в прямоугольных (запись горячей проволокой на теплочувствительной бумаге). Чувствительность может меняться от 0,01 до 100 *в/мм*. В. В. Карибский

3436. Автоматический вычерчиватель графиков (Graphic recording simplified by the new *XY* plotter and recorder), Scient. Amer., 1953, 189, № 5,4 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Лайбраскоп» (Librascope, Inc.) автоматического вычерчивателя графиков в координатах *XY*. В приборе используется стандартная графленая бумага размером 28 × 42 *см* или 21 × 28 *см*. График может чертиться в любом из 4 квадрантов. Положение нуля и масштаб регулируются. Точность 0,1% от всей шкалы. Прибор оформлен в виде автономного блока и может работать от перфокарт, клавиатуры, цифровых машин и машин непрерывного действия. Потребляемая мощность 150 *вт*. А. И. Щуров

3437. Механизм для протяжки магнитной ленты. Бикслер (Mechanical components of handling magnetic recording tape. Bixler O. C.), Trans. I. R. E., 1954, AU-2, № 1, 15—25 (англ.)

Рассматриваются общие принципы конструирования лентопротяжных механизмов, в том числе различные варианты взаимного расположения головок и ведущего ролика, приспособления для хранения ленты в лентопротяжном механизме и способы создания постоянного натяжения. Кассеты для хранения ленты выпускаются фирмами США трех стандартных диаметров (175, 250, 350 *мм*). Незначительное отношение внешнего диаметра к внутреннему (2—3) улучшает постоянство натяжения ленты. Обычным для ленты шириной 6,5 *мм* является прямое натяжение 180—600 *г* и обратное 60—240 *г*. Синхронные моторы для лентопротяжных механизмов выпускаются на различные скорости от 600 до 3600 об/мин.

Рассмотрены способы связи ведущего ролика с мотором, вопросы стабилизации движения ленты для устранения низкочастотного фона, а также приспособление, предотвращающее поперечное смещение ленты по головке. Указывается, что в современных конструкциях низкочастотный фон не превышает 0,3%. Приводится электрическая модель для расчета лентопротяжного механизма. А. И. Щуров

3438. Шаговый преобразователь переводит в цифровую форму непрерывно меняющиеся данные. Беннетт, Лоу (Step-switch converter digitizes analog data. Bennett R. R., Low H.), Electronics, 1953, 26, № 11, 164—165 (англ.)

Предложен прибор, позволяющий преобразовывать напряжение в двухразрядные десятичные числа с помощью 2 телефонных шаговых искателей, работающих от соответствующих усилителей постоянного тока. Результаты печатаются табулятором. Прибор удобен при статистической обработке показаний выходных приборов вычислительных машин непрерывного действия. Количество разрядов может быть увеличено введением дополнительных шаговых искателей. Время преобразования с печатью одного числа составляет 1 сек.

Некоторое увеличение аппаратуры позволяет печатать заданную функцию от входного напряжения x (например, x^2). В. К. Зейденберг

3439. Вычислитель автокоррелограмм. Ревес (An autocorrelogram computer. Revesz G.), J. Scient. Instrum., 1954, 31, № 11, 406—410 (англ.)

Описан прибор, определяющий функцию автокорреляции, разработанный в Англии применительно к нуждам текстильной промышленности. Он предназначен для анализа неравномерности в пряже, ровнице и нитях, но может быть использован также в других областях при решении задач, сводящихся к корреляционному анализу.

Прибор состоит из входного блока, блока задержки, блока, вырабатывающего интеграл произведения двух функций, и счетчика, фиксирующего значение корреляционной функции в отдельных точках. Входной блок приспособлен для ввода функций, записанных на магнитной ленте непрерывным сигналом, модулированным по частоте, и представляет переконструированный серийный лентопротяжный механизм с двумя магнитными головками. Блок задержки выполнен в виде суммирующего устройства. В качестве блока одновременного умножения и интегрирования использован видоизмененный ваттметр постоянного тока, отрегулированный таким образом, что скорость ротора, с высокой точностью, пропорциональна токам, поступающим в обмотки статора и ротора. На оси ротора посажен диск с отверстиями, через которые пропускается свет, попадающий на фотоэлемент; в цепи фотоэлемента возникают импульсы, количество которых определяет число оборотов ротора и доли оборота. Импульсы подсчитываются электромагнитным счетчиком. Прибор рассчитан на сигналы, модулированные частотой от 1 до 5 *кгц*. Ошибки вычислений в пределах от 1 до 5%. В. В. Васманов

3440. Быстродействующий коррелятор. Белл, Райдаут (A high-speed correlator. Bell Harold, Jr, Rideout V. C.), Trans. I. R. E., 1954, EC-3, № 2, 30—36 (англ.)

Описана принципиальная блок-схема высокоскоростного коррелятора (прибора для вычисления автокорреляционных и взаимно корреляционных функций). Прибор приспособлен для случаев, когда исходные функции представлены в виде изменяющихся во времени электрических напряжений (входных сигналов) со спектром в диапазоне звуковых частот (до 360 *гц*). Автокорреляционная (или взаимно корреляционная) функция строится в 41 точке на экране осциллоскопа, являющегося выходным блоком прибора. Время, необходимое для вычисления значения корреляционной функции в одной точке, определяется в основном выбранным интервалом времени, в течение которого необходимо исследовать входной сигнал. Так, при вычислении корреляционных функций с целью обнаружения

периодической составляющей, скрытой в шуме, достаточно обследовать сигнал длительностью в один наибольший период из предполагаемого спектра периодических сигналов; для диапазона звуковых частот, в котором максимальный период равен 0,1 сек., время вычисления корреляционной функции в 41 точке в данном случае будет менее 5 сек.

Прибор состоит из высокоскоростных блоков умножения и интегрирования, переключающей схемы и специальной линии задержки. Результаты испытаний прибора показали, что погрешность вычислений не превосходит 2%. Оказалось возможным выделить из шума периодические сигналы с уровнем 25 *дб*. Указано, что возможно расширение диапазонов работы прибора. В частности, задержка может быть доведена до 2 сек. Возможно также исследование сигналов со спектром, выходящим за пределы 360 *гц*, путем применения нескольких корреляторов. В. В. Васманов

3441. Функциональный генератор для решения технических конструкторских задач. Савант, Говард (A function generator for the solution of engineering design problems. Savant C. J., Howard R. C.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 13, 34—38 (англ.)

Функциональный генератор позволяет воспроизводить функции вида: $[f(x)]^{\alpha}\cdot[g(y)]^{\beta}\cdot[h(z)]^{\gamma}$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ могут быть зависимыми переменными данной задачи или любыми независимыми переменными. Степени α, β и γ могут быть положительными и отрицательными. Принцип работы устройства состоит в логарифмировании входных данных, сложении логарифмов и операции обратного логарифмирования. Устройство дополнительно снабжено блоками полярного превращения сигнала для обеспечения работы генератора при отрицательных входных сигналах и для установления правильного знака функции на выходе функционального генератора. Сообщается, что функция $y=3\sqrt[3]{x}$ была воспроизведена с точностью 3%. Предложенный тип функционального генератора может найти применение при моделировании нелинейных процессов.

П. В. Тихонов

3442. Синтез десятишарнирного механизма для воспроизведения функций трех независимых переменных. Валах (Synthesa desetikloubového mechanismu jako generátoru funkce tří nezávisle proměnnych. Valach Miroslav), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 281—301 (чеш.; рез. русс., англ.)

3443. Опыт работы с электронными лампами и кристаллическими диодами в вычислительных машинах. Гёц, Гейслер (Electron tube and crystal diode experience in computing equipment. Goetz J. A., Geisler H. J.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 1953, 67—72 (англ.)

Описывается система учета работы ламп и кристаллических диодов, используемая лабораторией анализа ламп фирмы ИБМ. Большое количество обработанного материала по использованию различных ламп позволяет делать рекомендации ламповой промышленности.

А. Б. Залкинд

3444. Характеристики электронных ламп, использующихся в военной аппаратуре. Шарп (Electron tube performance in some typical military environments. Sharp D. W.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 1953, 77—83 (англ.)

Описываются результаты испытаний вышедших из строя электронных ламп, установленных в военной наземной и морской радиоаппаратуре. Даются статистические диаграммы, показывающие процент вышедших из строя ламп и причину их неисправности. Вследствие механических дефектов вышло из строя для наземной аппаратуры 9% и для морской 22% всех проверенных ламп. Причины выхода из строя оставшихся ламп относятся к ухудшению электрических параметров ниже допустимых. Это ухудшение в основном связано с уменьшением крутизны и увеличением внутреннего сопротивления ламп. Испытания проводились фирмой «АРИНК» (ARINC). В. С. Б.

3445. Анализ некоторых случаев выхода из строя сопротивлений. Марстен (Resistor reliability-whose responsibility? Some case histories. Marsten Jesse), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 1953, 109—112 (англ.)

Приводится 7 случаев выхода из строя сопротивлений различных типов с подробным анализом причин, вызвавших аварию. А. Б. З.

3446. Сравнение методов анализа магнитных усилителей. Финци, Питман (Comparison of methods of analysis of magnetic amplifiers. Finzi L. A., Pittman G. F., Jr), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 144—157 (англ.)

Приводится обзор современного состояния теории и методов расчета магнитных усилителей. Библ. 18 назв.

О. В. Р.

3447. Применение диодов фирмы «Хьюз» уменьшает размеры вычислительной машины. Луц (Miniaturized computer applications of the Hughes diode. Lutz S. G.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **3**, 8—16 (англ.)

Рассматривается вопрос наиболее выгодного по занимаемому объему монтажа диодных дешифраторных матриц, использующих малогабаритные германиевые диоды фирмы «Хьюз». В объеме 1 $см^3$ может быть размещено до 24 герметических диодов фирмы «Хьюз» в стеклянном оформлении без выводов. При обычном монтаже с использованием пайки последнюю приходится производить на расстоянии 6 *мм* от корпуса диода во избежание перегрева кристалла, что приводит к увеличению длины, занимаемой каждым диодом, более чем в 3 раза. Используя печатный монтаж на плоскости для соединения отдельных элементов, можно получить плотность не более 1 элемента на 1 $см^3$. Это определяется наибольшей допустимой плотностью печатных соединений. «Цементированный» монтаж предусматривает весьма тесное расположение диодов и соединение между собой непосредственно выводов отдельных деталей без монтажных проводов. Вместо пайки используется точечная конденсаторная сварка, позволяющая производить соединение непосредственно у корпуса, так как за весьма короткое время разряда конденсатора тепло не успевает распространяться. Такой метод монтажа позволяет расположить в 1 $см^3$ до 11 деталей. Недостатком этого метода является невозможность замены отдельной детали, вышедшей из строя. В последнем случае приходится удалять целиком весь блок. С точки зрения эксплуатации более удобной является конструкция диодной матрицы, в которой диоды отдельными группами по 5 штук и менее вонзаются в пластинки из резины «эпокси». Внешние выводы делаются посредством печатного монтажа, внутренние — конденсаторной сваркой. Плотность монтажа достигает в этом случае 2 деталей на 1 $см^3$. «Сотовый» монтаж заключается в креплении отдельных диодов в специальных отверстиях общей планки. При укорочении ножек диода до 3 *мм* плотность такого монтажа достигает 8 деталей на 1 $см^3$. Устройство для точечной конденсаторной сварки имеет пинцетообразные электроды. Свариваемые детали, провода и пр. зажимаются этим пинцетом в месте сварки. Для всех свариваемых соединений используется никелевая проволока диаметром 0,25 *мм*. А. Б. Залкинд

3448. Новые печатные схемы (New printed-circuit), Radio-Electronics, 1953, 24, № 8, 8 (англ.)

Сообщение о производстве фирмой RCA трансформаторов промежуточной частоты фотопечатным способом и о производстве фирмой «Сильвания» (Sylvania) гибких печатных схем способом электролитического покрытия медью листа нержавеющей стали (через трафарет из изоляционного материала) с последующим переносом медного изображения схемы со стали на гибкую подложку. См. РЖМат, 1954, 5338. Л. В. Кутуков

3449. **Новые элементы для вычислительных машин** (Semi-conducteurs et assimilés), Toute radio, 1954, № 185, 157 (франц.)

Сообщения о новых разработках в области полупроводниковых материалов, ферритов и других элементов. Термистор фирмы «Транско» (Transco), мод. 100102 меняет сопротивление от 3—7 *ком* в холодном состоянии до 44 *ом* при токе 0,3 *а*. Из феррокерамики интересен материал FXC6 с прямоугольной петлей гистерезиса, пригодный для использования в вычислительных машинах и для головок магнитофонов.

Фирма C.S.F. выпускает плоскостные германиевые диоды с прямым током 0,5—1 *а* и обратным напряжением 450 *в*. Для диода с принудительным охлаждением эти величины соответственно равны 5 *а* и 110 *в*. Фототранзисторы фирмы C.S.F. работают в диапазоне от 2 до 50 *в*; при освещении лампочкой от карманного фонаря с расстояния 15 *см* дают ток около 10 *μа*.

В. К. Зейденберг

3450. **Схемы на полупроводниковых триодах с непосредственной связью. Битер, Брэдли, Браун, Рубинов** (Directly coupled transistor circuits. Beter Ralph H., Bradley William E., Brown Ralph B., Rubinoff Morris), Electronics, 1955, **28**, № 6, 132—136 (англ.)

Полупроводниковые триоды с поверхностным барьером и некоторые сплавные триоды имеют характеристики, позволяющие осуществлять непосредственную межкаскадную связь. Описаны особенности таких характеристик, а также схемы цепочки усилителей, насыщенного триггера, цепочки «или», «и», полусумматора, одноходового мультивибратора и схемы, проверяющей на нечетность по 4 двоичным разрядам. Во всех схемах, построенных на таких триодах, используется основная схема с заземленным эмиттером и входом на базу. Двадцатиразрядное арифметическое устройство и устройство управления вычислительной машины содержит 1700 триодов с поверхностным барьером, 500 сопротивлений и 20 емкостей; последние используются только в цепях управления. Общее потребление мощности такого блока 8 *вт* при напряжении 3 *в*.

Полупроводные триоды с поверхностным барьером (фирмы «Филко», на которых построена машина ТРАНЗАК. *Ред.*) имеют время установления порядка 0,08 μсек, время спада 0,1 μсек. При работе арифметического устройства наблюдаются следующие времена (в μсек): установка триггеров на «0» 0,25, прием числа 0,25, время сквозного переноса 2, выдача результата 0,25. Таким образом, общее время сложения и вычитания 2,75 μсек, а умножения, деления и извлечения квадратного корня 55 μсек. Шестнадцатиразрядное арифметическое устройство позволяет производить около 425 000 сложений или вычитаний в 1 сек. Скорость работы может быть несколько увеличена за счет небольшого увеличения количества элементов схем.

В. К. Зейденберг

3451. **Триод типа *p-n-i-p* с широкой полосой пропускания и высокой нагрузкой. Мехольд** (Grössere Bandbreite und höhere Leistung mit dem *p-n-i-p*-Transistor. Mechold Walter), Elektron (Linz), 1954, № 8, 231—232 (нем.)

Сообщается о возможности снижения емкости коллектора в кристаллическом триоде за счет увеличения расстояния между коллектором и базой при расположении между ними нейтрального слоя (*i*). Это, с одной стороны, может на порядок повысить частотную границу, с другой — позволит работать с большими коллекторными напряжениями. Описываются особенности строения, работы и некоторые характеристики триодов типа *p-n-i-p* (при коллекторном напряжении —25 *в* емкость коллектора меньше 1 *пф*; сопротивление базы около 5 *ом*, верхняя частотная граница триода как усилителя 25 *Мгц*. В качестве генератора триод может работать на частоте до 95 *Мгц*). В. И. Звягин

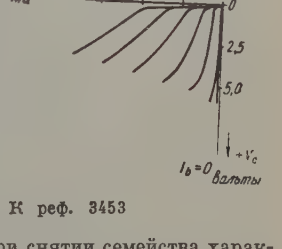
3452. **Полупроводниковый триод с поверхностным барьером, разработанный фирмой «Филко»** («Surface-barrier» transistor developed by Philco Corp.), Radio and Telev. Weekly, 1953, **76**, № 24, 3, 10 (англ.)

Сообщение о демонстрации на конференции Франклинского института разработанного фирмой «Филко» (Philco Corp.) полупроводникового триода с поверхностным барьером. Демонстрировался войсковой радиоприемник на новых триодах, занимающий объем пачки сигарет и работавший в течение многих недель от двух батареек для карманного фонаря; рабочая частота достигает 70 *Мгц*, что перекрывает важную полосу для войсковой радиосвязи (от 20 до 58 *Мгц*.) Демонстрировался также миниатюрный генератор для радиомаяка, посылающий сигналы бедствия при соприкосновении с морской водой. Фирма разрабатывает на новых триодах схемы для быстродействующих вычислительных машин.

Процесс производства такого триода состоит в эрозии тонкой пластинки германия двумя струйками жидкого индия (электролита); когда толщина германия остается около 10—20 μ, полярность электролита меняют, и индий осаждается, образуя электроды. Триод вместе с впаянными выводами помещается в герметическом металлическом корпусе. В. К. Зейденберг

3453. **Кремниевые триоды с поверхностным барьером. Бредли** (Silicon surface-barrier transistors. Bradley W. E.), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 2, 486 (англ.)

Сообщается, что методы изготовления германиевых триодов с поверхностным барьером путем электролитического вытравливания лунок на кристалле были успешно применены при изготовлении кремниевых триодов подобного типа. Опытные образцы кремниевых триодов с поверхностным барьером имели α свыше 0,95 и граничную частоту $f_{c\alpha}$ около 10 *Мгц*. Приведено (см. фото) типичное семейство статических характеристик кремниевого триода с поверхностным барьером для схемы с общим эмиттером; при снятии семейства характеристик ток основания изменялся ступенями, равными 10 *μа*. Я. Н.



К реф. 3453

3454. **Выход из строя кристаллических триодов** (Transistor mortality), Wireless World, 1954, 60, № 5, 249—250 (англ.)

Рассматриваются 4 основные причины выхода из строя кристаллических триодов:

1) Постепенный уход характеристик у слоевых и точечных триодов, например изменение обратного тока коллектора. Эти изменения характеристик приводят кристаллический триод к непригодному состоянию примерно через 70 000 час. Это явление носит название «медленная смерть».

2) Постепенное увеличение утечки между коллектором и эмиттером, особенно заметное у слоевых трио-

дов «выращенного» типа (grown junction), имеющих весьма высокое сопротивление перехода. Эта утечка вызывает дрейф потенциала на эмиттере при отсечке эмиттерного тока.

3) У точечно-контактных триодов иногда внезапно уменьшается коэффициент усиления по току α для малых напряжений. Это явление встречается примерно у 25% образцов и носит название «внезапная смерть».

4) В некоторых образцах уменьшение α происходит еще до использования образца.

«Медленная смерть» вызывается изменением поверхностных условий в результате проникновения влаги. В незащищенном триоде типа *n-p-n* при относительной влажности 54% ток изменяется от 2 до 1000 μa. Это изменение протекает весьма быстро и является обратимым явлением. Отмечается, что повышение окружающей температуры на 10° удваивает диффузию паров через восковую оболочку. Для некоторых типов слоевых триодов при 45° и 100% влажности ток увеличивается в 2 раза через 80 час. работы. Точечно-контактные триоды существенно не меняют своих параметров после пребывания в течение 2500 час. при 55° и 100% влажности.

Приводится пример изменения коллекторных характеристик точечно-контактных триодов при «внезапной смерти», после которой триод уже не может работать в переключающих схемах. Исследования объясняют эту неисправность нежестким креплением контактов. См. также РЖМат, 1955, 4080. А. Б. Залкинд

3455. Короткие телевизионные трубки, полупроводниковые триоды (Kurze Bildröhren, Transistoren und Sprechfunk), Radio-Mag. mit Fernseh.-Mag., 1954, **30**, № 6, 179 (нем.)

На пресс-конференции фирмы «Телефункен» было сообщено, что изготовлены опытные модели телевизионных трубок с углом отклонения 90°. Кроме того, сообщается об успехах, достигнутых в технологии получения чистого германия (подробности не приводятся), и об освоении фирмой «Телефункен» технологии производства полупроводниковых триодов.

Г. В. Шустарева

3456. Счетно-аналитическая машина для научных вычислений. Гарвик (A punched card machine especially equipped for scientific computations. Garwick Jan V.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 167—170 (англ.)

Описывается счетно-аналитическая машина, используемая Норвежским научно-исследовательским институтом обороны. В основе ее лежит умножающая машина фирмы «Булль» (Bull) типа С3. Машина имеет 12 десятичных разрядов. Программа вычислений состоит из 44 соединяемых в любой последовательности циклов. Выполнение умножения и деления программируется. Предусмотрена операция сравнения. Сообщается, что 80 уравнений баллистики вычисляются немногим более чем за 6 час. 10 систем из 4 линейных уравнений с 4 неизвестными решаются за 2 часа. Стоимость машины около 20 тыс. долл. Д. Ф. Шапошников

3457. Электронный статистический табулятор. Стюарт, Кассандер (An electronic statistical tabulator. Stewart R. M., Jr, Kassander A. R., Jr), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 657—667 (англ.)

Описывается автоматическое устройство для быстрого статистического анализа медленно изменяющихся случайных величин. При анализе только одной случайной величины устройство вычисляет данные, необходимые для построения гистограммы. При совместном анализе двух случайных величин вычисленные устройством данные позволяют быстро определить коэффициент корреляции.

Анализируемая величина вводится в устройство в виде соответствующего электрического напряжения, непрерывно изменяющегося во времени. Входное напряжение подается в смесительный блок, где преобразуется в последовательность импульсов. Каждый импульс соответствует одному измерению значения случайной величины; амплитуда импульса пропорциональна значению величины в момент измерения. Частота импульсов определяется требуемым для статистического анализа числом измерений. Импульсы подаются в один из двух дифференциальных амплитудных анализаторов. Каждый анализатор состоит из 10 амплитудных дискриминаторов. Число дискриминаторов соответствует числу классов значений случайной величины. Выходы дискриминаторов связаны через тиратронный кольцевой счетчик и катодные повторители с ячейками регистрирующего устройства.

Каждая ячейка содержит двухсеточный тиратрон, в анодную цепь которого включен электромагнит механического регистратора. В устройстве таких ячеек 110; 100 из них регистрирующие, расположены в порядке 10 × 10, 7 ячеек запасных, 3 вспомогательных. Если анализируется одна случайная величина, регистрирующая ячейка связана только с одним амплитудным дискриминатором и тиратрон включается одной сеткой. При анализе двух случайных величин ячейка связана с двумя дискриминаторами из разных анализаторов; в этом случае тиратрон включается только при наличии сигналов на обеих сетках. Последовательность и скорость работы устройства определяют специальным генератором. Б. М. Раков

3458. Автоматическая идентификация смесей по их инфракрасному спектру с помощью перфокарт. Машинный метод, сочетающий использование интервалов, содержащих спектральные линии и не содержащих их. Бейкер, Райт, Оплер (Automatic infrared punched-card identification of mixtures. Machine method combining use of band wave lenghts and intervals of no band. Baker A. W., Wright Norman, Opler Ascher), Analyt. Chem., 1953; **25**, № 10, 1457—1460 (англ.)

Для идентификации отдельных органических соединений по их инфракрасному спектру используются каталоги перфокарт с вырезками по краям (сортируемые вручную с помощью спиц) и с пробивками (сортируемые на обычной сортировальной машине из комплекта счетно-аналитических машин). Карты взаимно однозначно соответствуют соединениям, а ячейки карт, в которых могут находиться вырезки или пробивки,— отдельным интервалам спектра и некоторым физико-химическим свойствам соединений. Вырезки или пробивки наносятся на карту в тех ячейках, которые соответствуют интервалам, содержащим спектральные линии, и свойствам, имеющимся у соединения, соответствующего этой карте. Задаваясь для идентифицируемого соединения всеми интервалами, в которых содержатся спектральные линии, и выясненными свойствами, нетрудно найти с помощью того или иного из двух упомянутых устройств все карты, которые содержат вырезки или пробивки во всех ячейках, соответствующих этим интервалам и свойствам. Среди отобранных карт, число которых оказывается обычно весьма малым по сравнению с общим числом карт, и находится карта, соответствующая идентифицируемому соединению.

Для идентификации смесей соединений описанная методика поисков недостаточно эффективна, так как требует большой затраты времени. Это связано с тем, что спектральные линии и свойства смеси не принадлежат одному соединению.

Для повышения скорости и автоматичности поисков компонент смеси предлагается при просмотре карт каталога учитывать также и интервалы, не содержащие спектральных линий, а сами поиски производить за

один прогон на карторасклалочной машине. Учет интервалов, не содержащих спектральных линий, позволяет применять при поисках процедуру, при которой выбираются из каталога все карты (соединения), не имеющие ни одной пробивки (спектральной линии) в ячейках, соответствующих интервалам, в которых у идентифицируемой смеси отсутствуют спектральные линии. Процедура приводит к очень сильному сокращению (до 5%) числа карт, среди которых могут содержаться искомые карты. Затем можно применить процедуру, описанную вначале. В. П. Черенин

3459. Использование метода перфокарт для управления химическими процессами. Стивенс, Брейди (Application of punched cards to chemical process control. Stevens R. F., Brady J. F.), Chem. Engng Progr., 1954, 50, № 10, 493—496 (англ.)

3460. Соображения по выбору настольной счетно-клавишной машины (So you need a calculator), Business Manag., 1954, 22, № 4, 12—15 (англ.)

Общий обзор типов и моделей настольных счетно-клавишных машин, имеющихся на рынках Канады. Даются рекомендации потребителям по правильному подбору типов счетных машин для эксплуатации в зависимости от вида и объема конторских работ, квалификации операторов и т. п.; приводятся краткие характеристики некоторых машин.

Счетно-записывающие вычислительные машины «Ундервуд», «Оливетти» и «Ремингтон Ранд» рекомендуется применять для вычислительных работ, связанных со сложением и умножением и требующих регистрации счетного процесса на контрольной ленте. При большом объеме вычислительных работ рекомендуется использовать вычислительные машины, построенные на принципе ступенчатых валиков — «Фриден», «Мадас» и «Мерчант». Рычажные арифмометры «Однер», «Вальтер» и «Брунсвига» могут найти применение как более дешевые и портативные счетные машины. Для сложения и умножения малозначных чисел рекомендуется использовать одноперподные суммирующие машины (комптометры) «Берроус», «Комптометр» и «Самлок». Комптометры могут быть ручными и электрифицированными, односчетчиковыми и двусчетчиковыми.

Отмечается, что большинство фирм предпочитает использовать автоматические вычислительные многоклавишные машины, а именно: американские машины «Фриден», «Монро», «Мерчант» и швейцарскую машину «Мадас».

Упоминается шведская десятиклавишная машина «Фацит». Перечисляются эксплуатационные возможности машины «Оливетти» (модель «Дивисумма» CR).

Кроме упомянутых выше арифмометров, в Канаду также поставляются арифмометры «Результа», «Мульто», моторизированные полуавтоматические арифмометры «Брунсвига» мод. IIE (счетной емкостью 7 × ×11 × 6 разрядов) и портативные вычислительные приборы «Курта». Все арифмометры последних моделей снабжаются механизмом обратного переноса для передачи чисел из счетчика результатов в установочный механизм.

Для составления счетов и фактур рекомендуется фактурная машина «Берроус», которая сочетает в себе функции вычислительной и пишущей машины.

В статье упоминаются: счетно-записывающая машина «Классик», автоматически производящая умножение (в отличие от других машин того же вида, знаки сомножителей и произведений печатаются горизонтально в строку, а не в колонку); вычислительные машины «Мерчант» для слепых операторов и для подсчета в двоично-восьмеричной системе счисления; машина «Фриден», автоматически производящая извлечение квадратных корней; машина «Монро», автоматически производящая возведение установленных чисел в квадрат; сдвоенный рычажный арифмометр «Брунсвига» специального назначения, на котором одновременно можно производить умножение числа и его деление. Приводятся фото счетных машин «Ундервуд», «Бадения», «Берроус», «Фриден» и «Оригинал-Однер».

Н. Н. Парусникова

3461. Счетные машины для выполнения четырех арифметических действий. Определение понятия. Принцип устройства. Гейлинг (Vierspeziesrechenmaschinen Begriffsbestimmung — Arbeitsprinzip. Geiling E.), Technik, 1954, 9, № 12, 677—684 (нем.)

Рассматриваются принципы построения счетной части вычислительных механических машин: колеса Однера (ступенчатые колеса), переключающая защелка, пропорциональный рычаг и ступенчатые валики. Дается описание устройства и действия вычислительной машины «Миллионер», которая выполняет умножение на любое однозначное число за один рабочий ход. В работе механизма умножения этой машины использован принцип «таблицы умножения». Машины «Миллионер», вследствие сложности конструкции и большой стоимости по сравнению с другими клавишными машинами, мало распространены. Подробно описывается развитие машин «Рейнметалл», начиная от простейших машин с ручным приводом и кончая современными автоматическими машинами. Дается описание устройства и работы основных механизмов различных моделей этих машин.

Кроме машин «Рейнметалл», упоминаются некоторые другие новые машины: «Гаманн» мод. 300 — десятиклавишная полуавтоматическая машина, имеющая механизм двойного обратного переноса, рычажная машина «Брунсвига» мод. IIE и вычислительный прибор «Курта».

В настоящее время к вычислительным механическим машинам потребители предъявляют требования увеличения емкости счетчиков до 20 и более разрядов и увеличение технической скорости с 400—600 до 900—1000 ходов в 1 мин. Как перспективные работы намечаются разработки новых способов передачи десятков, создание новых приводных механизмов, устранение шума при работе машин, а также объединение вычислительных машин с записывающими устройствами и счетно-перфорационными машинами. Библ. 5 назв.

Н. Н. Парусникова

3462. Машина для сложения и вычитания дробей (Machine adds and subtracts fractions), Amer. Business, 1954, 24, № 4, 51 (англ.)

Сообщение фирмы «Нейшнл Каш Реджистер» (National Cash Register Co.) о выпуске настольной механической машины для сложения и вычитания дробей. Машина суммирует дроби и превращает их в целые числа.

Н. А. Саранцев

3463. Автоматическая счетная машина с печатью результатов (Printing calculator), Gas Age, 1953, 112, № 10, 47 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о новой компактной 10-клавишной автоматической счетной машине мод. 99 с печатью результатов на ленту.

Л. П.

3464. Несколько замечаний о вычислениях на арифмометре. Хасбрук (Enige opmerkingen over machinerekenen. Haasbroek N. D.), Tijdschr. kadaster en landmeetkunde, 1954, 70, № 3, 142—146 (голл.)

См. РЖАстр, 1955, 1251.

3465. Перевод числа π, полученного на машине ЭНИАК. Бирд (The conversion of ENIAC Pi. Beard Ralph H.), Duodecimal Bull., 1954, 10, № 1, 6—8 (англ.)

Приводятся 768 знаков числа π в двенадцатиричной системе, полученных из 873 десятичных знаков, а так-

же 168 двенадцатиричных знаков числа *e*, полученных из 189 десятичных знаков. Описывается техника перевода группами по 9 знаков с помощью настольной вычислительной машины «Фриден» (Friden). К. С.

3466. Преобразователь координат «Брунсвига 183». **Витке** (Brunsviga 183 — ein Koordinatenumformer. Wittke H.), Vermessungstechn. Rundschau, 1954, **16**, № 5, 191—194 (нем.)

См. РЖАстр, 1955, 1250.

3467. Двусторонняя счетная линейка. Мюнх (Zweiseiten-Rechenschieber. Münch Waldemar), Vermessungstechn. Rundschau, 1954, **16**, № 10, 386—388 (нем.)

См. РЖАстр, 1955, 3559.

3468. Счетная линейка для составляющих векторов. Леннон (A slide-rule for vectorial combinations. Lennon G. W.), Internat. Hydrogr. Rev., 1954, **31**, № 1, 133—138 (англ.)

См. РЖАстр., 1955, 1702.

3469. Как считать? Леметр (Comment calculer? Lemaitre), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 7, 683—691 (франц.)

Дается способ счета на пишущей машинке или вручную по двоично-десятичной системе. Буквам i, j, k, l придаются значения: $i = 1$; $j = 2$; $k = 4$; $l = 8$; каждая цифра может быть представлена в виде комбинации букв, например $jk = 6$; $il = 9$; $ijk = 7$. Далее указывается правило сложения. Здесь возникают сравнительно громоздкие двоичные и десятичные переносы. Вычитание заменяется сложением с дополнительным числом, умножение сводится к поразрядному сложению, деление — к поразрядному вычитанию. Р. Д. Бачелис

3470. Замечания о делении угла. Ленц (Bemerkungen zur Winkelteilung. Lenz Hanfried), S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953, 273—281 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (нем.)

Рассматривается применение прибора, названного угломерителем, делящего данный угол на n равных частей. Прибор дает возможность построить сегмент длиной x при помощи линейки и угломерителя.

3471. Школьник сконструировал искусственное животное. Латиль (Un lycéen a construit un animal artificiel. Latil Pierre de), Sci. et vie, 1954, 85, № 438, 263—265 (франц.)

Описание модели, способной реагировать на свет и толчок. Т. Ш.

3472. Математики и автоматика. Брок (Mathematicians and automata. Brock Paul), Math. Teacher, 1954, **47**, № 8, 514—519 (англ.)

Популярная статья, дающая сравнительный анализ возможностей механических и электронных вычислительных машин. Предлагается методика, дающая возможность подготовить квалифицированный персонал для работы на вычислительных машинах.

В. В. Карибский

3473. Значение электроники для счетной вычислительной техники с перфокартами. Шрётер (Die Bedeutung der Elektronik für die Lochkarten-Rechenmaschinentechnik. Schröter Otto), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 5, 173—178 (нем.; резюме англ., русс.)

Популярная статья. Дается краткая история развития вычислительной техники. Дано описание перфокарты, вывода и ввода данных с перфокарт и автоматического программного управления с помощью перфокарт. Приведена фотография стандартного блока, применяемого в американской машине ИБМ-604. Сравнивается скорость работы вычислительных машин ИБМ-604 и НОРК (NORC). Д. А. Кузьмичев

3474. Применение вычислительных машин для задач энергетики (Computers are busy these days), Westinghouse Engr, 1954, **14**, № 1, 62—63 (англ.)

Приводятся примеры применения и возможный круг задач энергетики для решения на вычислительных машинах. Среди возможных задач называются: вычисление формулы потерь, расчеты для наиболее экономичного распределения нагрузок между станциями системы. Применение вычислительной машины в качестве диспетчера позволило экономить в одной из систем 60 000 долл. ежегодно. Вычислительные машины использовались для определения показателей новых генераторов с внутренним охлаждением. Применялись моделирующие устройства для определения динамической устойчивости систем с такими генераторами.

В. Д. Князев

3475. Электронные счетные машины. Кёлер (Elektronische Rechenmaschinen. Köhler Heinz), Urania (Jena), 1955, **18**, № 5, 180—184 (нем.)

Популярное описание устройства и работы электронных счетных машин. И. Х.

3476. Быстродействующие автоматические вычислительные машины. Ч. I. Бут (High speed automatic computers. Part I. Booth Andrew D.), Instrum. Practice, 1954, 8, № 9, 784—790 (англ.)

Излагается история развития вычислительной техники.

Приведены данные о вычислительных машинах Марк I и Марк II. Приведены сравнительные данные электронных вычислительных машин ЭНИАК, ЭДВАК, ЭДСАК, СЕАК и АКЕ. Упоминается об электронных вычислительных машинах типа АПЕРК, АПЕКСК, Марк III, Марк IV и «Вихрь I». В. Е. Мираков

3477. Быстродействующие автоматические вычислительные машины. Ч. II. Бут (High speed automatic computers. Part II. Booth Andrew D.), Instrum. Practice, 1954, 8, № 10, 880—889 (англ.)

Описываются операции с двоичными числами. Рассматривается работа диодной дешифрирующей матрицы. Описываются двоичное арифметическое устройство и запоминающие устройства на магнитных сердечниках, на ртутных линиях задержки и на барабане.

В. Е. Мираков

3478. Общие принципы моделирующего устройства. Андре (Aspects généraux d'un calculateur analogue. André H.), Ingrs et techniciens, 1955, № 76, 27, 29, 30 (франц.)

Популярный очерк.

3479. Автоматика и производство (Возможное влияние электроники на развитие промышленности). Ремон (Automatisme et production (Possible influence de l'électronique sur le développement industriel). Raymond F. H.), Bull. scient. A. I. M., 1954, **67**, № 12, 761—778 (франц.)

Кратко и в популярной форме описывается назначение сервомеханизмов и общие принципы устройства и работы электронных вычислительных машин. Многочисленные отступления автора в социально-экономическую область иногда затемняют существо дела.

Н. Н. Поснов

3480. Логика помогает кибернетике (La logique au secours de la cybernetique), Atomes, 1954, **9**, № 97, 118 (франц.)

Указывается, что задачи, связанные с электронными вычислительными машинами, могут быть успешно решены только с помощью математической логики.

В. М. Остиану

3481. Вычислительная машина — вызов учителям математики. Манхеймер (The digital computer — a challenge to mathematics teachers. Manheimer Wallace), School Sci. and Math., 1954, **54**, № 9, 701—706 (англ.)

Рассматривается вопрос о роли и месте современных вычислительных машин в дальнейшем развитии об-

щества. Отмечается, что в настоящее время вычислительные машины широко используются при научных исследованиях, при решении сложных задач аэродинамики, баллистики и т. д. Подчеркивается, что использование вычислительных машин не ограничивается областью высшей математики, что они применимы в любой области, требующей обработки информации.

Н. П. Трифонов

3482. **Необычные числа из теории информации.** **Цеманек** (Ungewohnte Zahlen aus der Informationstheorie. Zemanek Heinz), Radiotechnik, 1954, 30, № 6, 188—192 (нем.)

Популярная статья об основных понятиях теории информации. Т. А. Ш.

3483. **Двоичная система счисления. Барта** (The binary number system. Barta Neil), Purdue Engr, 1955, 50, № 4, 18—19, 36, 40, 42 (англ.)

3484. **Французская промышленность конторского оборудования в парадоксальном положении** (L'industrie française de matériel de bureau dans une situation paradoxale), Usine nouvelle, 1954, **10**, № 24, 27—28 (франц.)

Данные о производстве во Франции пишущих машин, вычислительных машин и других предметов конторского оборудования, об их экспорте и импорте.

В. М. Брадис

3485. **Конторское оборудование — мебель и машины** (Le matériel et les machines de bureau), Usine nouvelle, 1954, № de printemps, 197, 199, 200, 201, 203 205 (франц.)

Отмечается все расширяющееся применение вычислительных машин, которые раньше использовались только в специальных службах: в исследовательских бюро, в бухгалтериях и т. д. Дан общий обзор различных типов вычислительных машин, выпускаемых французскими заводами, в том числе машин счетно-аналитических. В. М. Брадис

3486 К. **Математические машины непрерывного действия. Основы их устройства. Кобринский Н. Е.,** 448 стр. с илл., библиогр.: стр. 444—447 (84 назв.), М., Гостехиздат, 1954, 16 р. 5 коп.

Книга посвящена изложению вопросов построения схем математических машин непрерывного действия.

В гл. I рассматриваются вопросы точности, которая является важнейшей характеристикой машины непрерывного действия. Излагаются некоторые положения для проектирования устройства по заданной точности.

Гл. 2 посвящается функциональным устройствам. Описывается ряд зубчатых, шарнирных, кулачковых и др. механизмов и устройств, предназначенных для сложения, умножения, деления, возведения в степень переменных величин, образования тригонометрических функций, для действий с комплексными величинами и задания функций одной и двух переменных. Затрагиваются вопросы синтеза функциональных потенциометров. Описывается ряд электронных множительных устройств, основанных на использовании импульсных, частотных и амплитудных схем.

В гл. 3 рассматриваются интегрирующие и дифференцирующие устройства. Приводятся расчеты погрешностей для электронных устройств. В гл. 4 рассматриваются некоторые общие вопросы синтеза схем математических машин непрерывного действия.

Гл. 5 посвящается моделирующим устройствам для решения линейных алгебраических и дифференциальных уравнений. Излагается методика моделирования помощи цепей, состоящих из элементов R, C, L, механических упругих систем, состояние которых описывается алгебраическими или дифференциальными линейными уравнениями. Описываются устройства для решения систем линейных алгебраических уравнений, в частности электрические моделирующие устройства из сопротивлений и трансформаторов и механическая модель с рычагами. Описывается электрическая схема для нахождения собственных значений матриц. Подробно излагается применение электрических сеток для решения дифференциальных уравнений. Описывается электроинтегратор ЭИ-11 для решения уравнений эллиптического типа и электроинтегратор ЭИ-22 для решения параболических уравнений, а также гидроинтегратор В. С. Лукьянова.

В гл. 6 рассматриваются машины для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (дифференциальные анализаторы). Отмечается, что современные дифференциальные анализаторы с механическими интеграторами имеют точность порядка 0,01—0,1%, машины с тахогенераторами имеют точность порядка 0,1—1% и электронноламповые дифференциальные анализаторы обладают точностью порядка 0,5—5%. Подробно излагаются основы теории дифференциального анализатора и методы образования функций в дифференциальном анализаторе, разбирается большое количество примеров. Описывается методика подбора масштабов и масштабных передач. Проводится анализ погрешностей дифференциального анализатора при помощи линеаризированных дифференциальных уравнений для погрешностей. Отмечается важность выполнения условий устойчивости при работе дифференциального анализатора с электрическими следящими системами. Приводится краткое описание машины А. Н. Крылова, построенной в 1904—1911 гг., описание машины, построенной под руководством И. С. Брука в 1938 г., описание современного электромеханического дифференциального анализатора и электронноламповой анализатора ЭЛИ-14.

Гл. 7. посвящается машинам для решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Излагаются вопросы синтеза устройств, осуществляющих подбор корней алгебраических и трансцендентных уравнений $f(x) = 0$. В основу кладется метод уменьшения невязки $\varepsilon = f(x_t)$. Специальный параграф посвящается устройствам для решения алгебраических уравнений высоких степеней, описывается несколько схем электромеханических и электрических устройств. В заключение разбираются две схемы автоматических устройств для решения систем линейных алгебраических уравнений способом итераций в предположении, что процесс итераций сходится, а также рассматривается несколько электрических схем минимизаторов квадратичной формы $\mu = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j - b_k)^2 = \sum \varepsilon_k^2$ в случае произвольной матрицы коэффициентов $\{a_{kj}\}$.

Е. А. Волков

3487 К. **Эксплуатационные свойства счетно-аналитических машин. Винокуров П. С.,** М., Госстатиздат, 1955, 292 стр. с илл., 10 р. 40 к.

3488 К. **Полностью автоматический функциональный арифмометр с двухступенчатой интерполяцией. Рамзайер** (Vollautomatische Funktionsrechenmaschine mit zweistufiger Interpolation. Ramsayer K. (Dtsch. Geodät. Kommission Bayer. Akad. Wiss. Veröff, B, № 14), München, Verl. Bayer. Akad. Wiss., Beck in Komm., 1954, 25 S., ill. 5.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 11, 590 (нем.)

3489 К. **Счетная линейка; принципы действия и применения. Арнолд** (The slide rule: principles and applications. Arnold Joseph Norman, New York, Prentice-Hall, London, Bailey and Swinfen, 1954, viii, 206 p. ill., tables, diagrs, 36 sh), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 274, 11 (англ.)

3490 К. **Как считают машины. Тукачинский** (Kuidas arvutavad masinad. Tukatšinski M. S. Tallinn, Eesti riiklik kirjastus, 1954, 64 lk., 1.05 rbl.) (эст.)

3491 К. Кибернетика; от человеческого мозга к мозгу искусственному. Косса (La cybernétique, du cerveau humain aux cerveaux artificiels. Cossa Paul, Paris, Masson, 1954, 99 p. ill., 525 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 4, 77 (франц.)

3492 П. Электронные цифровые вычислительные машины (Electronic digital computing machines) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 151965, кл. 05.5, 2.07.53

В цифровой вычислительной машине в качестве основного элемента используется электроннолучевая трубка, имеющая экран для запоминания информации, сигнальную пластину и устройство для управления интенсивностью облучения экрана. Между последним устройством и сигнальной пластиной включена схема, осуществляющая регенерацию записи. В цепь регенерации включено множество вычислительных схем и переключающих устройств, при помощи которых вычислительные схемы могут на некоторое время включаться в цепь регенерации.

Сигнал, поступающий на устройство управления облучением экрана, будет зависеть от выбранной вычислительной операции, совершаемой над сигналом, поступившим с сигнальной пластины трубки, и сигналом внешнего источника. В. Н. Лаут

3493 П. Счетчик с предварительной установкой. Фокс (Predetermined counter system. Fox Benjamin). Пат. США 2669388, кл. 235—92, 16.02.54

Предложен счетчик с N устойчивыми состояниями, коэффициент пересчета которого устанавливается перед началом счета на специальном регистре и может иметь любое выбранное значение от 1 до N. В начале счета с регистра в счетчик передается дополнение установленного на регистре числа до (N — 1), т. е. дополнительный код этого числа. После этого схема считает установленное на регистре число импульсов. При достижении счетчиком заданного состояния выдаются два задержанных импульса, из которых первый сбрасывает счетчик на нуль, а затем второй вводит с регистра на счетчик дополнение установленного на регистре числа до (N—1). Таким образом обеспечивается непрерывная цикличная работа счетчика с выбранным коэффициентом пересчета. В. К. Зейденберг

3494 П. Электронный счетчик. Диккинсон (Electronic counter. Dickinson Arthur H.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. 491169, 491170, 10.03.53

Две схемы десятичных счетчиков на четырех электронных триггерных ячейках с обратными связями. Три первые триггера являются делителем на 5. Обратная связь блокирует вход счетчика на пятом такте, обеспечивая при этом возвращение первых трех триггеров в исходное состояние после пятого импульса.

В. К. Зейденберг

3495 П. Электронное счетное устройство. Гилберт (Electronic counting device. Gilbert Philip) [Universal Match Corp.]. Пат. США 2665846, кл. 235—132, 12.01.54

Предложен трехдекадный счетчик, каждая декада которого включает пересчетное кольцо на пять и делитель на два, а также десять двухпозиционных переключателей, из которых одновременно может быть включен только один. Схемы совпадения на выходах всех декад обеспечивают возбуждение выходного исполнительного реле при достижении счетчиком предварительно установленного с помощью переключателей числа.

В. К. Зейденберг

3496 П. Двоично-десятичный счетчик с двумя входами. Диккинсон (Two-source binary-decade counter. Dickinson Arthur H.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. 490981, 3.03. 53

Двоично-десятичный счетчик, содержащий пять триггерных схем, производящих счет импульсов, поступающих от двух источников. В. Б.

3497 П. Цепь повторного включения симметричного мультивибратора. Рингли (Reset circuit for Eccles-Jordan triggered multivibrator circuits. Ringlee Robert J.) [General Electric Co.]. Канад. пат. 491869, 7.04.53

Приведены электрическая схема и временная диаграмма триггерной схемы с повторным включением. В. А. З.

3498 П. Электронноламповое устройство для получения логарифмических или подобных им показаний. Крумпе (Röhrenanordnung zur Erzielung einer logarithmischen oder ähnlichen Anzeige. Krumpe Alfred). Пат. ГДР 3135, кл. 21a^4 71, 1.07.53

Описывается устройство, в котором изменение суммарного тока двух параллельно включенных пентодов под влиянием изменения входного напряжения удается подогнать с помощью делителей в сеточных цепях под логарифмический закон. Б. Я. Коган

3499 П. Триггер с малым выходным сопротивлением. Шерерц (Trigger circuit with low impedance output. Sherertz Paul C.) [United States of America as represented by the Secretary of the Navy]. Пат. США 2710913, кл. 250—27, 14.06.55

Триггер на двойном триоде с катодной связью; выходной клеммой служит катод одного из триодов.

Л. В. Кутуков

3500 П. Электронная цифровая вычислительная машина (Electronic digital computing machine) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154377, кл. 05.5, 17.12.53

Электронная цифровая вычислительная машина снабжается дополнительным запоминающим устройством на один или более кодов и схемой, в которой поступающая из основного запоминающего устройства инструкция изменяется в соответствии с кодом, поступающим из дополнительного запоминающего устройства.

В. Д. Князев

3501 П. Устройство, использующее полупроводник для запоминания тока. Грей (Current storage device utilizing semiconductor. Gray Frank) [Western Electric Co., Inc.]. Канад. пат. 494134, 30.06.53

Предлагается запоминающее устройство, основанное на принципе изменения состояния полупроводника (наличие или отсутствие проводимости), зависящего от заряда в его окрестности. Заряд может меняться посредством луча электронов, формируемого электронной пушкой. А. Б. Залкинд

3502 П. Магнитное запоминающее устройство, используемое в бухгалтерских машинах. Стерлинг (Wire recording storage mechanism for bookkeeping machines. Sterling John L.), [Remington Rand Inc.]. Пат. США 2652196, кл. 235—61.9, 15.09.53

Запоминающее устройство имеет несколько групп записывающих головок, которые производят запись на проволоку чисел, представленных в импульсной форме. Каждая группа имеет свою головку для чтения, которая, благодаря возможности перемещения, может воспроизводить запись любой головки группы. Выбор информации производится последовательно.

В. В. Карибский

3503 П. Блок магнитных головок. Вильямс, Килберн, Томас (Digital computing machine. Williams Frederic Calland, Kilburn Tom, Thomas Gordon Eric) [National Research Development Corp.]. Пат. США 2700588, кл. 346—74, 25.01.55

Магнитные головки для записи или воспроизведения собираются из двух пластин магнитного материала, имеющих форму гребенок с прямоугольными зубцами.

Пластины скрепляются у основания зубцов так, что зубцы одной накладываются на зубцы другой. Зубцы каждой пластины изгибаются полукольцами выпуклостью наружу так, что каждая пара соответствующих зубцов образует кольцо с узкой щелью между свободными концами зубцов. Каждое кольцо, снабженное обмоткой, образует магнитную головку.

В. В. Карибский

3504 П. Устройство для контроля записанной информации. Райт, Уир, Райс (Means for checking recorded information. Wright Esmond Philip Goodwin, Weir Donald Adams, Rice Joseph) [Standard Telephones and Cables Ltd.]. Пат. США 2688656, кл. 178—23, 7.09.54

Устройство для контроля информации, записанной в двоичной форме на магнитной ленте. Контроль производится поразрядным сравнением информации, извлеченной из магнитной ленты, с эталонной информацией. При обнаружении различия информация может быть переписана.

А. И. Щуров

3505 П. Электрическая передача информации. Брей, Хартли, Ридлер (Electrical transmission of information. Bray Frederick H., Hartley George C., Ridler Desmond S.) [International Standard Electric Corp.]. Канад. пат. 491721, 31.03.53

Описывается устройство, содержащее двоичный счетчик на газоразрядных тетродах; аналогичный счетчик, но с применением трансформаторов для соединения разрядной цепи одного тетрода триггера с управляющим электродом другого тетрода триггера; схему перевода двоичного кода в десятичный на восьми газоразрядных тетродах с холодным катодом, соединенных в четыре триггера (схема содержит генератор импульсов); схему перевода двоичного кода в десятичный на двух газоразрядных триодах с холодным катодом и двух электромагнитных реле для отключения генератора импульсов.

Г. Н. Поваров

3506 П. Устройство для перевода чисел из одной системы счисления в другую. Эдуардс (Number converter. Edwards Robert A.) [General Electric Co.]. Пат. США 2657856, кл. 235—61, 3.11.53

Электрическое устройство для перевода чисел из одной системы счисления в другую, состоящее из программного устройства и параллельного электрического сумматора, которые соединены друг с другом переключателями, разделительными цепями из неоновых ламп и сопротивлений и электрической матрицей. Дана принципиальная схема устройства.

Г. Н. Поваров

3507 П. Схема с низкоомным входом, использующая кристаллический триод. Рейсбек, Уоллес (Low-input impedance transistor circuits. Raisbeck Gordon, Wallace Robert Lee, Jr) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2663796, кл. 250—31, 22.12.53

Схема, использующая кристаллический триод с заземленным основным электродом и автотрансформатором на входе.

А. Б. Залкинд

3508 П. Полупроводниковое устройство для передачи сигналов. Оливер (Semiconductor signal translating device. Oliver Bernard M.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2663830, кл. 317—235, 22.12.53

Многокаскадный усилитель на слоевых триодах типа *n-p-n*, включенных по схеме с заземленным коллектором. Поперечное сечение полупроводниковых триодов растет от каскада к каскаду пропорционально величине $1/(1-\alpha)$, где α — коэффициент усиления по току.

А. Б. Залкинд

3509 П. Электронная система сортировки. Роббинс (Electronic sorting system. Robbins Howard M.) [Hughes Tool Co.]. Пат. США 2674733, кл. 340—347, 6.04.54

Система для селективной сортировки произвольно записанных групп информации и перезаписи этих групп в предопределенной последовательности.

Л. М. Шехтман

3510 П. Суммирующие машины. Вестингер, Альтенбургер, Хирт (Calculating machines. Westinger Karl, Altenburger Ernst, Hirt Otto) [Olympia Werke West G. m. b. H.]. Пат. США 2705106, кл. 235—60.2, 29.03.55

Суммирующие машины имеют один видимый сальдирующий счетчик. Реверс вращения счетчика при вычитании производится с помощью промежуточных колес. В каждом разряде счетчика четыре зубчатых колеса. В сообщении упоминается механизм управления переключением счетчика со сложения на вычитание.

Е. Н. Маквецов

3511 П. Комбинированная пишущая и вычислительная машина с релейным запоминающим устройством. Брайс, Уилер (Combined typewriter and computing machine with accumulators of the relay type. Bryce James W., Wheeler John N.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. 489841, 20.01.53

В комбинированной пишущей и релейной вычислительной машине числа при наборе могут посылаться в релейные регистры, суммироваться и печататься в соответствующее время.

Л. М. Шехтман

3512 П. Дифференциальный передаточный механизм. Бройдо (Differential actuating mechanism. Broido Daniel). Пат. США 2674408, кл. 235—60, 6.04.54

В суммирующей машине число передается в счетчик с помощью рейки, рядом с которой расположено колесо, позволяющее одновременно передать число в видимый указатель набора. Указатель набора может служить одновременно вторым счетчиком.

Примечание референта. Подобные механизмы, в несколько ином конструктивном оформлении, встречаются во многих суммирующих машинах.

Е. Н. Маквецов

3513 П. Электромеханическая система управления и счета. Ханселл, Ханселл (Electromechanical controlling and counting system. Hansell Erik B., Hansell Marjorie B.). Пат. США 2672067, кл. 82—24, 16.03.54

Электромеханическая система, позволяющая при достижении валом необходимого угла поворота автоматически прекращать его вращение.

В. Д. Князев

3514 П. Устройство выдачи информации о ценах. Масса (Vending system. Massa Frank). Пат. США 2645416, кл. 235—1, 14.07.53

3515 П. Учебная игрушка. Пескатори (Educational toy. Pescatori Igino P.). Пат. США 2656618, кл. 35—9, 27.10.53

Содержится описание электрифицированной таблицы умножения чисел от 1 до 12.

Е. К. Нечаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3516. Электронные вычислительные машины фирмы «Ремингтон Ранд» для предприятий и научных учреждений (Electronic developments for business and science), Electr. World, 1953, **140**, № 24, 92 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand Inc.) о выпускаемых предприятиями фирмы электронных вычислительных устройствах для промышленности и научных учреждений. Электронное устройство для систематизации и хранения торговых поручений, присылаемых по почте (РЖМат, 1955, 1575).

Вычислительное устройство на перфокартах, которое имеет бо́льшую скорость по сравнению с другими аналогичными устройствами.

Большие электронные вычислительные машины системы УНИВАК (UNIVAC) и ИРА-1101; -1102; -1103 (ERA-1101, -1102, -1103), имеющие все параметры современных универсальных цифровых машин.

Устройство для хранения и обработки графика движения самолетов. Фирма принимает заказы на изготовление различных вычислительных и управляющих устройств из готовых блоков. Л. С. Легезо

3517. Электронная вычислительная машина, управляющая автоматическим дыропробивочным прессом... (Electronic brain that operates an automatic punch press...), Radio Electronics, 1954, **25**, № 4, 6 (англ.) См. РЖМат. 1955, 5489.

3518. Программа курсов по автоматизации металлообрабатывающих станков (Program in automatic control of machine tools planned), Electr. Engng, 1954, **73**, № 5, 482—483 (англ.)

Сообщается, что на курсах 1954 г., организованных при Лаборатории сервомеханизмов Массачусетского технологического института, будут изучаться следующие вопросы: принципы обработки цифровой информации при управлении металлообрабатывающими станками, системы цифрового управления и их применение к металлообрабатывающим станкам; проектирование оборудования для систем цифрового управления, включая входные и накопительные устройства, вычислительное оборудование, следящие системы для управления металлообрабатывающими станками; конструктивные соображения по обеспечению надежности этих систем, а также вопросы, связанные с организацией работы, эксплуатацией и обслуживанием металлообрабатывающих станков с цифровым управлением. На курсах предполагается также изучить технику программирования на примере фрезерного станка с цифровым управлением, разработанного Лабораторией сервомеханизмов по заданию ВВС США. А. В. Чернышев

3519. Некоторые сведения по электронной обработке данных (Electronic data processing), Mech. Engng, 1954, **76**, № 1, 41 (англ.)

Сообщается о широком внедрении вычислительной техники в промышленность США. Одна нефтяная компания использует телефонную управляющую систему, которая контролирует насосную станцию, находящуюся в 62 милях. Осмотр станции производится не чаще одного раза в месяц. Очень эффективно использование вычислительных электронных машин для управления различными химическими процессами. Данные от измерительных приборов могут быть автоматически пробиты на картах, без использования канцелярской записи. Электронные вычислительные машины в зависимости от получаемых данных могут легко делать выбор между программами, направляя технологический процесс по желаемому пути. В. М. Тарасевич

3520. Применение быстродействующей электронной вычислительной машины для коммерческих расчетов. Сент-Джонстон, Кларк (Applications of a high-speed electronic computer to a business accounting problem. St. Johnston, A. Clarke S. L. H.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, **14**, № 7, 293—302 (англ.)

Подробно разрабатывается методика решения коммерческих задач: расчет накладных расходов при пересылке товаров с центральных складов до места потребления и составление платежных ведомостей для фирмы, в которой занято 2000 человек. В качестве вычислительной машины при решении таких задач была выбрана машина ЭЛЛИОТТ-402, основные сведения по которой приводятся в приложении к статье.

Б. И. Шитиков

3521. Вычислительные машины помогают контролировать ведомости (Computers aid inventory control), Electronics, 1953, **26**, № 1, 16 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о выпуске машины «Спид Толли» для товарного учета (РЖМат, 1955, 1574, 1575). Сообщается также о заказах на несколько десятков машин ИБМ-650, находящихся в производстве на заводе фирмы ИБМ в Эндикотте. Потребителями этой машины будут железные дороги, металлургические предприятия, предприятия общественного пользования, соляной завод и завод фотоаппаратов. Сообщается о выпуске фирмой «Ундервуд» (Underwood Corp.) дешевых (80 000 — 250 000 долл.) вычислительных машин общего назначения для коммерческого потребления. Четыре машины находятся в эксплуатации и заказаны еще четыре. Заказчиками являются электрический завод, авиационный завод и нефтяная компания. Л. М. Шехтман

3522. Электронная вычислительная машина определяет режим работы станка (Electronic computer determines machinability), Mach. Design, 1955, **27**, № 8, 24 (англ.)

Сообщение об электронной вычислительной машине непрерывного действия, построенной фирмой «Дженерал Электрик» для определения любого из 14 параметров режима работы металлообрабатывающего станка. 13 остальных переменных, таких как сорт металла, скорость, глубина резания, подача, срок работы инструмента, его состав, твердость материала и т. д., должны быть при этом введены в машину. Учитываются пять параметров мотора, приводящего в движение станок, а также изменение геометрии инструмента в процессе работы. Для получения ответа требуется несколько минут. Приводится фотография передней панели машины. В. К. Зейденберг

3523. Использование расчетного стола «Анаком» для исследования вопросов грозозащиты подстанций. Гросс, ЛеВесконт, Диллард (Lightning protection in extra-high-voltage stations. Gross I. W., LeVesconte L. B., Dillard J. K.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 11, 967—972 (англ.)

Аналитические методы расчета переходных процессов, связанных с работой разрядников при грозовых перенапряжениях, оказываются фактически невыполнимыми из-за их сложности. Для выбора наивыгоднейшего расположения разрядников, предназначенных для защиты оборудования высоковольтной подстанции, был использован расчетный стол системы «Анаком» (Anacom). Применение расчетного стола для исследования переходных процессов позволило в короткий срок просчитать ряд вариантов размещения разрядников и выбрать наиболее действенный. Для воспроизведения на расчетном столе разрядника, обладающего нелинейной характеристикой, предложена схема, включающая в себя синхронный выключатель, активные сопротивления и выпрямители. Искомые величины напряжений в различных точках исследуемой схемы измерялись с помощью осциллографа. А. А. Крюков

3524. Первые сведения о новом навигационном вычислительном устройстве. Коби (First details R-Theta navigational computer. Koby Victor), Canad. Aviat., 1955, **28**, № 2, 34—35 (англ.)

Прибор, разработанный Лабораторией научно-технических исследований PSC в Торонто совместно с RCAF, является совершенно новой навигационной автоматической системой для скоростных самолетов дальнего действия. Он предназначен для пилотирования самолета на базу, а также для самолетов-перехватчиков для наведения на самолет противника. Прибор автоматически вырабатывает данные пеленга на базу и дальность до базы (или самолета противника). Прибор не требует работы наземных радиосредств. В состав аппа-

ратуры входят: вычислительные устройства наземной скорости и перехвата, блоки интеграторов и усилителей, R — θ (пеленг — дальность) вычислительного устройства и R — θ указателя. В приборе используются печатные схемы и детали малогабаритной аппаратуры. В. П. Парамонов

3525. **Пилоты воздушных сил США получили новое вычислительное устройство фирмы «Форд Инструмент».** Мерфи (USAF pilots get Ford's new computer. Murphy Joseph S.), Amer. Aviat., 1954, **17**, № 23, 30—31 (англ.)

Фирмой «Форд Инструмент» сконструирован аэронавигационный прибор (AN/ASN-6), дающий непосредственные показания положения самолета в градусах и минутах долготы и широты. Для работы прибора никакой связи самолета с землей не требуется. Данные, по которым работает прибор, вводятся вручную пилотом (широта и долгота точки отправления, скорость и сопротивление ветра, показания компаса) или автоматически от соответствующих приборов на борту самолета. Прибор размещен на четырех миниатюрных блоках. Вес прибора 20 *кг*, занимаемый объем около 0,04 $м^3$. В. П. Парамонов

3526. **Воздушные силы США разрабатывают новую навигационную систему** (USAF reveals new navigation system), Amer. Aviat., 1954, **17**, № 23, 37—38 (англ.)

Разрабатываемая в США навигационная система Наваро будет иметь дальность действия 3700 *км* над сушей и 4200 *км* над морем. Станция будет работать в диапазоне низких частот (90—100 *кгц*) и выдавать координаты самолета. Аппаратура станции состоит из наземной и бортовой установки. Бортовая установка будет весить около 28 *кг*. В состав бортовой установки будет входить вычислительное устройство, вырабатывающее данные положения самолета. Наземная установка будет состоять из трех антенн (*A*; *B* и *C*), расположенных в вершинах равностороннего треугольника со сторонами, равными 0,36 длины волны. Любая пара антенн (*AB*, *BC* и *AC*) при одновременном излучении имеет диаграмму направленности в виде восьмерки. Пары *AB*, *BC* и *AC* последовательно излучают три импульса. При переходе излучения от одной пары к другой диаграмма направленности поворачивается на 60°; таким образом станция оказывается всенаправленной. Сравнивая амплитуды этих импульсов, бортовая установка может определить пеленг на станцию. Четвертый импульс все три антенны излучают одновременно, по этому импульсу определяется дальность самолета. Станция может обеспечить точность измерения угла 0,5—1° на расстоянии 5100 *км* и точность измерения дальности 1%. Предполагается, что станция начнет широко эксплуатироваться с 1963 г. В. П. Парамонов

3527. **Тренажеры фирмы «Кертисс-Райт»** (Simulators by Curtiss-Wright), U. S. Air Serv., 1954, **39**, № 8, 13 (англ.)

Фирма «Кертисс-Райт» (Curtiss-Wright) оборудовала для вооруженных сил США два тренажера бомбардировщика типа B-36. Тренажер состоит из кабины бомбардировщика, 14 счетно-решающих устройств, моделирующих полетные характеристики самолета, работу 6 поршневых и 4 реактивных моторов, радиоаппаратуры, самолетной электростанции, аппаратуры для воспроизведения звуков, которые самолет производит в полете. В тренажере насчитывается 1200 электронных ламп, 800 потенциометров и 250 сервомеханизмов. П. В. Тихонов

3528. **Применение вычислительных устройств в аэронавигации.** Уэй (Computer applications in air traffic control. Weihe Vernon I.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 1953, 18—22 (англ.)

Сообщается о работе над планом создания полностью автоматизированной аэронавигационной системы, использующей моделирующие устройства и цифровые вычислительные устройства. Информация о самолете поступает на вычислительные устройства, которые вырабатывают данные, необходимые для управления самолетов. Эти данные с помощью средств связи передаются на самолет в форме, удобной для непосредственного их использования пилотом. Эта система будет работать как в условиях плохой, так и в условиях хорошей видимости, так как даже в условиях хорошей видимости в США со времени окончания войны произошло 172 воздушных столкновения. Эта система должна будет учитывать возможность столкновений самолетов и предотвращать их. В. П. Парамонов

3529. **Карта с запоминающим устройством** (Map with a memory), Meccano Mag., 1954, **39**, № 6, 281 (англ.)

Сообщение фирмы «Декка Навигейтер» (Decca Navigator Co.) о выпуске нового аэронавигационного прибора. Прибор автоматически вычерчивает путь самолета на карте, причем карта остается неподвижной. При удалении самолета из площади, изображенной на карте, прибор запоминает положение самолета. Когда самолет входит в изображенное на карте пространство, прибор вновь начинает вычерчивать его курс. В. Д. Князев

3530. **Карта с запоминающим устройством. Новое аэронавигационное средство** (Map with a memory. New radio-controlled aid for pilots), Air Pictor. and Air Reserve Gaz., 1954, **16**, № 5, 138 (англ.)

См. реф. 3529.

3531. **Автоматические счетно-решающие приборы для счисления координат места самолета.** Деннис Дж., Вопр. радиолок. техн. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1954, № 2, 106—116 (Перев. англ.)

3532. **Вспомогательная радиоаппаратура** (Electronic accessories), Aviat. Age, 1954, **21**, № 3, 174—179 (англ.)

Сообщается о вспомогательных радиоприборах, которые разрабатываются или должны разрабатываться для коммерческой авиации. Отмечается, что авиация нуждается в хороших тренажерах, устройствах, решающих задачу наилучшего распределения нагрузок в самолете, устройствах для автоматизации продажи билетов и др. В. П. Парамонов

3533. **Развитие авиационной радиоаппаратуры в 1953—1954 гг.** Форман (Aircraft-electronic progress 1953—1954. Forman Albert J.), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 66, 67, 144—146 (англ.)

Обзор радиоаппаратуры, применяемой для обслуживания военной и коммерческой авиации. Дается перечисление разработанных в 1953—1954 гг. устройств, применяемых в самых различных областях авиационной техники: локационных станций, посадочного устройства «Волскан», линий связи и т. д. Описываются специальные машины, полупроводниковые триоды и другие детали, применяемые в навигационных устройствах. В. П. Парамонов

3534. **Схемы управления механическими сердцем и легкими. Энгстром, Фарр, Миллер** (Electronic control circuits in the mechanical heart and lung. Engstrom John R., Farr Leo E., Jr, Miller B. J.), Trans. I. R. E., 1953, PGIE-I, August, 31—40 (англ.)

Описываются схемы управления механическими сердцем и легкими, которые были сконструированы для замены сердца и легких человека на время операции в области сердца, а также для более полного исследования функций, выполняемых этими органами. Прибор обеспечивает возможность перекачивать и обогащать кислородом кровь со скоростью 5 *л* в 1 мин. Приводится подробное описание схем и механизмов контроля и автоматического управления: датчика изменения уровня крови в резервуаре механических легких, механизма для

остановки артериального насоса при понижении уровня крови в резервуаре до нижнего предела, механизма для предотвращения разрыва стенок вен при чрезмерно большой скорости откачки крови, устройство для контроля давления внутри механических легких, а также описывается работа прибора при аварийных режимах. Имеются фото. В. В. Карибский

3535. **Воздушные силы США применяют вычислительное устройство для сбрасывания парашютистов** (AF adopts Canadian paradrop computer), Aviat. Week, 1954, **60**, № 13, 30 (англ.)

Сообщается, что США применили разработанный в Канаде метод подсчета точного момента сбрасывания парашютистов. Вычислительное устройство, применяемое для этого, может быть применено для любых грузов, спускаемых на парашютах, в любых условиях. В. П. Парамонов

3536. **Электронное управление растяжением при испытании материалов** (Electronic stretch-control), Aircraft Prod., 1954, **16**, № 7, 256 (англ.)

Сообщается о простом устройстве, которое автоматически производит растяжение материала на определенную длину. Устройство состоит из вращающегося диска с радиальными белыми и черными линиями. Каждые 0,25 *см* передвижения штока станка соответствуют прохождению белой линии мимо щели. Световой луч, отражаясь и попадая на фотоэлемент, посылает импульсы в электронный счетчик. Желаемое растяжение материала набирается в дюймах и десятых долях дюйма на клавиатуре электронного счетчика. Когда достигается нужное растяжение, станок автоматически останавливается. В. М. Тарасевич

3537. **Точные счетчики контролируют объем продукции.** Слейд (Precision counters check manufacturing levels, Slade F. H.), Text. Manufacturer, 1953, **79**, № 944, 406—410 (англ.)

Дается общее описание различных типов механических, электромагнитных и электронных счетчиков для подсчета рабочих ходов инструмента, оборотов вала различных механизмов, подсчета количества различных предметов и т. п.

Устройство, содержащее источник света, фотоэлектрическое реле и электромагнитный счетчик, позволяет выполнять подсчет со скоростью 300 предметов в 1 мин. Фотоэлектрическое реле этого устройства срабатывает при расстоянии от него источника света мощностью 6 *вт* до 10,6 *м* и обеспечивает действие реле при пересечении луча света предметом на 0,1 сек. Луч источника света может иметь диаметр 16 *мм*.

Выпускаются механические счетчики для подсчета числа ходов ткацкого станка, числа витков в мотках ниток и измерения длины кусков тканей, а также счетчики, замыкающие цепь управления машины или сигнальную цепь при накоплении в них ранее установленного числа. Число разрядов такого счетчика можно менять. Выпускаются счетчики для подсчета на тканях числа рисунков различного цвета.

Фирмой «Лондекс» (Londex) выпущено фотореле с повышенным сроком службы на лампе с холодным катодом. Оно действует нормально при изменении напряжения сети питания в пределах 170—250 *в* и позволяет замыкать цепи с током 2 *а* при напряжении 230 *в*. Фотореле работает на расстоянии 5,77 *м* от источника света и предназначено для работы со счетчиком типа ПДРК (PDRC) этой же фирмы. Счетчик типа ПДРК предназначен для счета групп, содержащих от 1 до 100 предметов. Число предметов, образующих группу, устанавливается вращающимся диском с нумерацией. Диск возвращается в исходное положение по мере счета предметов, проходящих через луч, падающий на фотоэлемент.

Фирма «Томсон-Хоустон» (Thomson-Houston Co. Ltd) разработала два электронных счетчика на декатронах. Один счетчик имеет 4 разряда на четырех декатронах и приспособление для счета групп в 50 или 100 предметов с максимальной скоростью 40 000 подсчетов в 1 мин. Другой счетчик имеет два декатрона для подсчета единиц и десятков и шестиразрядный электромагнитный счетчик. Счетчик этого типа может применяться для подсчета групп в 50 или 100 предметов с максимальной скоростью 18 000 подсчетов в 1 мин. Применение счетчика такого типа позволяет автоматически осуществлять резание тканей или рулонной бумаги на куски заданной длины. При накоплении в счетчике заданного числа, соответствующего количеству единиц длины в куске, происходит остановка машины и резка материала, после чего счетчик сбрасывается на нуль и процесс может быть повторен вновь. Л. И. Бакуменко

3538. **Новый прибор Кейси для вычисления скорости самолета** (A new Casey computer), Aircraft (Melbourne) 1954, **32**, № 6, 35 (англ.)

Сообщается об усовершенствовании первой модели прибора Кейси, предназначенного для определения скорости самолета и выполнения других вычислений при пользовании картой в равноугольной конической проекции Ламберта. Первая модель прибора была описана ранее (Aircraft (Melbourne), 1950 г.). Новый прибор Кейси аналогичен старому. Как и первый, он состоит из семи шарнирно соединенных концами и серединами планок, образующих три одинаковых ромба. Расстояния между соседними осями вращения соответствуют 10 мин. полета. Седьмая планка имеет скользящую (в зависимости от широты места) стрелку, которая вместе с полукруговым транспортиром, градуированным в искомой скорости, образует отсчетную часть прибора. Отличие нового прибора заключается в устройстве этой скользящей с изменением широты стрелки.

Пользование линейкой Кейси состоит в прикладывании ее двумя центрами вращения к изображениям на карте Меркатора двух последовательных пунктов, находящихся на расстоянии десяти-, двадцати-, тридцати- и т. д. минутного перелета, причем начальная точка прибора прикладывается к изображению места вылета. Счетчик позволяет по полету также корректировать первоначальные вычисления скорости ветра. И. А. Вильнер

3539. **Измеряются любые углы** (Covers all the angles), Aviat. Week, 1954, **61**, № 20, 59 (англ.)

Сообщение фирмы «Энгл Компьютер» (Angle Computer Co.) о выпуске нового измерителя углов. Этот прибор, как утверждается, применим при точной обработке деталей и прост в эксплуатации. По сравнению с обычной синусной линейкой, время осмотра детали сокращается в отдельных случаях в 10 раз. Г. Г. Меньшиков

3540 П. **Прибор для подсчета микроскопических частиц. Вольф, Сторн, Беренс** (Apparatus for counting microscopic particles. Wolff Heinz Siegfried, Story Marjorie Grace, Behrens Derick Jacob) [The National Research Development Corp.]. Пат. США 2661902, кл. 235—98, 8.12.53

Прибор для подсчета случайно распределенных по поверхности микрочастиц в полосах различной ширины. Прибор состоит из микроскопа, механического устройства для автоматического разбиения исследуемой поверхности на полосы различной ширины, источника света, детектирующего устройства, реагирующего на каждую частицу в обозреваемой полосе, и счетчика частиц в каждой полосе. В. К. Зейденберг

См. также: 2690 К, 3331, 3332, 3334, 3393

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агранович З. С. 3063 К
Азарова Н. В. 3351
Александров П. С. 2841
Аленицын Ю. Е. 2916
Аминов М. Ш. 3047
Андреев П. П. 3380 К
Андронов А. А. 3048
Аржаных И. С. 2961, 3030, 3058, 3059, 3072
Асадуллин Э. А. 3016
Ахиезер Н. И. 2708, 3075 К

Б

Бајшански Б. 2909
Батырев А. В. 2922
Березанский Ю. М. 3022
Бојанић Р. 2735
Большев Л. Н. 3215 Д
Бунт А. Я. 3089
Бурчуладзе 3074
Бычков Б. П. 2691 Д
Бюшгенс С. С. 3257

В

Вальфиш А. З. 2738
Васильева М. В. 3308
Вачнадзе Г. А. 3262
Венедиков М. 3376 К
Вержбинский М. Л. 3196
Винокуров П. С. 3487 К
Воробьев А. В. 2876 Д
Выгодский М. Я. 2685 К

Г

Габададзе Н. А. 3289
Гаврилов М. А. 3385
Гаусс К. Ф. 2705
Гельфонд А. О. 2925
Геронимус Я. Л. 2904
Гехт Б. И. 3067
Глазман И. М. 2997
Глускин Л. М. 2813
Го Хуань-тин 3338
Гранат Ю. Л. 3343
Григорьева И. А. 2901
Гулисашвили 3268 К
Гусева О. В. 3018
Гусейнов М. Г. 3034 Д

Д

Демаховская Р. И. 3260
Деннис Дж. 3531
Джрбашян М. М. 2907, 2908
Дикий Л. А. 2996
Добрушин Р. Л. 3186
Доронин Г. Я. 2902
Дундученко Л. Е. 2918

Е

Евграфов М. А. 2928
Езрохі Т. Г. 3340
Ершов Б. А. 2978

Ж

Житомирский Я. И. 3009

З

Зетель С. И. 3224
Золотарев В. М. 3179
Зубов В. И. 2977

И

Іваненко В. В. 3120
Иванов В. В. 2924
Иванов В. И. 3387
Игнатьев У. В. 3090
Игнатьева А. В. 2906 Д
Илиев Л. 2915
Ингарден Р. С. 3309

К

Каллианпур Г. 3188
Кароль И. Л. 3029
Карп В. Н. 3032 Д
Картвелишвили Н. А. 3046
Кельберт С. Л. 2672
Ким Юн Цан 3002, 3027, 3069
Киро С. Н. 3015
Кобринский Н. Е. 3486 К
Колбина Л. И. 2921
Колмогоров А. Н. 3164 К
Конторович П. Г. 2826
Корчагина Л. Н. 2867
Косинский А. 2839, 2846
Костовский А. Н. 2868
Котелянский Д. М. 2787
Кошелев А. И. 3024
Красносельский М. А. 2852
Кухтенко О. І. 3038, 3045
Кэлугэряну Г. 3131

Л

Лебединцева О. К. 3181
Лейдерман Ю. Р. 3073
Леонтович Е. 2975
Лепин А. Я. 3035 Д
Линник Ю. В. 3172
Ломджария Н. 2697, 2833
Любич Ю. И. 3139
Ляпунов А. А. 3053

М

Майер А. Г. 2975, 3048
Макарова Н. М. 3261
Малыгин К. А. 2694
Мамедов (Хайями) К. М. 3036 Д
Марков А. А. 2716
Маторин А. П. 2870
Мецхваришвили Я. Г. 3114
Минорский В. П. 2686 К
Минц Р. М. 2968
Мишковић В. В. 3352
Мищенко Е. Ф. 2983
Моисеев Н. Н. 3004
Мурга В. К. 3266
Мышкис А. Д. 3066, 3089
Мыцельский Я. 2736

Н

Назмеев Х. С. 3106
Наймарк М. А. 3153
Найман П. Б. 2997

О

О'Рурк 3372 К
Остапенко В. Н. 3033 Д
Остиану В. М. 3386
Отрадных Ф. П. 2706

П

Панов Д. Ю. 3366 К
Пеевски В. 3376 К
Петканчин Б. 3290
Петров В. В. 3190
Пламеннов И. 2862
Плисс В. А. 2981
Плись А. 2969, 2972
Плоткин Б. И. 2826
Поваров Г. Н. 3388 Д
Повзнер А. Я. 3063 К
Погожельский В. 3222
Пожарицкий Г. К. 2980
Понтрягин Л. С. 2983

Р

Рахманов Б. Н. 2919
Рашајский Б. 3014
Ремез Е. Я. 2897, 2898, 2923
Рогожин В. С. 2920
Розенберг Л. А. 3054
Романовский П. И. 3090
Рымаренко Б. А. 2899, 2900
Ряго Г. 2699

С

Салтыков Н. 3010, 3013
Сарманов О. В. 3196
Сикорский Р. 2828
Сираждинов С. Х. 3185
Скалкина М. А. 3006 Д
Скворцова М. Г. 2905 Д
Словиковский В. 3161
Смирнов М. М. 3011
Смогоржевський О. С. 3259
Соколов И. Г. 2891
Соколов Ю. Д. 2957 К
Соловейчик Р. Э. 3196
Спирин Г. М. 3325
Спитковская К. М. 2965
Сретенский Л. Н. 3052
Стечкин С. Б. 2892
Сукалло А. А. 2746

Т

Тавадян А. Б. 2908
Талдыкин А. Т. 3152
Тишин С. Д. 3378 К
Толстов Г. П. 3100 К
Трайнин Я. Л. 3258
Турковский В. А. 3130

У

Улчар Ј. 3228
Ульянов П. Л. 2893

Ф

Фаддеев Д. К. 2804
Файнберг М. М. 2684 К
Фейгельсон Е. М. 3061
Фомин С. В. 3164 К
Фрейман Г. А. 2727

Х

Хазанов М. Б. 3084
Хапланов М. Г. 3142
Харазов Д. Ф. 3143
Хахубия Г. П. 2687 К, 2866
Христофоров В. В. 3071
Хуа Ло-гэн 2948

Ц

Цай И. П. 3057
Целинский Н. А 3264

Ч

Чебышев П. Л. 2682 К
Челидзе В. Г. 2869
Чогошвили Г. С. 2853

Ш

Шапиро Я. Л. 3307
Шварц Ш. 2816
Шилов Г. Е. 2871, 3008
Шинцель А. 2753

Э

Эгле И. Ю. 3066
Эренфойхт А. 2812

Я

Яненко Н. Н. 3007
Янкевич Ч. 3300

A

Alaci V. 3025
Aldrich L. E. 3342
Alexander S. N. 3409
Alexiewicz A. 2966
Altenburger E. 3510 П
Amato V. 2778
Anastassiadis J. 3105
Antosiewicz H. A. 2994
Andrade E. N. da C. 2714 К
André H. 3478
André J. 3256
Arf C. 2911, 3272
Arnold J. N. 3489 К
Arnold K. 3365 К
Arsove M. G. 2932
Artémiadis N. K. 3093
Aruffo G. 3144
Ascoli G. 2677
Athen H. 3087
Auluck F. C. 3176

B

Bachmann H. 2887 К
Baer R. 2807
Bagemihl F. 2940
Baker A. W. 3458
Bal L. 3092
Baldwin G. L. 3060
Bambah R. P. 3319
Bănărescu V. A. 3244 К
Barbălat I. 3236
Barberi B. 3166
Bar-Hillel Y. 2719
Barker R. S. 3370 К
Barlotti A. 3274
Barner M. 3283, 3284
Barrett L. K. 2844
Barta N. 3483
Basu D. 3168, 3205
Basu S. K. 3103
Bauer H. 2863
Bauhuber F. 3361 К
Bautin N. N. 2971
Baxter G. 3191
Beard R. H. 3465
Behrens D. J. 3540 П.
Bell H., Jr 3440
Bell P. O. 3298
Bellman R. 2779, 2974, 3068
Benard A. 3204
Benjamin T. B. 3043
Bennett R. R. 3438
Bergman S. 2947
Bernhart A. 3234
Berman G. 3213
Beter R. H. 3450
Bhatnagar P. L. 3081
Bianchi L. 3242 К
Biran L. 3249
Birnbaum W. Z. 3212
Bixler O. C. 3437
Björnerud E. K. 3355
Blair A. 3132, 3145
Blaschke W. 2695
Blumenthal L. M. 3134
Blumer H. 3017
Boboc N. 3019
Bogdanoff J. L. 3056
Bohun-Chudyniv V. 2772, 2773
Bompiani E. 3295
Bonnell C. R. 3415
Booth A. D. 3467, 3477
Borel A. 2859
Borenius G. 3195
Borsuk K. 3086
Bourbaki N. 2861 К, 3163 К
Bradley W. E. 3450, 3453
Brady J. F. 3459
Brafman F. 3115
Brasca L. 3373 К
Brauer A. 2780
Bray F. H. 3505 П
Brayer H. O. 3404
Breit G. 3316 Д
Briggs W. E. 3108
Brisken W. R. 3418
Brock P. 3472
Brown R. B. 3450
Broido D. 3512 П
Bryce J. W. 3511 П
Buchdahl H. A. 3310
Büchi J. R. 2884
Burnside W. S. 2794 К

C

Caccioppoli R. 2954
Calvo Carbonell C. 3345
Camm F. J. 3379 К
Cantoni R. 3250
Caputo M. 2958
Cartan H. 2851
Carlitz L. 2740, 2748, 2754, 2762
Casa C. F. 2765
Cavallaro V. G. 3227
Chalk J. H. H. 2742
Chandrasekharan K. 3101
Cherubino S. 2785
Chintschin A. J. 3201 К
Chisini O. 3275
Chowla S. 3108
Chung K. L. 3203
Churchill R. V. 2999
Cinquini S. 2875 К
Clagett M. 2693
Clark J. J. 3377 К
Clarke S. L. H. 3520
Cobbe A. P. 2800
Cohen H. G. 2993
Colino A. 3125
Collatz L. 2786
Colmez J. 3159
Conforto F. 3279
Corput J. G. van der 2731, 3077
Corrsin S. 3177
Cossa P. 3491 К
Couty R. 3299
Cox D. R. 3193 3210
Crelle A. L. 3371 К
Croisot R. 2814
Cristescu R. 3136
Curzio M. 2808

D

Davis Ph. 2929
Deaux R. 3233
Debrunner H. 2864
Dekker D. B. 3251
Denjoy A. 2930, 2943
Derman C. 3198
Devidé V. 3083
Diananda P. H. 3189
Dickinson A. H. 3494 П, 3496 П
Dillard J. K. 3523
Dold A. 2855
Doss S. 3183
Dou A. 3291
Draeger M. 2679
Drăganu M. 3026
Draper A. F. 3400
Duncan D. G. 2796
Durand E. 3095
Duparc H. J. A. 2757, 2758
Du Val P. 3271
Dyall W. T. 3428
Dyer E. 2843
Dynkin E. B. 2860 К

E

Eckert W. J. 3393
Edge W. L. 2806
Edwards R. A. 3506 П
Eggleston H. G. 2847
Ehrenfeucht A. 2812
Ehrenpreis L. 3023
Eillenberg S. 2817
Eisenstadt B. J. 3133
Elteren Ph. van 3204
Engel W. 2711
Engstrom J. R. 3534
Erdös P. 2896
Eyring H. 3370 К

F

Fabián V. 3173
Fadner G. R. 3428
Fan Ky 3078
Farr L. E., Ir 3534
Fehr R. 3359
Fejes Tóth L. 3317
Fenemore R. W. 3424
Fichera G. 3330
Fiedler M. 3312
Finetti B. de 3167
Finizi L. A. 3446
Fisher E. 2990
Fisz M. 3182, 3194
Følner E. 3141
Forman A. J. 3533
Forsythe G. E. 2791
Fox B. 3493 П
Frame J. S. 2805
Freudenthal H. 2726
Frick W. 3247
Friedman A. S. 3407
Fröberg C. -E. 3331
Frucht R. 3383
Fuchs L. 2774
Fuller L. E. 2824
Furstenberg H. 2763
Furuya S. 2986

G

Gallarati D. 3144
Galli M. 2696
Ganea T. 2838
Garwick J. V. 3456
Gaschütz W. 2795, 3350
Gautschi W. 3350
Geiling E. 3461
Geisler H. J. 3443
Gilbert Ph. 3495 П
Ginsburg S. 2882, 2886
Glaser E. 3409
Glenn O. E. 3041
Glicksberg I. 3068
Gloden A. 2683 К

Gnedenko B. W. 320 К1
Goddard L. S. 2782, 2783, 3348
Godeaux L. 3269
Goebel W. 3293 Д
Goenaga M. 2767
Goetz J. A. 3443
Goldberg J. E. 3056
Goldman S. 3223 К
Gómez Garcia J. A. 3324
Good R. H., Jr 3042
Goodman A. W. 2936
Goormaghtigh R. 3237
Götlind E. 2798
Gray F. 3501 II
Green J. W. 3323
Green S. L. 3362 К
Griffith H. C. 2848
Griffith J. L. 3123
Grindei I. 3296
Gross I. W. 3523
Gross O. 3068, 3347
Guggenbuhl L. 2704
Guinand A. P. 2733
Gupta H. 2728
Guterman S. 3392

H

Haar L. 3407
Haasbrock N. D. 3464
Hadamard J. 2680
Hadwiger H. 3320
Haller J. 3031 Д
Hällström G. af 2942
Hammer P.-C 3318
Händler W. 3354
Hanke W. 3246
Hansell E. B. 3513 II
Hansell M. B. 3513 II
Harrold O. G., Jr 2848
Harsh M. D. 3428
Hartley G. C. 3505 II
Hartman Ph. 2964, 2984
Hasse H. 2688 К
Havel V. 3255
Havlíček K. 2674
Hayashi Ch. 3209
Heins A. E. 3060
Helfenstein H. G. 2917
Hellman O. 3005
Henkin L. 2721
Herbst R. T. 2960
Hermann R. 3301
Herstein I. N. 3148
Hewlett A. M. 3360
Hida T. 3184
Higman G. 2811
Hille E. 3156
Hilton P. J. 2856
Hintikka K. 2722
Hirschman I. I., Jr 2894
Hirt O. 3510 II
Hoffman R. J. 3356
Hofmann J. E. 2698, 2713 К
Hollway D. L. 3423
Holte F. C. 3174
Hong I. 3020
Hopf H. 3321
Hörmander L. 3122
Horovitz H. 3420
Horton H. B. 3409
Householder A. S. 3157
Howard R. C. 3441
Howe C. E. 3416
Howe R. M. 3416
Howson A. G. 2810
Huber A. 3121
Hunt G. A. 3178
Huth J. H. 2913
Huzino S. 3111
Huzurbazar M. S. 2792

I

Inagaki T. 2842
Ingarden R. S. 3309
Isbell J. R. 2775
Iséki K. 2832
Itô N. 2797
Izumi S. 2888, 2889, 2890

J

Jaakko J. 2722
James R. D. 2744
Jankiewicz C. 3300
Jenkins J. A. 2937
Jonas H. 3286
Jones B. W. 3214
Jones P. S. 2702
Jordan H. 3129
Julia G. 3292 К

K

Kanellos S. G. 2755
Kantz G. 2820
Karamata J. 3107
Karush W. 3082
Kasch F. 2730, 2821
Kassander A. R., Jr 3457
Katō T. 2970
Kavanagh R. W. 3355
Kawada Y. 2799
Keller A. 3406
Keller O.—H. 2711
Kempner A. J. 3108
Kendall D. G. 3218
Kennedy P. B. 2935
Kiefer J. 3216
Kilburn T. 3503 II
Kinohara A. 2818
Klingenberg W. 3253
Kobayashi S. 3303
Koby V. 3524
Kochendörffer R. 2774
Kodis R. D. 3392
Köhler H. 3475
Koschmieder L. 3080
Kosiński A. 2839, 2846
Kothari D. S. 3176
Kozšesnik J. 3039
Krishnaiah P. 2910
Krumpe A. 3498 II
Krzywoblocki M. Z. v. 3049
Kubičec Z. 3044
Kubo O. 3000
Kuratowski K. 2849
Kurepa G. 2834

L

toeLaer C. M. 3418
Lafleur Ch. 3091
Laha R. G. 3168, 3169
Lampard D. G. 3199
Lancaster H. O. 3206
Lang E. D. 3369
Larsson D. F. 2766
Latil P. de 3471
Lauwerier H. A. 3050
Leaderman H. 3328
Lefschetz S. 2982
Lehmer D. H. 2760
Lehmer E. 2761
Lejewski C. 2725
Lemaitre 3469
Lennon G. W. 3468
Lenz H. 3470
LeVesconte L. B. 3523
Levi B. 3055
Levi E. 3373 К
Lietzmann W. 2700, 4243К 4243 К
Lim K. A. 3357
Lions J. L. 3160
Locher-Ernst 3263
Lo Hsu 3056
Łojasiewicz S. 2865
Longo C. 3297
Lonseth A. T. 3327
Lorent H. 2750, 2751
Lorentz G. G. 3112
Łoś K. 2827
Lotkin M. 3408
Low H. 3438
Lowig H. F. J. 2831
Lubin C. 3225
Lugowski H. 2759
Lukacs E. 3170, 3171
Luke Y. L. 3339
Lutz S. G. 3447
Lyle P. 3353

M

MacDowell R. 3146
Maclane S. 2817
McNaughton R. 2724
McPherson J. L. 3409
Malkin I. 2703
Malliavin P. 2934, 2952
Manacorda T. 3040
Manara C. F. 3265
Manheimer W. 3481
Markuschewitsch A. I. 2712 К
Marsten J. 3445
Martić L. 2840
Martin-Dominguez R. 3335, 3336, 3337, 3349
Massa F. 3514 II
Massera J. L. 2987
Masuda K. 2819
Masuyama M. 3207
Matsusaka T. 3280
Matsushita S. 3147
Mauldon J. G. 2789
Maurer P. 3431
Mechold W. 3451
Meinardus G. 2739
Mendes M. 2962
Michel J. G. L. 3422
Mientka W. E. 3108
Mihoc Gh. 3165, 3187, 3200
Mikolás M. 2903, 3104
Mikusiński J. 2985
Miles J. G. 3417
Miller B. J. 3534
Miller K. S. 3128
Miller S. C., Jr 3042
Minakshisundaram S. 3101
Mišoň K. 3241
Mitchell B. E. 2788
Mitrinovitch D. S. 2959
Mizoguti Y. 3311
Mogi I. 3305
Mohanty R., 2895
Moisil Gr. C. 2745
Monteiro A. 2676
Moorty T. N. 3110
Mori A. 2946
Morita K. 2835
Moser L. 2801
Müller C. 2931
Müller F. 3375 К
Münch W. 3467
Murphy J. S. 3525
Mycielski J. 2736
Myhill J. R. 2717

N

Nagase M. 3119
Nakamura M. 3162
Nakaoka M. 2854, 2857
Namias V. 3091
Nanda M. 2895
Natanson I. P. 3098 К
Natucci A. 2707
Nelson E. C. 3384
Neumann B. H. 2809
Neumann H. 3274
Neumark M. A. 3149, 3150
Newns W. F. 2836
Nicholson W. L. 3208
Niven I. 2744
Noble B. 3065
Nollet L. 3276, 3277
Novotný M. 2877

O

Obrechkoff N. 2926
Oergel C. T. 3418
Ohkuma T. 2885
Oliver B. M. 3508 II
Olson F. R. 2754
Opler A. 3458
Ore Ø 2715 К
Orlicz W. 2966
Ostrowski A. M. 3341
Otakar K. 3344
Otsuki T., 3304
Otto E. 3267 К
Otto F. 3267 К

P

Palamà G. 3118
Panton A. W. 2794 К
Parker E. T. 2802
Parker W. V. 2790
Parodi M. 3079
Patterson G. W. 2726
Penner S. S. 3355
Pennington W. B. 3109
Peres N. J. C. 3248
Perron O. 2743
Pescatori I. P. 3515 II
Petrie G. W. 3332
Pimiä L. 3315

Pinl M. 3294
Pipes L. A. 3381
Pittman G. F., Jr 3446
Plessis N. du 2951
Pliś A. 2972
Pogorzelski W. 2912, 3221, 3222
Pokorná O. 3329
Pollaczek F. 3217, 3220
Popadić M. 2718
Popruženko J. 2879, 2880, 2881, 2883
Posey E. E. 2848
Prachar K. 2737

R

Rabson G. 3154
Rado F. 3092
Ragab F. M. 3116
Raikow D. A. 3155
Raisbeck G. 3507 II
Ramsayer K. 3488 K
Rankin R. A. 2732
Rao T. K. 3235
Ray D. 3021
Raymond F. H. 3479
Rédai L. 2822
Reed I. S. 3390
Reed M. B. 3126
Reissig R. 2989, 2995
Rembs E. 3322
Reque S. G. 3418
Revesz G. 3439
Reynolds C. H. 3420
Rideout V. C. 3440
Ridler D. S. 3505 II
Rice J. 3504 II
Ricci G. 2927
Ringlee R. J. 3497 II
Robbins H. 3085
Robbins H. M. 3509 II
Robinson G. de B. 2805
Robinson R. M. 2756
Rodriguéz Vidal R. 3097 K
Rokowska B. 2709
Rooney P. G. 3094
Rosati M. 3278
Roşculeţ M. N. 2955, 2956
Rosenthall E. 2749
Royden H. L. 3202
Rubinoff M. 3450
Rúdin W. 2938, 2939, 2941
Ruhman S. 3392
Rushton S. 3369
Ruyer R. 2690 K
Ryll-Nardzewski C. 2827
Rzewuski J. 3062

S

Saban G. 3285
Salvadori M. G. 3064 K
Salzer J. M. 3414
San-Juan R. 2953
Sansone G. 2874 K
San Soucie R. L. 2823
Sarafyan D. 3346
Sato M. 2888
Sato T. 3070
Savant C. J. 3441
Schiffer M. 2914
Schincke E. 3028
Schinzel A. 2753
Schmidt A. 2723
Schneider T. 2741
Schottlaender S. 3113
Schroeder H. 3405
Schöter O. 3473
Schubert H. 3313
Schuh F. 3226
Schuster J. 3239
Schwarz G. 2850
Schwarz R. J. 3064 K
Schwerdtfeger H. 2776
Seeliger O. 3371 K
Segre B. 2771, 3270, 3273
Seidlerová I. 2675
Selmer E. S. 2752
Seshu S. 3126
Sharp D. W. 3444
Sherertz P. C. 3499 II
Sherman S. 2793
Shimbel A. 3382
Sholander M. 2829
Sibirani F. 3076
Sibuya Y. 2967
Siddons A. W. 3102
Sichardt W. 3232
Sikorski R. 2828, 2872, 2873, 3088
Singal M. K. 3081
Singer I. 3137
Slade F. H. 3537
Słowikowski W. 3161
Slye J. M. 2845
Smirnow W. I. 3099 K
Smith W. L. 3192, 3193
Smolec I. 2681
Sodaro J. F. 3358
Soltes A. S. 3427
Spencer L. V. 3124
St. Johnston A. 3520
Sterling J. L. 3502 II
Sternberg S. 3314
Stevens R. F. 3459
Stewart R. M., Jr 3457
Stöcker C. 2825
Stoker J. J. 3012, 3037
Stöhr A. 2777
Story M. G. 3540 II
Straus E. G. 2791
Stubban J. O. 3281
Sydler J. P. 3252
Szablewski W. 2991
Szmydt Z. 2979

T

Takács L. 3219
Tashiro Y. 3304
Tatarkiewicz K. 2878, 2992
Tatuzawa T. 2734
Taunt D. R. 2803
Taussky O. 3078
Taylor N. H. 3432
Teicher H. 3175, 3180
Terzioglu N. 2933
Thébault V. 3229, 3230, 3231
Thierrin G. 2815
Thomas G. E. 3503 II
Thorne C. J. 3370K
Thrall R. M. 2805
Thüring B. 3403
Tietz H. 2944, 2945
Tino O. N. 3244 K
Todd J. 3078, 3333
Tomita M. 3151
Tomlinson N. P. 3420
Tooke P. E. 3426
Toscano L. 3117
Trent R. L. 3425
Tresse A. 3238
Tricomi F. G. 3096
Tsuji M. 2949
Tukatšinski M. S. 3490 K
Turan P. 2896
Turumaru T. 3162

U

Udrescu V. 2963
Urbanik K. 3140
Ursell F. 3043
Uspenski W. A. 2860 K

V

Vacca M. T. 3127
Valach M. 3442
Valentiner S. 3245 K
Van der Waerden B. L. 2692
Vandiver H. S. 2747
Varnavides P. 2729
Verzuh F. M. 3391
Vidav I. 2950
Villa M. 3240
Vincensini P. 3287, 328
Vinogradov I. M. 2768 K, 2769 K
Visconti A. 3158
Vogel T. 2973
Vrânceanu G. 3306

W

Wagner H. M. 3334
Wallace A. D. 2858
Wallace R. L., Jr 3507 II
Walsh J. L. 2929
Walther A. 3363 K
Wang Hsien-Chung 3302
Ward A. J. 2837
Warner S. 3132
Ważewski T. 2976, 3135
Weihe V. I. 3528
Weinig F. S. 3051
Weir D. A. 3504 II
Wermer J. 3138
Westinger K. 3510 II
Wheeler J. N. 3511 II
Whyburn W. M. 2998
Wielandt H. W. 3326
Willcox T. N. 3418
Willers 2673
Williams F. C. 3503 II
Williamson J. H. 2781
Wintner A. 2964, 2984
Wittke H. 3466
Wolff H. S. 3540 II
Wolfowitz J. 3211, 3216
Wolfsohn N. Z. 3082
Wollstadt R. D. 3421
Worobjow N. N. 2770 K
Worsley B. H. 3389
Wright E. P. G. 3504 II
Wright N. 3458
Wunderlich W. 3282
Wyman M. 2801

Y

Yamamoto K. 2830
Yano K. 3305

Z

Zachrisson L. E. 3003
Zaidman S. 3019
Zarankiewicz K. 2872
Zelinsky D. 2784
Zemanek H. 3401, 3482
Ziller A. 3364 K
Zlamal M. 2988
Zwahlen R. 3001
Zwinggi E. 7012

გულისაშვილი 3268
ხახუბაია 2687 K
ბურჭულაძე 3074
ლომჯარია 2697

郭煥庭 3338

Технический редактор *В. В. Гражданкина*